Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Зиновьев, Вакуумные ожидания квантовых полей, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 1, 41–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:42:42

© 2008 г.

Ю. М. Зиновьев*

ВАКУУМНЫЕ ОЖИДАНИЯ КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ

Предложена новая система вакуумных ожиданий для квантовых полей. Для конечных рядов эти обобщенные функции удовлетворяют линейным аксиомам Вайтмана.

Ключевые слова: обобщенные функции Вайтмана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Аксиомы квантовой теории поля [1]–[4] – это математическая форма физических воззрений на квантовые поля. Опишем конечномерные неприводимые представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, состоящей из комплексных (2×2) -матриц

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

с определителем, равным 1. Матрица

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

называется комплексно сопряженной. Рассмотрим величины $\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_j \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_k}$ с индексами α и $\dot{\beta}$, равными 1, 2. Величина ξ симметрична по отношению к перестановкам индексов α и перестановкам индексов $\dot{\beta}$. Для любой матрицы (1.1) определим линейное преобразование

$$\sum_{(\rho)(\dot{\sigma})} \left(\prod_{s=1}^j A_{\alpha_s \rho_s} \right) \left(\prod_{t=1}^k \bar{A}_{\dot{\beta}_t \dot{\sigma}_t} \right) \xi_{\rho_1 \dots \rho_j \dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_k}. \quad (1.3)$$

Точка над индексом означает, что величина с этим индексом преобразуется с матрицей $\bar{A}$; символ (ρ) означает $\rho_1 \dots \rho_j$; символ $(\dot{\sigma})$ означает $\dot{\sigma}_1 \dots \dot{\sigma}_k$. Это представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ обозначается $D^{(j/2, k/2)}(A, \bar{A})$. Любое конечномерное неприводимое представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ эквивалентно такому представлению при некоторых j и k .

Следуя книге [2], сформулируем свойства вакуумных ожиданий произведений квантовых полей.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zinoviev@mi.ras.ru

Спектральность. Вакуумное ожидание произведения $n + 1$, $n = 1, 2, \dots$, квантового поля является обобщенной функцией

$$W_{(\alpha)(\dot{\beta}), \dots, (\gamma)(\dot{\delta})}(x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n) = \int d^{4n} p \widetilde{W}_{(\alpha)(\dot{\beta}), \dots, (\gamma)(\dot{\delta})}(p_1, \dots, p_n) \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n (p_j, x_{j+1} - x_j) \right\}, \quad (1.4)$$

где

$$(x, y) = x^0 y^0 - \sum_{k=1}^3 x^k y^k. \quad (1.5)$$

Носитель обобщенной функции

$$\widetilde{W}_{(\alpha)(\dot{\beta}), \dots, (\gamma)(\dot{\delta})}(p_1, \dots, p_n) \in S'(\mathbb{R}^{4n}) \quad (1.6)$$

лежит в произведении замкнутых верхних световых конусов

$$\overline{V}_+ = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 \geq 0, (x, x) \geq 0\}. \quad (1.7)$$

Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

называется транспонированной к матрице A . Матрица $A^* = (\bar{A})^T$ называется эрмитово сопряженной. Если $A^* = A$, то матрица (1.1) называется эрмитовой. Рассмотрим базис эрмитовых (2×2) -матриц

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Каждому вектору $x \in \mathbb{R}^4$ сопоставим эрмитову матрицу

$$\tilde{x} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \sigma^\mu \quad (1.10)$$

и отождествим вектор $x \in \mathbb{R}^4$ и данную эрмитову матрицу.

Лоренц-ковариантность. Для любой матрицы (1.1)

$$\begin{aligned} & \widetilde{W}_{(\alpha)(\dot{\beta}), \dots, (\gamma)(\dot{\delta})}(A\tilde{p}_1 A^*, \dots, A\tilde{p}_n A^*) = \\ & = \sum_{(\alpha')(\dot{\beta}'), \dots, (\gamma')(\dot{\delta}')} D_{(\alpha)(\dot{\beta}), (\alpha')(\dot{\beta}')}^{(j_1/2, k_1/2)}(A, \bar{A}) \dots D_{(\gamma)(\dot{\delta}), (\gamma')(\dot{\delta}')}^{(j_{n+1}/2, k_{n+1}/2)}(A, \bar{A}) \times \\ & \quad \times \widetilde{W}_{(\alpha')(\dot{\beta}'), \dots, (\gamma')(\dot{\delta}')}(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Локальность. Пусть π – перестановка натуральных чисел $1, \dots, n + 1$. Если $(x_i - x_j, x_i - x_j) < 0$ для всех чисел i, j , порядок которых изменяется перестановкой π , то

$$\begin{aligned} & W_{\pi; (\alpha)(\dot{\beta}), \dots, (\gamma)(\dot{\delta})}(x_{\pi(2)} - x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n+1)} - x_{\pi(n)}) = \\ & = (-1)^M W_{(\alpha)(\dot{\beta}), \dots, (\gamma)(\dot{\delta})}(x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где M – это число изменений позиций антикоммутирующих полей при перестановке π . В общем случае обобщенная функция в левой части этого равенства есть другое вакуумное ожидание произведения квантовых полей, которое зависит от перестановки π .

Антикоммутирующее поле и обобщенная функция в левой части равенства (1.12) не определены.

Лоренц-инвариантные обобщенные функции изучались в работах [5]–[7]. Описание лоренц-ковариантных обобщенных функций умеренного роста с носителями в произведении замкнутых верхних световых конусов (1.7) получено в работе [8].

В настоящей работе мы дадим математическую формулировку свойств вакуумных ожиданий произведений квантовых полей. Обобщенные функции (1.4) для $n = 1$ описаны в работе [8]. Мы предполагаем, что обобщенные функции (1.4) для $n > 1$ похожи на обобщенные функции (1.4) для $n = 1$. Наши требования связаны с тремя группами: группой трансляций, группой Лоренца и группой перестановок натуральных чисел $1, \dots, n + 1$. Вакуумные ожидания произведений квантовых полей являются рядами обобщенных функций. Если эти ряды конечны, то вакуумные ожидания произведений квантовых полей удовлетворяют свойствам спектральности, лоренц-ковариантности и локальности. Мы определяем сходимость бесконечных рядов обобщенных функций так, чтобы вакуумные ожидания произведений квантовых полей удовлетворяли свойствам лоренц-ковариантности и локальности. Мы предлагаем новое асимптотическое условие для вакуумных ожиданий произведений квантовых полей. В эксперименте мы имеем дело с асимптотическими квантовыми полями, которые могут считаться свободными. Свойство положительности [2] нужно применять к асимптотическим вакуумным ожиданиям произведений квантовых полей.

Обобщенные функции (1.4) называются обычно обобщенными функциями Вайтмана. Введенные нами вакуумные ожидания произведений квантовых полей можно также назвать новыми обобщенными функциями Вайтмана, но во избежание недопониманий последний термин мы использовать не будем.

2. ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНОСТЬ И СПЕКТРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ

Группа $SU(2)$ является максимальной компактной подгруппой группы $SL(2, \mathbb{C})$ и состоит из матриц группы $SL(2, \mathbb{C})$, удовлетворяющих уравнению $AA^* = \sigma^0$. Опишем неприводимые представления группы $SU(2)$. Рассмотрим неотрицательные полуцелые числа $l \in \mathbb{Z}_+/2$, т.е. $l = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. Определим представление группы $SU(2)$ на пространстве многочленов степени не выше $2l$:

$$T_l(A)\phi(z) = (A_{12}z + A_{22})^{2l}\phi\left(\frac{A_{11}z + A_{21}}{A_{12}z + A_{22}}\right). \quad (2.1)$$

Рассмотрим полуцелое число $n = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$ и выберем базис, состоящий из многочленов

$$\psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{(l-n)!(l+n)!}} z^{l-n}. \quad (2.2)$$

Из определений (2.1), (2.2) следует, что

$$T_l(A)\psi_n(z) = \sum_{m=-l}^l \psi_m(z)t_{mn}^l(A), \quad (2.3)$$

где

$$t_{mn}^l(A) = ((l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!)^{1/2} \times \\ \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{A_{11}^{l-m-j} A_{12}^j A_{21}^{m-n+j} A_{22}^{l+n-j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(l-m-j+1)\Gamma(m-n+j+1)\Gamma(l+n-j+1)} \quad (2.4)$$

и $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Функция $1/\Gamma(z)$ равна нулю при $z = 0, -1, -2, \dots$, следовательно, ряд (2.4) является многочленом.

Соотношение (2.1) определяет представление группы $SU(2)$, поэтому многочлен (2.4) определяет представление группы $SU(2)$:

$$t_{mn}^l(AB) = \sum_{k=-l}^l t_{mk}^l(A)t_{kn}^l(B). \quad (2.5)$$

Это $(2l+1)$ -мерное представление неприводимо (см. книгу [9], главу III, раздел 2.3).

