Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бабурова, В. Ч. Жуковский, Б. Н. Фролов, Модель пространства-времени Вейля–Картана на основе калибровочного принципа, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 1, 64–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:18:41

© 2008 г. О. В. Бабурова*, В. Ч. Жуковский[†], Б. Н. Фролов*

МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ВЕЙЛЯ–КАРТАНА НА ОСНОВЕ КАЛИБРОВОЧНОГО ПРИНЦИПА

Построена модель пространства-времени с геометрической структурой пространства Вейля–Картана на основе требования выполнения для пространственно-временного многообразия принципа калибровочной инвариантности для группы Пуанкаре–Вейля. Показано, что в этом случае в качестве калибровочных (“компенсирующих”) полей необходимо ввести поля трех типов: лоренцево, трансляционное и дилатационное. Тетрадные коэффициенты при этом представляют собой функции от этих калибровочных полей. Предложена геометрическая интерпретация скалярного поля Дирака. Получены общие уравнения калибровочных полей, источниками которых являются тензор энергии-импульса, полный момент и полный дилатационный ток внешнего поля. Рассмотрен пример прямого взаимодействия калибровочного поля с орбитальным моментом спинорного поля. Предложен лагранжиан гравитационного поля относительно калибровочно-инвариантных преобразований группы Пуанкаре–Вейля.

Ключевые слова: калибровочное поле, группа Пуанкаре–Вейля, теорема Нётер, пространство Вейля–Картана, дилатационный ток.

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно Эрлангенской программе Клейна свойства пространства определяются глобальным заданием действия группы (называемой по терминологии Картана [1] фундаментальной группой данного пространства), которая определяет геометрию пространства как систему инвариантов, т.е. тех соотношений и геометрических образов, которые остаются неизменными в пространстве при действии данной группы (см. [2], с. 13). Для пространства Минковского фундаментальной группой служит группа Пуанкаре $\mathcal{P}$. Однако в пространстве-времени $\mathcal{M}$, заполненном только электромагнитным излучением и ультрарелятивистскими частицами, фундаментальная

*Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия.

E-mail: baburova@orc.ru, frolovbn@mail.ru

[†]Московский государственный университет им М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: zhukovsk@phys.msu.ru

группа расширяется до группы Пуанкаре–Вейля $\mathcal{PW}$. В группе $\mathcal{PW}$ преобразования из группы Пуанкаре (четырёхмерные вращения и трансляции) дополнены дилатациями (расширениями и сжатиями) пространства-времени. Возникающее в этом случае пространство уместно назвать пространством Минковского–Вейля. Оно имеет структуру плоского пространства в силу того, что тензоры кривизны, кручения и неметричности равны нулю во всем пространстве.

Хорошо известно, что принцип калибровочной симметрии лежит в основе введения любого взаимодействия в современной теоретической физике [3], [4]. Применение калибровочного подхода к гравитационным взаимодействиям было развито в [5]–[7] для группы Лоренца и в [8]–[12] для группы Пуанкаре (см. обзоры [13]–[17], а также [18], [19], монографию [20] и цитируемую там литературу). Тем не менее вплоть до настоящего времени не ослабевает интерес к калибровочной трактовке гравитационного взаимодействия (см., например, [16]–[25]). Первая калибровочная теория была предложена еще в 1918 г. Вейлем [26], который ввел калибровочное поле, соответствующее группе локальных изменений масштабов, производимых произвольным образом в каждой точке пространства-времени. Изменение масштабов длины математически эквивалентно растяжению или сжатию (дилатациям) пространства. Присоединение группы дилатаций к группе Пуанкаре приводит к расширению группы Пуанкаре до группы Пуанкаре–Вейля. Построению калибровочной теории группы Пуанкаре–Вейля были посвящены работы [27], [28]. Характерная особенность этих работ заключается в представлении, что калибровочными полями для группы трансляций являются тетрады h^a_μ [8]. Известно, однако, что тетрады преобразуются как тензоры по обоим своим индексам, тетрадным и координатным [14], и этим отличаются от калибровочных полей другой природы, например электромагнитного поля или полей Янга–Миллса, которые рассматриваются как своеобразные “компенсирующие” поля с соответствующим законом преобразования (см., например, [3], [29], [30]).

В настоящей работе, следуя [9], [10], [20], мы строим модель калибровочной теории для группы Пуанкаре–Вейля на основе введения калибровочных полей для групп, связанных с преобразованиями пространственно-временных координат. При этом используются первая и вторая теоремы Нётер, что позволяет вводить калибровочные поля, динамически реализующие соответствующие законы сохранения. При таком подходе тетрады h^a_μ представляют собой некоторые функции от вводимых нами калибровочных (“компенсирующих”) полей. В работах [31], [32] было показано, что поле Дирака $\beta(x)$ [33] является необходимой компонентой геометрической схемы пространства Вейля–Картана, и на этой основе была построена единая теория Вейля–Дирака гравитации и электромагнетизма [31], в которой уравнения электромагнитного поля аналогичны уравнениям теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау. В данной работе скалярное поле Дирака $\beta(x)$ вводится в рамках общей калибровочной процедуры и получает естественную геометрическую интерпретацию. В то же время в работах [27], [28] это поле вводится как дополнительная структура, не связанная с калибровочной процедурой. Скалярное поле Дирака $\beta(x)$ играет существенную роль при построении предлагаемого лагранжиана гравитаци-

онного поля. Значительно большее внимание, чем в работе [23], уделено анализу источников калибровочного поля. В частности, показано, что, как следствие развитой теории, в качестве источников калибровочного поля, вводимого при локализации группы Пуанкаре–Вейля, наряду со спиновым моментом и собственным дилатационным током возникают также орбитальный угловой момент и орбитальный дилатационный ток внешнего поля. Рассмотрен пример прямого взаимодействия калибровочного поля с орбитальным моментом спинорного поля. Кроме того, в данной работе, в отличие от [23], дано доказательство эквивалентности вариационных уравнений калибровочных полей с указанными источниками и уравнений, получаемых в пространстве Вейля–Картана при варьировании по компонентам связности. Появление в качестве источника калибровочного поля орбитального углового момента приобретает актуальность в связи с недавним предложением [25] использовать космический эксперимент с гироскопом для оценки возможного влияния кручения на объекты в Солнечной системе. Движение гироскопа может быть использовано для детектирования кручения, если существует прямое взаимодействие кручения с моментом импульса гироскопа, который представляет собой сумму орбитальных угловых моментов всех его частей.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 излагается калибровочная теория для группы Пуанкаре–Вейля: формулируются четыре исходных постулата теории, из основных принципов выводится вид калибровочно-инвариантного лагранжиана взаимодействия внешнего и калибровочного полей, а также вид калибровочно-инвариантного лагранжиана свободного калибровочного поля. В разделе 3 для калибровочно-инвариантного лагранжиана общего вида выводятся общие уравнения калибровочного поля, источниками которых являются тензор энергии-импульса, полный момент и полный дилатационный ток внешнего поля. В разделе 4 приводится геометрическая интерпретация теории и показывается, что при локализации группы Пуанкаре–Вейля возникает пространство с геометрией Вейля–Картана. Здесь же предложен лагранжиан гравитационного поля, инвариантный относительно калибровочно-инвариантных преобразований группы Пуанкаре–Вейля, позволяющий динамически реализовать все калибровочные поля предлагаемой калибровочной теории гравитационного поля. В разделе 5 обсуждаются основные результаты работы.

2. КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ДЛЯ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ–ВЕЙЛЯ

В пространстве-времени Минковского–Вейля может быть выбрана специальная система координат x^i (аналогичная декартовой системе координат в пространстве Минковского), в которой компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{ij} = \beta^2 g_{ij}^M, \quad \beta = \text{const}, \quad (2.1)$$

где $g_{ij}^M = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ – метрический тензор пространства Минковского. В этой системе координат бесконечно малые преобразования группы $\mathcal{PW}(\omega, \varepsilon, a)$ будут за-

даны следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned} \delta x^i &= \omega^m I_m^i{}_j x^j - \varepsilon x^i + a^i = -(\omega^m \overset{\circ}{M}_m + \varepsilon \overset{\circ}{D} + a^k P_k) x^i, \\ \overset{\circ}{M}_m &= -I_m^l{}_j x^j \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad \overset{\circ}{D} = x^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad P_k = -\delta_k^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\overset{\circ}{M}_m$ – генераторы лоренцевых поворотов (шесть компонент, обозначаемые в дальнейшем индексами m, n, p, q), $\overset{\circ}{D}$ – генератор дилатаций, а P_k – генераторы трансляций (четыре компоненты, обозначаемые в дальнейшем индексами i, j, k, l). Справедливы следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [\overset{\circ}{M}_m, \overset{\circ}{M}_n] &= c_m^p{}_n \overset{\circ}{M}_p, & [\overset{\circ}{M}_m, P_k] &= I_m^j{}_k P_j, \\ [P_k, P_j] &= 0, & [\overset{\circ}{M}_m, \overset{\circ}{D}] &= 0, & [P_k, \overset{\circ}{D}] &= P_k, & [\overset{\circ}{D}, \overset{\circ}{D}] &= 0. \end{aligned}$$

Введем обобщенное обозначение $\omega = \{\omega^m, \varepsilon, a^k\}$ для совокупности параметров преобразований поворотов ω^m , дилатаций ε и сдвигов a^k . При этом умножение на ω всегда будет предполагать скрытое суммирование по указанному набору индексов. Тогда преобразование (2.2) удобно представить в виде

$$\delta x^i = (\omega X)^i = \omega^m X_m^i + \varepsilon X^i + a^k X_k^i, \quad (2.3)$$

где

$$X_m^i = I_m^i{}_j x^j, \quad X^i = -x^i, \quad X_k^i = \delta_k^i. \quad (2.4)$$

Пусть на пространстве $\mathcal{M}$ задано произвольное многокомпонентное поле с компонентами ψ^A , инфинитезимальное преобразование которого под действием группы $\mathcal{PW}(\omega, \varepsilon, a)$ имеет вид

$$\delta \psi^A = \omega^m I_m^A{}_B \psi^B - \varepsilon w \psi^A, \quad (2.5)$$