Соотношения (2.4), (2.5) имеют аналитическое продолжение на матрицы из группы $SL(2, \mathbb{C})$. Делая замену $j \rightarrow j+n-m$ переменной суммирования в равенстве (2.4), получаем

$$t_{mn}^l(A) = t_{nm}^l(A^T). \quad (2.6)$$

Согласно [9] (см. главу III, раздел 8.3)

$$t_{m_1 n_1}^{l_1}(A) t_{m_2 n_2}^{l_2}(A) = \\ = \sum_{l_3 \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m_3, n_3 = -l_3}^{l_3} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(l_1, l_2, l_3; n_1, n_2, n_3) t_{m_3 n_3}^{l_3}(A) \quad (2.7)$$

для любой матрицы $A \in SU(2)$. Коэффициент $C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3)$ отличен от нуля лишь для $m_3 = m_1 + m_2$ и чисел $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_+/2$, удовлетворяющих следующему условию (треугольника): можно построить треугольник со сторонами длины l_1, l_2, l_3 и целым периметром $l_1 + l_2 + l_3$. Это означает, что l_3 является одним из полуцелых чисел $|l_1 - l_2|, |l_1 - l_2| + 1, \dots, l_1 + l_2 - 1, l_1 + l_2$. Пусть числа $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_+/2$ удовлетворяют условию треугольника, а $m_i = -l_i, -l_i + 1, \dots, l_i - 1, l_i$, $i = 1, 2, 3$, причем $m_3 = m_1 + m_2$. Тогда согласно [9] (см. главу III, раздел 8.3)

$$C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) = (-1)^{l_1 - l_3 + m_2} (2l_3 + 1)^{1/2} \times \\ \times \left(\frac{(l_1 + l_2 - l_3)! (l_1 + l_3 - l_2)! (l_2 + l_3 - l_1)! (l_3 - m_3)! (l_3 + m_3)!}{(l_1 + l_2 + l_3 + 1)! (l_1 - m_1)! (l_1 + m_1)! (l_2 - m_2)! (l_2 + m_2)!} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum_{j=0}^{l_2 + l_3 - l_1} \frac{(-1)^j (l_1 + m_1 + j)! (l_2 + l_3 - m_1 - j)!}{j! \Gamma(l_3 - m_3 - j + 1) \Gamma(l_1 - l_2 + m_3 + j + 1) (l_2 + l_3 - l_1 - j)!}. \quad (2.8)$$

Пусть dA – нормированная мера Хаара на группе $SU(2)$. Согласно [9] (см. главу III, раздел 8.3)

$$\begin{aligned} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3)C(l_1, l_2, l_3; n_1, n_2, n_3) = \\ = (2l_3 + 1) \int_{SU(2)} dA t_{m_1 n_1}^{l_1}(A) t_{m_2 n_2}^{l_2}(A) \overline{t_{m_3 n_3}^{l_3}(A)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Коэффициенты многочлена (2.4) вещественны. С помощью соотношения (2.6) и равенства $A^* = A^{-1}$ можно переписать равенство (2.9) в виде

$$\begin{aligned} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3)C(l_1, l_2, l_3; n_1, n_2, n_3) = \\ = (2l_3 + 1) \int_{SU(2)} dA t_{m_1 n_1}^{l_1}(A) t_{m_2 n_2}^{l_2}(A) t_{n_3 m_3}^{l_3}(A^{-1}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если числа $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_+/2$ удовлетворяют условию треугольника, то согласно [9] (см. главу III, раздел 8.3)

$$C(l_1, l_2, l_3; l_1, -l_2, l_1 - l_2) = \left(\frac{(2l_3 + 1)(2l_1)!(2l_2)!}{(l_1 + l_2 - l_3)!(l_1 + l_2 + l_3 + 1)!} \right)^{1/2}. \quad (2.11)$$

Выберем в (2.10) $n_1 = l_1$, $n_2 = -l_2$. Тогда из соотношения (2.10) и инвариантности меры Хаара dA следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=-l_1}^{l_1} \sum_{n_2=-l_2}^{l_2} t_{m_1 n_1}^{l_1}(A) t_{m_2 n_2}^{l_2}(A) C(l_1, l_2, l_3; n_1, n_2, m_3) = \\ = \sum_{n_3=-l_3}^{l_3} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, n_3) t_{n_3 m_3}^{l_3}(A). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставляя матрицу (1.8) в это равенство и учитывая (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=-l_1}^{l_1} \sum_{n_2=-l_2}^{l_2} t_{n_1 m_1}^{l_1}(A) t_{n_2 m_2}^{l_2}(A) C(l_1, l_2, l_3; n_1, n_2, m_3) = \\ = \sum_{n_3=-l_3}^{l_3} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, n_3) t_{m_3 n_3}^{l_3}(A). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Соотношения (2.12), (2.13) могут быть аналитически продолжены на любую матрицу из группы $SL(2, \mathbb{C})$.

Рассмотрим для любых натуральных чисел m , n и полуцелых чисел

$$l_1, \dots, l_{n+1}, \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1} \in \mathbb{Z}_+/2,$$

$$m_i = -l_i, -l_i + 1, \dots, l_i - 1, l_i, \quad \dot{m}_i = -\dot{l}_i, -\dot{l}_i + 1, \dots, \dot{l}_i - 1, \dot{l}_i, \quad i = 1, \dots, n + 1,$$

семейство обобщенных функций

$$F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m) \in S'(\mathbb{R}^{4m}).$$

Это семейство называется лоренц-ковариантной обобщенной функцией, если для любой матрицы $A \in SL(2, \mathbb{C})$

$$F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(A\tilde{x}_1 A^*, \dots, A\tilde{x}_m A^*) = \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \dots \sum_{k_{n+1}=-l_{n+1}}^{l_{n+1}} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \dots \sum_{\dot{k}_{n+1}=-\dot{l}_{n+1}}^{\dot{l}_{n+1}} \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i k_i}^{l_i}(A) t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i}(\bar{A}) \right) F_{k_1, \dots, k_{n+1}; \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m), \quad (2.14)$$

где (2×2) -матрица $\tilde{x}$ задана соотношением (1.10). Полуцелые числа $l_1, \dots, l_{n+1}, \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}$ в соотношении (2.14) не произвольны. Положим в равенстве (2.14) матрицу $A = -\sigma^0$. Для этой матрицы $A\tilde{x}_j A^* = \tilde{x}_j$, $j = 1, \dots, m$. Из определения (2.4) следует, что

$$t_{m_j k_j}^{l_j}(-\sigma^0) = (-1)^{2l_j} \delta_{m_j k_j}.$$

Следовательно, равенство (2.14) справедливо для матрицы $A = -\sigma^0$, если

$$(-1)^{2(l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1})} = 1,$$

т.е. сумма $l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1}$ является целым числом. Ниже это условие всегда предполагается выполненным.

Пусть носитель обобщенной функции $F(x) \in S'(\mathbb{R}^4)$ лежит в замкнутом верхнем световом конусе (1.7). Согласно работе [10] существует такое натуральное число q , что

$$F(x) = (\partial_x, \partial_x)^q f(x), \quad (2.15)$$

$$(\partial_x, \partial_x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)^2, \quad (2.16)$$

где дифференцируемая функция $f(x)$ с носителем в замкнутом верхнем световом конусе (1.7) полиномиально ограничена.

Введем функцию-степеньку

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Используя матрицы (1.9) в качестве коэффициентов, определим (2×2) -матрицу

$$\tilde{\partial}_x = \sum_{\mu=0}^3 \eta^{\mu\mu} \sigma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.18)$$

где $\eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1$. Подставляя эту матрицу в многочлен (2.4), получаем дифференциальный оператор $t_{mn}^l(\tilde{\partial}_x)$.

Согласно [8] (см. предложение 2.2, лемму 2.4) любая обобщенная функция

$$F_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(x) \in S'(\mathbb{R}^4) \quad (2.19)$$

с носителем в замкнутом верхнем световом конусе (1.7), удовлетворяющая соотношению ковариантности (2.14) для $m = n = 1$, имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \int d^4x F_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(x) \phi(x) = \\ = \sum_{l_3 \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m_3, \dot{m}_3 = -l_3}^{l_3} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(\dot{l}_1, \dot{l}_2, l_3; \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3) \times \\ \times \int d^4x \theta(x^0) f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2}((x, x)) (\partial_x, \partial_x)^q t_{m_3 \dot{m}_3}^{l_3}(-\tilde{\partial}_x) \phi(x), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где функция $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$, q – натуральное число, коэффициент Клебша–Гордана задан соотношением (2.8), (2×2) -матрица $\tilde{\partial}_x$ определена в (2.18), многочлен $t_{mn}^l(A)$ задан соотношением (2.4), а непрерывная функция $f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(s)$ с носителем на положительной полуоси полиномиально ограничена.

Рассмотрим обобщенную функцию с носителем в замкнутом верхнем световом конусе (1.7), удовлетворяющую соотношению ковариантности (2.14) для $m = 1$, $n = 0$. Этот случай соответствует равенству (2.20) при $l_2 = \dot{l}_2 = 0$, $m_2 = \dot{m}_2 = 0$. Из соотношения (2.8) следует, что

$$C(l_1, 0, l_3; m_1, 0, m_3) = \delta_{l_1 l_3} \delta_{m_1 m_3}.$$

Соотношение (2.20) – это разложение по конечномерным неприводимым представлениям группы $SL(2, \mathbb{C})$. Рассмотрим обобщенные функции вида

$$\begin{aligned} \int d^{4m}x F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m) \phi(x_1, \dots, x_m) = \\ = \sum_{l_{n+2}, \dots, l_{n+m+1} \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{\substack{m_s, \dot{m}_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=n+2, \dots, n+m+1}} \int d^{4m}x f_{m_i; \dot{m}_i}^{l_i; \dot{l}_i}((x_k, x_k)) \times \\ \times \left(\prod_{j=1}^m (\theta(x_j^0) (\partial_{x_j}, \partial_{x_j})^q t_{m_{n+1+j} \dot{m}_{n+1+j}}^{l_{n+1+j}}(-\tilde{\partial}_{x_j})) \right) \phi(x_1, \dots, x_m), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где функция $\phi(x_1, \dots, x_m) \in S(\mathbb{R}^{4m})$, q – натуральное число, (2×2) -матрица $\tilde{\partial}_x$ задана соотношением (2.18), многочлен $t_{mn}^l(A)$ задан соотношением (2.4), непрерывная функция

$$f_{m_i; \dot{m}_i}^{l_i; \dot{l}_i}(s_k) \equiv f_{m_1, \dots, m_{n+m+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+m+1}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+m+1}}(s_1, \dots, s_m) \quad (2.22)$$

с носителем в произведении положительных полуосей полиномиально ограничена, а суммы по переменным $l_{n+2}, \dots, l_{n+m+1}$ конечны. Обобщенная функция (2.21) принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^{4m})$. Сумма по переменной l_3 в соотношении (2.20) конечна в силу того, что для коэффициентов Клебша–Гордана выполнено условие треугольника.

Определим для любых чисел $m, n \in \mathbb{Z}_+$ обобщенный коэффициент Клебша–Гордана

$$C(l_1, \dots, l_{m+2}; l_{m+3}, \dots, l_{m+n+4}; j_1, \dots, j_{m+n+1}; m_1, \dots, m_{m+2}; m_{m+3}, \dots, m_{m+n+4}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k_s = -j_s, -j_s+1, \dots, j_s-1, j_s, \\ s=1, \dots, m+n+1}} C(l_1, l_2, j_1; m_1, m_2, k_1) \times \\
&\quad \times \left(\prod_{s=1}^m C(j_s, l_{s+2}, j_{s+1}; k_s, m_{s+2}, k_{s+1}) \right) \times \\
&\quad \times \left(\prod_{s=m+1}^{m+n} C(j_{s+1}, l_{s+2}, j_s; k_{s+1}, m_{s+2}, k_s) \right) \times \\
&\quad \times C(l_{m+n+4}, l_{m+n+3}, j_{m+n+1}; m_{m+n+4}, m_{m+n+3}, k_{m+n+1}), \tag{2.23}
\end{aligned}$$

где $l_1, \dots, l_{m+n+4}, j_1, \dots, j_{m+n+1} \in \mathbb{Z}_+/2$ и $m_i = -l_i, -l_i+1, \dots, l_i-1, l_i, i = 1, \dots, m+n+4$. Из определения (2.23) и соотношений (2.12), (2.13) следует, что для любой матрицы $A \in SL(2, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=1, \dots, m+2}} \left(\prod_{i=1}^{m+2} t_{n_i, n_i}^{l_i}(A) \right) C(l_1, \dots, l_{m+2}; l_{m+3}, \dots, l_{m+n+4}; j_1, \dots, j_{m+n+1}; \\
&\quad n_1, \dots, n_{m+2}; m_{m+3}, \dots, m_{m+n+4}) = \sum_{\substack{n_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=m+3, \dots, m+n+4}} \left(\prod_{i=m+3}^{m+n+4} t_{n_i, m_i}^{l_i}(A) \right) \times \\
&\quad \times C(l_1, \dots, l_{m+2}; l_{m+3}, \dots, l_{m+n+4}; \\
&\quad j_1, \dots, j_{m+n+1}; m_1, \dots, m_{m+2}; n_{m+3}, \dots, n_{m+n+4}), \tag{2.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=1, \dots, m+2}} \left(\prod_{i=1}^{m+2} t_{n_i, m_i}^{l_i}(A) \right) C(l_1, \dots, l_{m+2}; l_{m+3}, \dots, l_{m+n+4}; \\
&\quad j_1, \dots, j_{m+n+1}; n_1, \dots, n_{m+2}; m_{m+3}, \dots, m_{m+n+4}) = \\
&= \sum_{\substack{n_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=m+3, \dots, m+n+4}} \left(\prod_{i=m+3}^{m+n+4} t_{m_i, n_i}^{l_i}(A) \right) \times \\
&\quad \times C(l_1, \dots, l_{m+2}; l_{m+3}, \dots, l_{m+n+4}; j_1, \dots, j_{m+n+1}; \\
&\quad m_1, \dots, m_{m+2}; n_{m+3}, \dots, n_{m+n+4}). \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Согласно [8] (см. теорему 2.5), если обобщенные функции (2.21) в случае $m = n = 1$ удовлетворяют соотношению ковариантности (2.14), то

$$f_{m_1, m_2, m_3; \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3}^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2} (s_1) = f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2} (s_1) C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(\dot{l}_1, \dot{l}_2, l_3; \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3), \tag{2.26}$$

где непрерывная функция $f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2} (s_1)$ с носителем на положительной полуоси полиномиально ограничена.

Согласно [8] (см. теорему 2.5), если обобщенные функции (2.21) в случае $m \geq 2, n \geq 1$ удовлетворяют соотношению ковариантности (2.14), то

$$f_{m_1, \dots, m_{n+m+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+m+1}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+m+1}} (s_1, \dots, s_m) =$$

$$\begin{aligned}
 = & \sum_{j_1, \dots, j_{n+m-2}; j'_1, \dots, j'_{n+m-2} \in \mathbb{Z}_+/2} f_{j_1, \dots, j_{n+m-2}; j'_1, \dots, j'_{n+m-2}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(s_1, \dots, s_m) \times \\
 & \times C(l_1, \dots, l_{n+1}; l_{n+2}, \dots, l_{m+n+1}; j_1, \dots, j_{m+n-2}; \\
 & m_1, \dots, m_{n+1}; m_{n+2}, \dots, m_{m+n+1}) \times \\
 & \times C(\dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}; l_{n+2}, \dots, l_{m+n+1}; j'_1, \dots, j'_{m+n-2}; \\
 & \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}; \dot{m}_{n+2}, \dots, \dot{m}_{m+n+1}), \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

где непрерывная функция $f_{j_1, \dots, j_{n+m-2}; j'_1, \dots, j'_{n+m-2}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(s_1, \dots, s_m)$ с носителем в произведении положительных полуосей полиномиально ограничена.

Если подставить функции (2.26) в ряд (2.21) при $m = n = 1$, то этот ряд будет конечен в силу условия треугольника для коэффициентов Клебша–Гордана. Если подставить функции (2.27) в ряд (2.21) при $m \geq 2, n \geq 1$, то этот ряд может быть бесконечным. Необходимо выбрать функции $\phi(x_1, \dots, x_m)$, для которых ряд сходится. Можно построить [8] такой пример ряда (2.21), который не сходится для всех функций $\phi(x_1, \dots, x_m) \in S(\mathbb{R}^{4m})$. Подобный результат можно получить с помощью теоремы о конечной ковариантности [11], [12] или представления Йоста–Лемана–Дайсона. Мы предполагаем, что ряд (2.21) сходится для любой функции $\phi(x_1, \dots, x_m)$, преобразование Фурье которой

$$\tilde{\phi}(p_1, \dots, p_m) = \int d^{4m}x \exp\left\{i \sum_{j=1}^m (p_j, x_j)\right\} \phi(x_1, \dots, x_m) \tag{2.28}$$

принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^{4m})$. Для этих функций можно сформулировать свойства локальности и лоренц-ковариантности, однако нельзя сформулировать свойство спектральности.

3. РСТ-ИНВАРИАНТНОСТЬ, ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕСТАНОВОК И УСЛОВИЕ СПИНА

Определим вакуумные ожидания произведений квантовых полей так, чтобы действие группы перестановок имело простой вид. Рассмотрим векторы $p_{ij} = p_{ji} \in \mathbb{R}^4$, $1 \leq i < j \leq n+1$, $n = 1, 2, \dots$, и обобщенную функцию¹⁾

$$f(p_{ij}) \in S'(\mathbb{R}^{4 \cdot n(n+1)/2}), \quad 1 \leq i < j \leq n+1,$$

с носителем в произведении конусов (1.7). Обобщенная функция

$$\begin{aligned}
 \int d^{4n}p [*f](p_1, \dots, p_n) \phi(p_1, \dots, p_n) &= \int \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} d^4 p_{ij} \right) \times \\
 &\times f(p_{ij}) \phi \left(\sum_{1 < j \leq n+1} p_{1j}, \dots, \sum_{\substack{1 \leq i \leq k, \\ k < j \leq n+1}} p_{ij}, \dots, \sum_{1 \leq i \leq n} p_{i, n+1} \right) \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

¹⁾Здесь и далее мы используем сокращенную форму записи аргументов и индексов функций (см. обозначение (2.22)), указывая при этом диапазон изменения индексов i и j .

называется мультисверткой обобщенной функции $f(p_{ij})$.

Рассмотрим комплексные векторы $z_j \in \mathbb{C}^4$, $j = 1, \dots, n+1$, такие, что

$$\operatorname{Im}(z_{j+1} - z_j) \in V_+, \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$V_+ = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 > 0, (x, x) > 0\}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Im}(z_j - z_i) \in V_+, \quad 1 \leq i < j \leq n+1.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq k, \\ k < j \leq n+1}} p_{ij}, z_{k+1} - z_k \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (p_{ij}, z_j - z_i). \quad (3.2)$$

С помощью этого соотношения можно вычислить преобразование Фурье–Лапласа мультисвертки (3.1):

$$\begin{aligned} \int d^{4n} p [*f](p_1, \dots, p_n) \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n (p_k, z_{k+1} - z_k) \right\} = \\ = \int \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} d^4 p_{kj} \right) f(p_{kj}) \exp \left\{ i \sum_{1 \leq k < j \leq n+1} (p_{kj}, z_j - z_k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пусть функция-ступенька

$$\theta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ 0, & k = -1, -2, \dots, \end{cases} \quad (3.4)$$

является сужением на целые числа функции-ступеньки (2.17). Пусть π – перестановка натуральных чисел $1, \dots, n+1$. С помощью замены $i \rightarrow \pi(i)$, $j \rightarrow \pi(j)$ переменных суммирования получаем

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (p_{ij}, z_j - z_i) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j=1, \dots, n+1, \\ i \neq j}} (p_{ij}, (-1)^{\theta(i-j)} (z_j - z_i)) = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (p_{\pi(i)\pi(j)}, (-1)^{\theta(\pi(i)-\pi(j))} (z_{\pi(j)} - z_{\pi(i)})). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя эту формулу и делая замену переменных интегрирования $p_{\pi(i)\pi(j)} \rightarrow p_{ij}$, имеем

$$\begin{aligned} \int \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} d^4 p_{kj} \right) f(p_{\pi(k)\pi(j)}) \exp \left\{ i \sum_{1 \leq k < j \leq n+1} (p_{kj}, z_j - z_k) \right\} = \\ = \int \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} d^4 p_{kj} \right) f(p_{kj}) \times \end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ i \sum_{1 \leq k < j \leq n+1} (p_{kj}, (-1)^{\theta(\pi(k) - \pi(j))} (z_{\pi(j)} - z_{\pi(k)})) \right\}. \quad (3.6)$$

Правая часть этого равенства отличается от действия перестановки π на функцию (3.3) переменных $z_1, \dots, z_{n+1}$ лишь знаковыми множителями $(-1)^{\theta(\pi(i) - \pi(j))}$.

Рассмотрим обобщенные функции (1.4) для $n = 1$. Обобщенная функция (1.6) имеет вид, определяемый формулами (2.22), (2.26) при $m = n = 1$. Если полуцелые числа $l_2 = \dot{l}_1$, $\dot{l}_2 = l_1$, $l_3 = l_{12}$, $m_3 = m_{12}$, $\dot{m}_3 = \dot{m}_{12}$, то эта обобщенная функция является вакуумным ожиданием произведения оператора квантового поля и сопряженного оператора. Коэффициент Клебша–Гордана $C(l_1, \dot{l}_1, l_{12}; m_1, m_2, m_{12})$ отличен от нуля лишь в том случае, когда полуцелое число l_{12} равно одному из полуцелых чисел $|l_1 - \dot{l}_1|, |l_1 - \dot{l}_1| + 1, \dots, l_1 + \dot{l}_1 - 1, l_1 + \dot{l}_1$. Следовательно,

$$2l_{12} = 2l_1 + 2\dot{l}_1 = (2l_1 + 2\dot{l}_1)^2 = (2l_1 + 2\dot{l}_1)(2l_2 + 2\dot{l}_2) \pmod{2}. \quad (3.7)$$

Условие спина. Рассмотрим бесконечное число квантовых полей. Пусть множество натуральных чисел $1, \dots, n+1$ разбито на множества $A_1, \dots, A_N$. Элементы множества A_k суть номера мест частиц сорта k . Некоторые из множеств $A_1, \dots, A_N$ могут быть пусты. Каждому натуральному числу $i = 1, \dots, n+1$ сопоставлены такие полуцелые числа $l_i, \dot{l}_i \in \mathbb{Z}_+/2$; $m_i = -l_i, -l_i + 1, \dots, l_i - 1, l_i$; $\dot{m}_i = -\dot{l}_i, -\dot{l}_i + 1, \dots, \dot{l}_i - 1, \dot{l}_i$, что $l_i = l_j$, $\dot{l}_i = \dot{l}_j$, если натуральные числа i, j принадлежат одному множеству A_k .

Вакуумное ожидание произведения $n+1$, $n = 1, 2, \dots$, квантовых полей является обобщенной функцией²⁾

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{k=1}^{n+1} d^4 x_k \right) W_{m_k, \dot{m}_k}^{l_k, \dot{l}_k} (A_1, \dots, A_N; x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n) \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \\ & = \int \left(\prod_{1 \leq j < j' \leq n+1} d^4 p_{jj'} \right) F_{m_k, \dot{m}_k}^{l_k, \dot{l}_k} (A_1, \dots, A_N; p_{jj'}) \times \\ & \quad \times \int \left(\prod_{k=1}^{n+1} d^4 x_k \right) \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ k < j' \leq n+1}} p_{jj'}, x_{k+1} - x_k \right) \right\} \phi(x_1, \dots, x_{n+1}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где функция $\phi(x_1, \dots, x_{n+1}) \in D(\mathbb{R}^{4(n+1)})$. Обобщенная функция

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{1 \leq j < j' \leq n+1} d^4 p_{jj'} \right) F_{m_k, \dot{m}_k}^{l_k, \dot{l}_k} (A_1, \dots, A_N; p_{jj'}) \phi(p_{jj'}) = \\ & = \sum_{\substack{l_{ij} \in \mathbb{Z}_+/2, \\ 1 \leq i < j \leq n+1}} \sum_{\substack{m_{ij}, \dot{m}_{ij} = -l_{ij}, -l_{ij} + 1, \dots, l_{ij} - 1, l_{ij}, \\ 1 \leq i < j \leq n+1}} \int \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} d^4 p_{ij} \right) \times \end{aligned}$$

²⁾В сокращенных обозначениях типа $F_{m_k, \dot{m}_k}^{l_k, \dot{l}_k} (A_1, \dots, A_N; p_{jj'})$ индексы k, j и j' меняются в пределах $1 \leq k \leq n+1, 1 \leq j < j' \leq n+1$.

$$\begin{aligned} & \times f_{m_k, \dot{m}_k; m_{jj'}, \dot{m}_{jj'}}^{l_k, i_k; l_{jj'}}(A_1, \dots, A_N; (p_{jj'}, p_{jj'})) \times \\ & \times \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \theta(p_{ij}^0)(\partial_{p_{ij}}, \partial_{p_{ij}})^q t_{m_{ij} \dot{m}_{ij}}^{l_{ij}}(-\tilde{\partial}_{p_{ij}}) \right) \phi(p_{jj'}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

определена на функции $\phi(p_{jj'})$, преобразование Фурье которой принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^{2n(n+1)})$. Здесь q – натуральное число, (2×2) -матрица $\tilde{\partial}_x$ задана соотношением (2.18), многочлен $t_{mn}^l(A)$ определен в (2.4), а непрерывная функция

$$f_{m_k, \dot{m}_k; m_{jj'}, \dot{m}_{jj'}}^{l_k, i_k; l_{jj'}}(A_1, \dots, A_N; s_{jj'}) \quad (3.10)$$

с носителем в произведении положительных полусосей полиномиально ограничена. Четность любого целого числа $2l_{ij}$ в равенстве (3.9) задается соотношением

$$2l_{ij} = (2l_i + 2\dot{l}_i)(2l_j + 2\dot{l}_j) \pmod{2}, \quad 1 \leq i < j \leq n+1. \quad (3.11)$$

Любой член ряда (3.9) является обобщенной функцией из пространства $S'(\mathbb{R}^{2n(n+1)})$. Эта обобщенная функция имеет носитель в произведении замкнутых верхних световых конусов (1.7). Носитель бесконечного ряда (3.9) не определен.

Для того чтобы различать частицы с одинаковым спином, мы используем множества $A_1, \dots, A_N$. Это позволяет записать равенство, подобное равенству (1.12).

ТЕОРЕМА. Пусть для любой перестановки π натуральных чисел $1, \dots, n+1$ обобщенная функция (3.9) удовлетворяет соотношению

$$F_{m_{\pi(k)}, \dot{m}_{\pi(k)}}^{l_{\pi(k)}, i_{\pi(k)}}(\pi(A_1), \dots, \pi(A_N); p_{\pi(j)\pi(j')}) = F_{m_k, \dot{m}_k}^{l_k, i_k}(A_1, \dots, A_N; p_{jj'}). \quad (3.12)$$

Тогда для векторов $x_i \in \mathbb{R}^4$, $i = 1, \dots, n+1$, таких, что $(x_j - x_i, x_j - x_i) < 0$, $1 \leq i < j \leq n+1$, и любой перестановки π натуральных чисел $1, \dots, n+1$ обобщенная функция (3.8) удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} & (-1)^{\sigma_l(\pi)} W_{m_{\pi(i)}, \dot{m}_{\pi(i)}}^{l_{\pi(i)}, i_{\pi(i)}}(\pi(A_1), \dots, \pi(A_N); x_{\pi(2)} - x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n+1)} - x_{\pi(n)}) = \\ & = W_{m_i, \dot{m}_i}^{l_i, i_i}(A_1, \dots, A_N; x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n), \quad 1 \leq i \leq n+1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

где соотношение между спинами и статистикой задается числом

$$\sigma_l(\pi) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (2l_i + 2\dot{l}_i)(2l_j + 2\dot{l}_j) \theta(\pi(i) - \pi(j)) \pmod{2}. \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\phi(x_1, \dots, x_{n+1}) \in D(\mathbb{R}^{4(n+1)})$. Согласно определениям (3.8), (3.9) и соотношению (3.2)

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{k=1}^{n+1} d^4 x_k \right) W_{m_k, \dot{m}_k}^{l_k, i_k}(A_1, \dots, A_N; x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n) \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \\ & = \sum_{\substack{l_{kj} \in \mathbb{Z}_+/2, \quad m_{kj}, \dot{m}_{kj} = -l_{kj} + 1, \dots, l_{kj} - 1, l_{kj}, \\ 1 \leq k < j \leq n+1}} \sum_{\substack{l_{kj} \in \mathbb{Z}_+/2, \quad m_{kj}, \dot{m}_{kj} = -l_{kj} + 1, \dots, l_{kj} - 1, l_{kj}, \\ 1 \leq k < j \leq n+1}} \int \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} d^4 p_{kj} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times f_{m_k, \tilde{m}_k; m_{jj'}, \tilde{m}_{jj'}}^{l_k, i_k; l_{jj'}}(A_1, \dots, A_N; (p_{jj'}, p_{jj'})) \times \\
 & \times \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} \theta(p_{kj}^0) (\partial_{p_{kj}}, \partial_{p_{kj}})^{q_{t_{m_{kj} \tilde{m}_{kj}}}^{l_{kj}}} (-\tilde{\partial}_{p_{kj}}) \right) \times \\
 & \times \int d^{4(n+1)} x \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) \exp \left\{ i \sum_{1 \leq k < j \leq n+1} (p_{kj}, x_j - x_k) \right\}. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Используя теорему из [13] (см. раздел 26.3), получаем

$$\begin{aligned}
 & \int \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} d^4 p_{kj} \right) f_{m_k, \tilde{m}_k; m_{kj}, \tilde{m}_{kj}}^{l_k, i_k; l_{kj}}(A_1, \dots, A_N; (p_{kj}, p_{kj})) \times \\
 & \times \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} \theta(p_{kj}^0) (\partial_{p_{kj}}, \partial_{p_{kj}})^{q_{t_{m_{kj} \tilde{m}_{kj}}}^{l_{kj}}} (-\tilde{\partial}_{p_{kj}}) \right) \times \\
 & \times \int d^{4(n+1)} x \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) \exp \left\{ i \sum_{1 \leq k < j \leq n+1} (p_{kj}, x_j - x_k) \right\} = \\
 & = \lim_{\substack{\text{Im } z_k \rightarrow 0, \\ \text{Im}(z_j - z_k) \in V_+, \\ 1 \leq k < j \leq n+1}} \int \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} d^4 p_{kj} \right) f_{m_k, \tilde{m}_k; m_{jj'}, \tilde{m}_{jj'}}^{l_k, i_k; l_{jj'}}(A_1, \dots, A_N; (p_{jj'}, p_{jj'})) \times \\
 & \times \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} \theta(p_{kj}^0) (\partial_{p_{kj}}, \partial_{p_{kj}})^{q_{t_{m_{kj} \tilde{m}_{kj}}}^{l_{kj}}} (-\tilde{\partial}_{p_{kj}}) \right) \times \\
 & \times \int d^{4(n+1)} \text{Re } z \phi(\text{Re } z_1, \dots, \text{Re } z_{n+1}) \exp \left\{ i \sum_{1 \leq k < j \leq n+1} (p_{kj}, z_j - z_k) \right\}. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Пусть функция $f(s)$ с носителем на положительной полуоси полиномиально ограничена. Представим любой вектор $y \in V_+$ в виде

$$\tilde{y} = (y, y)^{1/2} g(t, z) g(t, z)^*, \quad g(t, z) = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ z & t \end{pmatrix},$$

где t – положительное число и z – комплексное число.

Делая замену переменных

$$\begin{aligned}
 \tilde{p} &= \mu^{1/2} g(t, z) u(\phi, \theta, \psi) ((\text{ch } s) \sigma^0 + (\text{sh } s) \sigma^3) u(\phi, \theta, \psi)^* g(t, z)^*, \\
 u(\phi, \theta, \psi) &= e^{i\phi\sigma^3/2} e^{i\theta\sigma^1/2} e^{i\psi\sigma^3/2}, \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
 & \int d^4 p \theta(p^0) f((p, p)) e^{-(p, y)} = \\
 & = 2\pi \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty ds \int_{SU(2)} du(\phi, \theta, \psi) \mu f(\mu) \text{sh}^2 s e^{-\mu^{1/2} (y, y)^{1/2} \text{ch } s}, \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

где

$$du(\phi, \theta, \psi) = \frac{1}{16\pi^2} \sin \theta d\theta d\phi d\psi$$

– нормированная мера Хаара на группе $SU(2)$ (см. [9], главу III, раздел 6.1). С помощью формул 7.12(21) и 7.11(25) из книги [14],

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty ds \operatorname{ch}(\nu s) e^{-z \operatorname{ch} s}, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (3.19)$$

$$K_{\nu+1}(z) - K_{\nu-1}(z) = 2\nu z^{-1} K_\nu(z), \quad (3.20)$$

можно переписать равенство (3.18) в виде

$$\int d^4 p \theta(p^0) f((p, p)) e^{-(p, y)} = 2\pi \int_0^\infty d\mu \mu f(\mu) (\mu(y, y))^{-1/2} K_1((\mu(y, y))^{1/2}). \quad (3.21)$$

Используем формулу 7.2.5(37) из [14], получим

$$\begin{aligned} \mu(\mu(y, y))^{-1/2} K_1((\mu(y, y))^{1/2}) &= \\ &= \frac{1}{2} \mu \ln \left(\frac{1}{2} (\mu(y, y))^{1/2} \right) \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m! (m+1)!} \left(\frac{1}{4} \mu(y, y) \right)^m = \\ &= \frac{1}{(y, y)} - \frac{1}{2^{3/2} \mu} \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{1}{4} \mu(y, y) \right)^m \frac{\psi(m+2) + \psi(m+1)}{m! (m+1)!}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $\psi(z) = d/dz(\ln \Gamma(z))$ – логарифмическая производная гамма-функции. При $-3\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ справедливо асимптотическое соотношение (см. [14], формулу 7.13(7))

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} (1 + O(|z|^{-1})). \quad (3.23)$$

В силу соотношений (3.22), (3.23) обе части равенства (3.21) имеют по переменной iy аналитическое продолжение в трубчатую область $\mathbb{R}^4 + iV_+$:

$$\int d^4 p \theta(p^0) f((p, p)) e^{i(p, z)} = 2\pi \int_0^\infty d\mu \mu f(\mu) (-\mu(z, z))^{-1/2} K_1((-\mu(z, z))^{1/2}), \quad (3.24)$$

где комплексный вектор $z = x + iy \in \mathbb{R}^4 + iV_+$.

Пусть компактный носитель функции $\phi(x_1, \dots, x_{n+1})$ лежит в области, задаваемой неравенствами $(x_j - x_i, x_j - x_i) < 0$, $1 \leq i < j \leq n+1$. Из формул (3.16), (3.22)–(3.24) следует, что

$$\begin{aligned} &\int \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} d^4 p_{kj} \right) f_{m_k, \dot{m}_k; m_{jj'}, \dot{m}_{jj'}}^{l_k, \dot{l}_k; l_{jj'}, \dot{l}_{jj'}}(A_1, \dots, A_N; (p_{jj'}, p_{jj'})) \times \\ &\quad \times \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} \theta(p_{kj}^0) (\partial_{p_{kj}}, \partial_{p_{kj}}) q t_{m_{kj} \dot{m}_{kj}}^{l_{kj}} (-\tilde{\partial}_{p_{kj}}) \right) \times \\ &\quad \times \int d^{4(n+1)} x \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) \exp \left\{ i \sum_{1 \leq k < j \leq n+1} (p_{kj}, x_j - x_k) \right\} = \\ &= \int d^{4(n+1)} x \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} \int_0^\infty \mu_{kj} d\mu_{kj} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{m_k, \tilde{m}_k; m_{jj'}, \tilde{m}_{jj'}}^{l_k, \tilde{l}_k; l_{jj'}, \tilde{l}_{jj'}} (A_1, \dots, A_N; \mu_{jj'}) \times \\
 & \times \prod_{1 \leq k < j \leq n+1} 2\pi (-(x_j - x_k, x_j - x_k))^q t_{m_k j \tilde{m}_k j}^{l_k j} (i(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j)) \times \\
 & \times (-\mu_{kj}(x_j - x_k, x_j - x_k))^{-1/2} K_1((-\mu_{kj}(x_j - x_k, x_j - x_k))^{1/2}). \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Подставим левую часть равенства (3.12) в правую часть равенства (3.8). В силу соотношений (3.6), (3.25) полученная обобщенная функция совпадает с левой частью равенства (3.13) при $(x_j - x_i, x_j - x_i) < 0$, $1 \leq i < j \leq n+1$ (многочлен (2.4) является однородным многочленом степени $2l$, а четность целого числа $2l_{ij}$ задается соотношением (3.11).) Теорема доказана.

Квантовое поле с номером i называется антикоммутирующим, если

$$2l_i + 2\tilde{l}_i = 1 \pmod{2}. \quad (3.26)$$

Это определение согласовано с соотношением (3.7). Множество чисел, соответствующих антикоммутирующим квантовым полям, обозначим через F . Из определений (3.14), (3.26) следует, что

$$\sigma_l(\pi) = \sum_{\substack{i, j \in F, \\ i \neq j}} \theta(\pi(i) - \pi(j)) \theta(j - i) \pmod{2}. \quad (3.27)$$

Согласно этому равенству множитель $(-1)^{\sigma_l(\pi)}$ в (3.13) совпадает со множителем $(-1)^M$ в (1.12). Этот множитель определяет одномерное представление группы перестановок натуральных чисел $1, \dots, n+1$, которые переводят множество F в себя.

ЛЕММА 3.1. Пусть перестановка λ натуральных чисел $1, \dots, n+1$ переводит множество F в себя. Тогда для любой перестановки π натуральных чисел $1, \dots, n+1$ справедливо следующее соотношение:

$$\sigma_l(\pi \circ \lambda) = \sigma_l(\pi) + \sigma_l(\lambda) \pmod{2}. \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых натуральных чисел $i, j \in F$, $i \neq j$, из определения (3.4) следует равенство

$$\theta(\lambda(i) - \lambda(j)) + \theta(\lambda(j) - \lambda(i)) = 1.$$

Отсюда, используя соотношение (3.27), получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_l(\pi \circ \lambda) &= \sum_{\substack{i, j \in F, \\ i \neq j}} \theta(\pi(\lambda(i)) - \pi(\lambda(j))) \theta(\lambda(j) - \lambda(i)) \theta(j - i) + \\
 &+ \sum_{\substack{i, j \in F, \\ i \neq j}} \theta(\pi(\lambda(i)) - \pi(\lambda(j))) \theta(\lambda(i) - \lambda(j)) \theta(j - i) \pmod{2}. \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Для любых натуральных чисел $i, j \in F$, $i \neq j$, справедливо равенство $\theta(j - i) = 1 + \theta(i - j) \pmod{2}$. Подставляя его в правую часть равенства (3.29), получаем

$$\sigma_l(\pi \circ \lambda) = \sum_{\substack{i, j \in F, \\ i \neq j}} \theta(\pi(\lambda(i)) - \pi(\lambda(j))) \theta(\lambda(j) - \lambda(i)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{i,j \in F, \\ i \neq j}} \theta(\pi(\lambda(i)) - \pi(\lambda(j))) \theta(\lambda(j) - \lambda(i)) \theta(i - j) + \\
& + \sum_{\substack{i,j \in F, \\ i \neq j}} \theta(\pi(\lambda(i)) - \pi(\lambda(j))) \theta(\lambda(i) - \lambda(j)) \theta(j - i) \pmod{2}. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Перестановка λ переводит множество F в себя. Пусть λ^{-1} – обратная перестановка. Сделаем замену переменных суммирования $i \rightarrow \lambda^{-1}(i)$, $j \rightarrow \lambda^{-1}(j)$ в первой сумме в правой части равенства (3.30) и замену $i \rightarrow j$, $j \rightarrow i$ во второй сумме. Тогда из формулы (3.30) и соотношения

$$\theta(\pi(\lambda(i)) - \pi(\lambda(j))) + \theta(\pi(\lambda(j)) - \pi(\lambda(i))) = 1$$

следует равенство (3.28). Лемма доказана.

Для перестановки $\tau(i) = n + 2 - i$, $i = 1, \dots, n + 1$, имеем

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (p_{ij}, (-1)^{\theta(\tau(i) - \tau(j))} (z_{\tau(j)} - z_{\tau(i)})) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq k, \\ k < j \leq n+1}} p_{ij}, z_{n+2-k} - z_{n+1-k} \right). \quad (3.31)$$

Предположим, что ряд (3.9) конечен. Тогда из равенств (3.8), (3.31) и соотношений (3.6), (3.12) для перестановки τ имеем

$$\begin{aligned}
& W_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(A_1, \dots, A_N; x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n) = \\
& = W_{m_{n+1}, \dots, m_1; \dot{m}_{n+1}, \dots, \dot{m}_1}^{l_{n+1}, \dots, l_1; \dot{l}_{n+1}, \dots, \dot{l}_1}(\tau(A_1), \dots, \tau(A_N); x_{n+1} - x_n, x_n - x_{n-1}, \dots, x_2 - x_1). \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Для того чтобы получить это равенство, мы использовали также тот факт, что обобщенная функция (3.8) является граничным значением преобразования Фурье–Лапласа мультисвертки (3.1) обобщенной функции (3.9) (см. [13], раздел 26.3).

Согласно [2] (см. соотношение (4–30)) вакуумное ожидание произведения $n + 1$ квантового поля является обобщенной функцией

$$W_{\mu \dots \nu}(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\Psi_0, \psi_\mu(x_1) \dots \psi_\nu(x_{n+1}) \Psi_0), \quad (3.33)$$

где $\xi_j = x_j - x_{j+1}$, $j = 1, \dots, n$. В силу теоремы 4–7 из [2] условие инвариантности относительно РСТ-преобразования имеет вид

$$(\Psi_0, \psi_\mu(x_1) \dots \psi_\nu(x_{n+1}) \Psi_0) = i^F (-1)^J (\Psi_0, \psi_\nu(-x_{n+1}) \dots \psi_\mu(-x_1) \Psi_0), \quad (3.34)$$

где множители $(-1)^J$ и i^F определяются следующими равенствами (см. [2], соотношения (4–32), (4–36)):

$$W_{\mu \dots \nu}(\xi_1, \dots, \xi_n) = (-1)^J W_{\mu \dots \nu}(-\xi_1, \dots, -\xi_n), \quad (3.35)$$

$$(\Psi_0, \psi_\mu(x_1) \dots \psi_\nu(x_{n+1}) \Psi_0) = i^F (\Psi_0, \psi_\nu(x_{n+1}) \dots \psi_\mu(x_1) \Psi_0). \quad (3.36)$$

Функция (3.33) голоморфна в точке $x_1, \dots, x_{n+1}$.

Докажем, что для конечного ряда (3.9) обобщенная функция, заданная формулами (3.8), (3.9), удовлетворяет соотношениям (3.35), (3.36), и множитель $i^F(-1)^J = 1$. Отсюда будет следовать, что РСТ-инвариантность соответствует соотношению (3.12) для перестановки $\tau(i) = n + 2 - i$, $i = 1, \dots, n + 1$.

В силу формул (3.23), (3.25) функция (3.8), (3.9) для конечного ряда (3.9) голоморфна в точке $x_1, \dots, x_{n+1}$, в которой $(x_j - x_i, x_j - x_i) < 0$, $1 \leq i < j \leq n + 1$. Тогда равенство (3.13) для перестановки τ соответствует соотношению (3.36). Множитель i^F задается равенством

$$i^F = (-1)^{\sigma_I(\tau)} = (-1)^{\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (2l_i + 2\dot{l}_i)(2l_j + 2\dot{l}_j)}. \quad (3.37)$$

Из (3.11), (3.25) следуют равенства

$$\begin{aligned} W_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(A_1, \dots, A_N; x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n) = \\ = (-1)^J W_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(A_1, \dots, A_N; -(x_2 - x_1), \dots, -(x_{n+1} - x_n)), \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$(-1)^J = (-1)^{\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (2l_i + 2\dot{l}_i)(2l_j + 2\dot{l}_j)}. \quad (3.39)$$

Формула (3.38) соответствует формуле (3.35). Множители (3.37), (3.39) удовлетворяют равенству $i^F(-1)^J = 1$.

Для произвольной перестановки π чисел $1, \dots, n + 1$ имеют место формула

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (p_{ij}, (-1)^{\theta(\pi(i) - \pi(j))} (z_{\pi(j)} - z_{\pi(i)})) = \\ = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n+1, \\ \pi(i) \leq k < \pi(j)}} p_{ij}, z_{k+1} - z_k \right) + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n+1, \\ \pi(j) \leq k < \pi(i)}} p_{ij}, z_{k+1} - z_k \right) \end{aligned}$$

и соотношение типа (3.32). Правая часть последнего равенства является преобразованием Фурье новой мультисвертки обобщенной функции (3.9).

Инвариантность относительно перестановок. Вакуумное ожидание произведения $n + 1$, $n = 1, 2, \dots$, квантового поля является обобщенной функцией (3.8), (3.9), где функции (3.10) удовлетворяют равенству

$$\begin{aligned} f_{m_{\pi(k)}, \dot{m}_{\pi(k)}; m_{\pi(i)\pi(j)}, \dot{m}_{\pi(i)\pi(j)}}^{l_{\pi(k)}, \dot{l}_{\pi(k)}; l_{\pi(i)\pi(j)}, \dot{l}_{\pi(i)\pi(j)}}(\pi(A_1), \dots, \pi(A_N); s_{\pi(i)\pi(j)}) = \\ = f_{m_k, \dot{m}_k; m_{ij}, \dot{m}_{ij}}^{l_k, \dot{l}_k; l_{ij}, \dot{l}_{ij}}(A_1, \dots, A_N; s_{ij}), \quad 1 \leq k \leq n + 1, \quad 1 \leq i < j \leq n + 1, \end{aligned} \quad (3.40)$$

для любой перестановки π натуральных чисел $1, \dots, n + 1$.

ЛЕММА 3.2. Из равенства (3.40) следует равенство (3.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $p_{ji} = p_{ij}$, $l_{ji} = l_{ij}$, $m_{ji} = m_{ij}$, $\dot{m}_{ji} = \dot{m}_{ij}$, для любой перестановки π натуральных чисел $1, \dots, n + 1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \theta(p_{ij}^0)(\partial_{p_{ij}}, \partial_{p_{ij}})^q t_{m_{ij}, \dot{m}_{ij}}^{l_{ij}, \dot{l}_{ij}}(-\tilde{\partial}_{p_{ij}}) = \\ = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \theta(p_{\pi(i)\pi(j)}^0)(\partial_{p_{\pi(i)\pi(j)}}, \partial_{p_{\pi(i)\pi(j)}})^q t_{m_{\pi(i)\pi(j)}, \dot{m}_{\pi(i)\pi(j)}}^{l_{\pi(i)\pi(j)}, \dot{l}_{\pi(i)\pi(j)}}(-\tilde{\partial}_{p_{\pi(i)\pi(j)}}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

С помощью этого равенства, делая замены переменных суммирования $l_{\pi(i)\pi(j)} \rightarrow l_{ij}$, $m_{\pi(i)\pi(j)} \rightarrow m_{ij}$, $\dot{m}_{\pi(i)\pi(j)} \rightarrow \dot{m}_{ij}$, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{l_{ij} \in \mathbb{Z}_+/2, \\ 1 \leq i < j \leq n+1}} \sum_{\substack{m_{ij}, \dot{m}_{ij} = -l_{ij}, -l_{ij}+1, \dots, l_{ij}-1, l_{ij}, \\ 1 \leq i < j \leq n+1}} \int \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} d^4 p_{ij} \right) \times \\ & \times \int_{m_{\pi(k)}, \dot{m}_{\pi(k)}, m_{\pi(i)\pi(j)}, \dot{m}_{\pi(i)\pi(j)}}^{l_{\pi(k)}, \dot{l}_{\pi(k)}, l_{\pi(i)\pi(j)}} \left(\pi(A_1), \dots, \pi(A_N); (p_{\pi(i)\pi(j)}, p_{\pi(i)\pi(j)}) \right) \times \\ & \times \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \theta(p_{ij}^0) (\partial_{p_{ij}}, \partial_{p_{ij}})^{q t_{m_{ij} \dot{m}_{ij}}} (-\tilde{\partial}_{p_{ij}}) \right) \phi(p_{ij}) = \\ & = \int \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} d^4 p_{ij} \right) F_{m_{\pi(k)}, \dot{m}_{\pi(k)}}^{l_{\pi(k)}, \dot{l}_{\pi(k)}} \left(\pi(A_1), \dots, \pi(A_N); p_{\pi(i)\pi(j)} \right) \phi(p_{ij}). \quad (3.42) \end{aligned}$$

Подставим в левую часть равенства (3.9) вместо функции (3.10) левую часть равенства (3.40). Полученная обобщенная функция совпадает с левой частью равенства (3.42). Таким образом, из (3.40), (3.42) следует равенство (3.12). Лемма доказана.

Лоренц-ковариантность. Вакуумное ожидание произведения $n+1$, $n = 1, 2, \dots$, квантового поля является обобщенной функцией (3.8), (3.9).

Для $n = 1$ функция (3.10) имеет вид

$$\begin{aligned} & f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2; m_{12}, \dot{m}_{12}}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2; l_{12}}(A_1, \dots, A_N; s_{12}) = f^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2; l_{12}}(A_1, \dots, A_N; s_{12}) \times \\ & \times C(l_1, l_2, l_{12}; m_1, m_2, m_{12}) C(\dot{l}_1, \dot{l}_2, l_{12}; \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_{12}), \quad (3.43) \end{aligned}$$

где непрерывная функция $f^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2; l_{12}}(A_1, \dots, A_N; s_{12})$ с носителем на положительной полусоси полиномиально ограничена, а коэффициент Клебша–Гордана задан формулой (2.8).

Для $n > 1$ функция (3.10) имеет вид

$$\begin{aligned} & f_{m_k, \dot{m}_k, m_{ij}, \dot{m}_{ij}}^{l_k, \dot{l}_k, l_{ij}}(A_1, \dots, A_N; s_{ij}) = \\ & = \sum_{j_1, \dots, j_{n(n+3)/2-2}; j'_1, \dots, j'_{n(n+3)/2-2} \in \mathbb{Z}_+/2} f_{j_q, j'_q}^{l_k, \dot{l}_k, l_{ij}}(A_1, \dots, A_N; s_{ij}) \times \\ & \times C(l_1, \dots, l_{n+1}; l_{ij}; j_1, \dots, j_{n(n+3)/2-2}; m_1, \dots, m_{n+1}; m_{ij}) \times \\ & \times C(\dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}; l_{ij}; j'_1, \dots, j'_{n(n+3)/2-2}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}; \dot{m}_{ij}), \quad (3.44) \end{aligned}$$

где непрерывная функция $f_{j_q, j'_q}^{l_k, \dot{l}_k, l_{ij}}(A_1, \dots, A_N; s_{ij})$ (здесь в верхних индексах и аргументе $1 \leq k \leq n+1$, $1 \leq k < j \leq n+1$, а в нижнем индексе $1 \leq q \leq n(n+3)/2-2$) с носителем в произведении положительных полусосей полиномиально ограничена, а обобщенный коэффициент Клебша–Гордана

$$\begin{aligned} & C(l_1, \dots, l_{n+1+2}; l_{n+1+3}, \dots, l_{n+1+n+2+4}; j_1, \dots, j_{n+1+n+2+1}; \\ & m_1, \dots, m_{n+1+2}; m_{n+1+3}, \dots, m_{n+1+n+2+4}) \end{aligned}$$

задан соотношением (2.23).

Из (2.12), (2.13) следует, что для $n = 1$ обобщенная функция (3.9) с функциями (3.43) удовлетворяет соотношению ковариантности (2.14). Из (2.24), (2.25) следует, что обобщенная функция (3.9) с функциями (3.44) удовлетворяет соотношению ковариантности (2.14). Для конечного ряда (3.9) в силу теоремы 2.5 из работы [8] равенства (3.43), (3.44) следуют из соотношения ковариантности (2.14) для обобщенной функции (3.9).

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ

В книге [2] доказано, что из аксиом Гординга–Вайтмана [1], в том числе из единственности вакуума, следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi_0, \psi_{\mu_1}(x_1) \dots \psi_{\mu_j}(x_j) \psi_{\mu_{j+1}}(x_{j+1} + ta) \psi_{\mu_{j+2}}(x_{j+2} + ta) \dots \psi_{\mu_n}(x_n + ta) \Psi_0 =$$

$$= (\Psi_0, \psi_{\mu_1}(x_1) \dots \psi_{\mu_j}(x_j) \Psi_0) (\Psi_0, \psi_{\mu_{j+1}}(x_{j+1}) \psi_{\mu_{j+2}}(x_{j+2}) \dots \psi_{\mu_n}(x_n) \Psi_0) \quad (4.1)$$

для $a \in \mathbb{R}^4$, $(a, a) < 0$. Сходимость в (4.1) определена в топологии пространства $S'(\mathbb{R}^{4n})$. Правая часть равенства (4.1) не зависит от вектора a . Иными словами, асимптотика вакуумного ожидания не зависит от угла рассеяния.

Рассмотрим асимптотическое поведение вакуумных ожиданий (3.8), (3.9). Следуя [15] (см. раздел 3.1), определим квазиасимптотику обобщенной функции. Пусть носитель обобщенной функции $f(x) \in S'(\mathbb{R})$ лежит на положительной полуоси. Обобщенная функция $f(x)$ имеет квазиасимптотику по отношению к преобразованиям $x \rightarrow t^{-1}x$ и функции $\rho(t) = t^{-\lambda}$, где λ – комплексное число, если в топологии пространства $S'(\mathbb{R})$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\lambda f(t^{-1}x) = g(x). \quad (4.2)$$

Этот предел характеризует асимптотическое поведение обобщенной функции $f(x)$ в нуле. Если мы выполним преобразование $x \rightarrow tx$, то такой предел будет характеризовать асимптотическое поведение обобщенной функции $f(x)$ на бесконечности. Мы можем заменить функцию $\rho(t) = t^{-\lambda}$ в (4.2) любой автомодельной функцией (см. [15], раздел 3.2).

В силу (4.2) обобщенная функция $g(x)$ является однородной функцией степени λ :

$$g(tx) = t^\lambda g(x), \quad t > 0. \quad (4.3)$$

Для $\text{Re } \lambda > -1$ любая однородная обобщенная функция $g(x) \in S'(\mathbb{R})$ степени λ с носителем на положительной полуоси имеет вид (см. [16], главу I, раздел 3.11)

$$g(x) = C \frac{\theta(x)x^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)}, \quad (4.4)$$

где C – постоянная, $\theta(x)$ – функция-ступенька (2.17) и $\Gamma(\lambda + 1)$ – гамма-функция. Согласно [16] (глава I, разделы 3.2, 3.5) функция (4.4) как функция переменной λ может быть аналитически продолжена до целой функции. Формула (4.4) справедлива для любого комплексного λ . Согласно [16] (см. главу I, раздел 3.5)

$$\left. \frac{\theta(x)x^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)} \right|_{\lambda = -n} = \delta^{(n-1)}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Вакуумные ожидания (3.8), (3.9) задаются непрерывными функциями (3.10). Квазиасимптотику непрерывной функции (3.10) определим как предел вида (4.2) в пространстве быстроубывающих непрерывных функций $\phi(x)$: для любого натурального числа m конечна норма

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + x^2)^m |\phi(x)|.$$

Пусть компактный носитель бесконечно дифференцируемой функции $\phi(x_1, \dots, x_{n+1})$ лежит в области, заданной неравенствами $(x_j - x_i, x_j - x_i) < 0$, $1 \leq i < j \leq n + 1$. Из соотношений (3.8), (3.9) и (3.15), (3.25) следует

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{k=1}^{n+1} d^4 x_k \right) W_{m_k, \dot{m}_k}^{l_k, i_k} (A_1, \dots, A_N; x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n) \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \\ &= \sum_{\substack{l_{kj} \in \mathbb{Z}_+/2, \quad m_{kj}, \dot{m}_{kj} = -l_{kj}, -l_{kj}+1, \dots, l_{kj}-1, l_{kj}, \\ 1 \leq k < j \leq n+1}} \sum_{1 \leq k < j \leq n+1} \int d^{4(n+1)} x \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) \times \\ & \times \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} \int_0^\infty d\mu_{kj} \mu_{kj} \right) f_{m_k, \dot{m}_k; m_{jj'}, \dot{m}_{jj'}}^{l_k, i_k; l_{jj'}, i_{jj'}} (A_1, \dots, A_N; \mu_{jj'}) \times \\ & \times \prod_{1 \leq k < j \leq n+1} 2\pi(-(x_j - x_k, x_j - x_k))^q t_{m_{kj}, \dot{m}_{kj}}^{l_{kj}} (i(\tilde{x}_k - \tilde{x}_j)) \times \\ & \times (-\mu_{kj}(x_j - x_k, x_j - x_k))^{-1/2} K_1((-\mu_{kj}(x_j - x_k, x_j - x_k))^{1/2}). \quad (4.6) \end{aligned}$$

Асимптотическое условие. Вакуумное ожидание произведения $n + 1$, $n = 1, 2, \dots$, квантового поля является обобщенной функцией (3.8), (3.9).

Для любых натуральных чисел $n > n_1$, любой перестановки λ натуральных чисел $1, \dots, n + 1$ и любой непрерывной быстроубывающей функции $\phi(\mu_{ij})$, $1 \leq i < j \leq n + 1$, функция (3.10) удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n_1+1, \\ n_1+1 < i < j \leq n+1}} \int_0^\infty d\mu_{\lambda(i)\lambda(j)} \right) \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq n_1+1, \\ n_1+1 < j \leq n+1}} \int_0^\infty t^{q-2+l_{\lambda(i)\lambda(j)}} d\mu_{\lambda(i)\lambda(j)} \right) \times \\ & \times f_{m_k, \dot{m}_k; m_{ij}, \dot{m}_{ij}}^{l_k, i_k; l_{ij}, i_{ij}} (A_1, \dots, A_N; \mu_{\lambda(i')\lambda(j')}, \mu_{\lambda(i'')\lambda(j'')}, t^{-1} \mu_{\lambda(i''')\lambda(j''')}) \phi(\mu_{ij}) = \\ &= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \int_0^\infty d\mu_{ij} \right) \text{as}(f)_{m_k, \dot{m}_k; m_{ij}, \dot{m}_{ij}}^{l_k, i_k; l_{ij}, i_{ij}} (\lambda; A_1, \dots, A_N; \mu_{ij}) \phi(\mu_{ij}), \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 \leq k \leq n + 1, \quad 1 \leq i < j \leq n + 1, \quad 1 \leq i' < j' \leq n_1 + 1 < i'' < j'' \leq n + 1, \\ & 1 \leq i''' \leq n_1 + 1 < j''' \leq n + 1, \end{aligned}$$

где непрерывная функция

$$\text{as}(f)_{m_k, \dot{m}_k; m_{ij}, \dot{m}_{ij}}^{l_k, i_k; l_{ij}, i_{ij}} (\lambda; A_1, \dots, A_N; \mu_{ij}) \quad (4.8)$$

полиномиально ограничена.

ЛЕММА 4.1. Пусть вакуумное ожидание произведения $n + 1$, $n = 1, 2, \dots$, квантового поля является обобщенной функцией (3.8), (3.9) с конечным рядом. Пусть

непрерывные функции (3.10) удовлетворяют условию (4.7). Пусть компактный носитель бесконечно дифференцируемой функции $\phi(x_{\lambda(i)})$, $1 \leq i \leq n+1$, лежит в области $(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(i)}, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(i)}) < 0$, $1 \leq i < j \leq n_1+1$, $n_1+1 < i < j \leq n+1$. Тогда для любых натуральных чисел $n > n_1$, любой перестановки λ натуральных чисел $1, \dots, n+1$ и любого вектора $a \in \mathbb{R}^4$, $(a, a) < 0$, справедливо равенство

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow \infty} \int d^{4(n+1)} x W_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(A_1, \dots, A_N; x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n) \times \\
 & \quad \times \phi(x_{\lambda(i')}, x_{\lambda(i'')} - ta) = \sum_{\substack{l_{kj} \in \mathbb{Z}_+/2, \\ 1 \leq k < j \leq n+1}} \sum_{\substack{m_{kj}, \dot{m}_{kj} = -l_{kj}, -l_{kj}+1, \dots, l_{kj}-1, l_{kj}, \\ 1 \leq k < j \leq n+1}} \times \\
 & \quad \times \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq n_1+1, \\ n_1+1 < j \leq n+1}} (- (a, a))^{-l_{\lambda(k)\lambda(j)}} t_{m_{\lambda(k)\lambda(j)} \dot{m}_{\lambda(k)\lambda(j)}}^{l_{\lambda(k)\lambda(j)}} (-i\tilde{a}) \right) \times \\
 & \quad \times \left(\prod_{\substack{1 \leq k < j \leq n_1+1, \\ n_1+1 < k < j \leq n+1}} \int_0^\infty \mu_{\lambda(k)\lambda(j)} d\mu_{\lambda(k)\lambda(j)} \right) \int d^{4(n+1)} x \phi(x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(n+1)}) \times \\
 & \quad \times S_{m_k, \dot{m}_k; m_{qj}, \dot{m}_{qj}}^{l_k, \dot{l}_k; l_{qj}, \dot{l}_{qj}}(\lambda; A_1, \dots, A_N; \mu_{\lambda(k')\lambda(j')}, \mu_{\lambda(k'')\lambda(j'')}) \times \\
 & \quad \times \prod_{\substack{1 \leq k < j \leq n_1+1, \\ n_1+1 < k < j \leq n+1}} (2\pi(-(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}))^q) \times \\
 & \quad \times t_{m_{\lambda(k)\lambda(j)} \dot{m}_{\lambda(k)\lambda(j)}}^{l_{\lambda(k)\lambda(j)}} (i(\tilde{x}_{\lambda(k)} - \tilde{x}_{\lambda(j)})) \times \\
 & \quad \times (-\mu_{\lambda(k)\lambda(j)}(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}))^{-1/2} \times \\
 & \quad \times K_1((-\mu_{\lambda(k)\lambda(j)}(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}))^{1/2}), \tag{4.9} \\
 & 1 \leq k \leq n+1, \quad 1 \leq q < j \leq n+1, \quad 1 \leq i' \leq n_1+1 < i'' \leq n+1, \\
 & 1 \leq k' < j' \leq n_1+1 < k'' < j'' \leq n+1,
 \end{aligned}$$

где функция

$$\begin{aligned}
 & S_{m_i, \dot{m}_i; m_{ij}, \dot{m}_{ij}}^{l_i, \dot{l}_i; l_{ij}, \dot{l}_{ij}}(\lambda; A_1, \dots, A_N; \mu_{\lambda(i)\lambda(j)}) = \\
 & = \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq n_1+1, \\ n_1+1 < j \leq n+1}} \int_0^\infty d\mu_{\lambda(i)\lambda(j)} \right) \text{as}(f)_{m_i, \dot{m}_i; m_{ij}, \dot{m}_{ij}}^{l_i, \dot{l}_i; l_{ij}, \dot{l}_{ij}}(\lambda; A_1, \dots, A_N; \mu_{ij}) \times \\
 & \quad \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq n_1+1, \\ n_1+1 < j \leq n+1}} 2\pi(\mu_{\lambda(i)\lambda(j)})^{1/2} K_1((\mu_{\lambda(i)\lambda(j)})^{1/2}). \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть компактный носитель бесконечно дифференцируемой функции $\phi(x_{\lambda(i)})$, $1 \leq i \leq n+1$, лежит в области $(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(i)}, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(i)}) < 0$, $1 \leq i < j \leq n_1+1$, $n_1+1 < i < j \leq n+1$. Тогда в силу соотношения (4.6) для

достаточно большого числа t и любого вектора $a \in \mathbb{R}^4$, $(a, a) < 0$ получаем

$$\begin{aligned} & \int d^{4(n+1)} x W_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(A_1, \dots, A_N; x_2 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_n) \times \\ & \quad \times \phi(x_{\lambda(i')}, x_{\lambda(i'')} - ta) = \sum_{\substack{l_{kj} \in 1/2\mathbb{Z}_+, \\ 1 \leq k < j \leq n+1}} m_{kj}, \dot{m}_{kj} = -l_{kj}, -l_{kj}+1, \dots, l_{kj}-1, l_{kj}, \\ & \quad \sum_{1 \leq k < j \leq n+1} \times \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n+1} \int_0^\infty \mu_{kj} d\mu_{kj} \right) f_{m_k, \dot{m}_k; m_{jj'}, \dot{m}_{jj'}}^{l_k, \dot{l}_k; l_{jj'}, \dot{l}_{jj'}}(A_1, \dots, A_N; \mu_{jj'}) \times \\ & \quad \times \int d^{4(n+1)} x \phi(x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(n+1)}) G(x, \mu, a) H(x, \mu), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$1 \leq i' \leq n_1 + 1 < i'' \leq n + 1,$$

$$\begin{aligned} G(x, \mu, a) &= \prod_{\substack{1 \leq k \leq n_1+1, \\ n_1+1 < j \leq n+1}} (2\pi(-(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)} + ta, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)} + ta))^q) \times \\ & \quad \times t_{m_{\lambda(k)\lambda(j)} \dot{m}_{\lambda(k)\lambda(j)}}^{l_{\lambda(k)\lambda(j)}} (i(\tilde{x}_{\lambda(k)} - \tilde{x}_{\lambda(j)} - t\tilde{a})) \times \\ & \quad \times (-\mu_{\lambda(k)\lambda(j)}(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)} + ta, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)} + ta))^{-1/2} \times \\ & \quad \times K_1((- \mu_{\lambda(k)\lambda(j)}(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)} + ta, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)} + ta))^{1/2}), \\ H(x, \mu) &= \prod_{\substack{1 \leq k < j \leq n_1+1, \\ n_1+1 < k < j \leq n+1}} (2\pi(-(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}))^q) \times \\ & \quad \times t_{m_{\lambda(k)\lambda(j)} \dot{m}_{\lambda(k)\lambda(j)}}^{l_{\lambda(k)\lambda(j)}} (i(\tilde{x}_{\lambda(k)} - \tilde{x}_{\lambda(j)})) \times \\ & \quad \times (-\mu_{\lambda(k)\lambda(j)}(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}))^{-1/2} \times \\ & \quad \times K_1((- \mu_{\lambda(k)\pi(j)}(x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}, x_{\lambda(j)} - x_{\lambda(k)}))^{1/2}). \end{aligned}$$

Ряды в правой части равенства (4.11) конечны. Если вектор $x \in \mathbb{R}^4$ лежит в компактном множестве в области $(x, x) < 0$, то в силу соотношения (3.23) функция

$$\mu(-\mu(x, x))^{-1/2} K_1((-\mu(x, x))^{1/2})$$

переменной μ быстро убывает на положительной полуоси. Заменим число t числом $t(-(a, a))^{-1/2}$. Тогда из соотношений (4.7), (4.11) следует (4.9). Лемма доказана.

Правая часть равенства (4.9) зависит от вектора a . Иными словами, асимптотика вакуумного ожидания зависит от угла рассеяния, и это кажется физически обоснованным.

Пусть функция (4.10) отлична от нуля лишь для спинов $l_{\lambda(i)\lambda(j)} = 0$, $1 \leq i \leq n_1 + 1$, $n_1 + 1 < j \leq n + 1$, и для этих спинов

$$\begin{aligned} & S_{m_k, \dot{m}_k; m_{ij}, \dot{m}_{ij}}^{l_k, \dot{l}_k; l_{ij}}(\lambda; A_1, \dots, A_N; \mu_{\pi(i')\pi(j')}, \mu_{\pi(i'')\pi(j'')}) = \\ & = f_{m_{\lambda(k')}, \dot{m}_{\lambda(k')}; m_{\lambda(i')\lambda(j')}, \dot{m}_{\lambda(i')\lambda(j')}}^{l_{\lambda(k')}, \dot{l}_{\lambda(k')}; l_{\lambda(i')\lambda(j')}}(\lambda(A_1^{(1)}), \dots, \lambda(A_{N_1}^{(1)}); \mu_{\lambda(i')\lambda(j')}) \times \\ & \quad \times f_{m_{\lambda(k'')}, \dot{m}_{\lambda(k'')}; m_{\lambda(i'')\lambda(j'')}, \dot{m}_{\lambda(i'')\lambda(j'')}}^{l_{\lambda(k'')}, \dot{l}_{\lambda(k'')}; l_{\lambda(i'')\lambda(j'')}}(\lambda(A_1^{(2)}), \dots, \lambda(A_{N_2}^{(2)}); \mu_{\lambda(i'')\lambda(j'')}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$1 \leq k \leq n+1, \quad 1 \leq i < j \leq n+1, \quad 1 \leq k' \leq n_1+1, \quad n_1+1 < k'' \leq n+1, \\ 1 \leq i' < j' \leq n_1+1, \quad n_1+1 < i'' < j'' \leq n+1.$$

Подстановка функции (4.12) в (4.9) дает соотношение типа (4.1).

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 07-01-00144) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-795.2008.1).

Список литературы

- [1] A. S. Wightman, L. Gårding, *Ark. Fys.*, **28** (1965), 129–189.
- [2] Р. Стритер, А. С. Вайтман, *PCT, спин и статистика и все такое*, Наука, М., 1966.
- [3] Р. Йост, *Общая теория квантованных полей*, Мир, М., 1967.
- [4] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [5] P. D. Methée, *Comment. Math. Helv.*, **28**:1 (1954), 225–269.
- [6] L. Gårding, J. L. Lions, *Nuovo Cimento*, **14**:1 (1959), 9–66, Suppl..
- [7] Yu. M. Zinoviev, *Comm. Math. Phys.*, **47**:1 (1976), 33–42.
- [8] Ю. М. Зиновьев, *ТМФ*, **156**:3 (2008), 328–350.
- [9] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1965.
- [10] J. Bros, H. Epstein, V. Glaser, *Comm. Math. Phys.*, **6**:2 (1967), 77–100.
- [11] Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, *Научн. докл. высшей школы. Физ.-мат. науки*, **3** (1958), 26–35.
- [12] Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, *Научн. докл. высшей школы. Физ.-мат. науки*, **2** (1959), 179–179.
- [13] В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.
- [14] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1966.
- [15] В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, М., 1986.
- [16] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев, *Обобщенные функции и действия над ними*, Вып. 1, Физматлит, М., 1959.

Поступила в редакцию 07.05.2007,
после доработки 11.02.2008