где w – вес поля ψ^A под действием подгруппы дилатаций D_4 (каноническая размерность поля), при этом подразумевается, что подгруппа трансляций не преобразует поля ψ^A . Операторы $I_m^A{}_B$ удовлетворяют соотношениям коммутации:

$$I_m^A{}_C I_n^C{}_B - I_n^A{}_C I_m^C{}_B = c_m^q{}_n I_q^A{}_B.$$

Действие группы $\mathcal{PW}$ на метрический тензор в соответствии с (2.1) происходит следующим образом:

$$\delta g_{ij} = 2\varepsilon g_{ij}. \quad (2.6)$$

Первоначально параметры $\omega = \{\omega^m, \varepsilon, a^k\}$ преобразований группы (2.2) предполагаются постоянными во всем пространстве-времени. Калибровочный принцип требует, чтобы была построена теория, инвариантная относительно расширения группы $\mathcal{PW}$ до группы $\mathcal{PW}(x)$, параметры которой ω являются уже произвольными функциями координат пространства-времени, $\omega = \omega(x)$. При этом выясняется, что величина β также становится произвольной функцией координат, $\beta = \beta(x)$.

Калибровочная теория группы $\mathcal{PW}(x)$ строится на основании четырех постулатов.

ПОСТУЛАТ 1 (принцип локальной инвариантности). Интеграл действия

$$J = \int_{\Omega} dx \mathcal{L}(\psi^A, P_k \psi^A, A_a^R, P_k A_a^R, \beta(x), P_k \beta(x)), \quad (2.7)$$

где лагранжева плотность $\mathcal{L}$ описывает поле ψ^A , калибровочное поле A_a^R и взаимодействие полей ψ^A и A_a^R , инвариантен относительно локализованной группы $\mathcal{PW}(x)$, под действием которой калибровочное поле преобразуется следующим образом:

$$\delta A_a^R = U_a^R \omega + S_a^{R\mu} \partial_{\mu} \omega, \quad (2.8)$$

где U и S – некоторые матричные функции.

ПОСТУЛАТ 2 (возможность независимого существования калибровочного поля). Полная лагранжева плотность $\mathcal{L}$ физической системы аддитивно зависит от локально инвариантной лагранжевой плотности $\mathcal{L}_0$ свободного калибровочного поля: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\psi}$, где

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(A_a^R, P_k A_a^R, \beta(x), P_k \beta(x)), \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi^A} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial P_k \psi^A} = 0,$$

$\mathcal{L}_{\psi}$ – лагранжева плотность взаимодействия.

ПОСТУЛАТ 3 (принцип минимальности калибровочного взаимодействия). В лагранжевой плотности взаимодействия $\mathcal{L}_{\psi}$ материального поля ψ^A с калибровочными полями A_a^R присутствуют производные только от материального поля ψ^A . Тем самым выполняются условия

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial P_k A_a^R} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial P_k \beta} = 0.$$

ПОСТУЛАТ 4 (принцип наименьшего действия). Уравнения полей ψ^A , A_a^R и $\beta(x)$ реализуют экстремум интеграла действия (2.7).

Представим калибровочное поле A_a^R как совокупность трех компонент:

$$A_a^R = \{A_a^m, A_a, A_a^k\},$$

где A_a^m – калибровочное поле, соответствующее подгруппе четырехмерных вращений (r -поле), A_a – калибровочное поле подгруппы дилатаций (d -поле), A_a^k – калибровочное поле подгруппы трансляций (t -поле) группы Пуанкаре–Вейля. Принятые постулаты позволяют применить первую и вторую теоремы Нётер к группе $\mathcal{PW}(x)$ и достаточны для того, чтобы определить структуру лагранжевой плотности $\mathcal{L}$ и вид матричных функций U , S . Проблему решают следующие две теоремы [23].

ТЕОРЕМА 1 (структура лагранжиана взаимодействия). *Существует калибровочное поле A_a^R со структурой преобразования (2.8) под действием локализованной группы $\mathcal{PW}(x)$ и существуют функция калибровочных полей Z и матричные функции калибровочных полей U и S такие, что лагранжева плотность*

$$\mathcal{L}_{\psi} = \sqrt{|g|} L_{\psi}(\psi^A, D_a \psi^A, \beta(x)), \quad \sqrt{|g|} = Z \sqrt{|g|^{\circ}}, \quad (2.9)$$

образованная из инвариантной относительно нелокализованной группы $\mathcal{PW}$ лагранжевой плотности $L(\psi^A, P_k \psi^A)$ путем замены дифференциального оператора $P_k \psi^A$ на оператор калибровочной производной $D_a \psi^A$, удовлетворяет принципу локальной инвариантности относительно локализованной группы $\mathcal{PW}(x)$. При этом справедлива формула: $A_a^k = D_a x^k$.

При доказательстве теоремы выводится явный вид калибровочной производной:

$$D_a \psi^A = h^\mu_a \partial_\mu \psi^A - A_a^m I_m^A{}_B \psi^B + w A_a \psi^A, \quad (2.10)$$

$$D_\mu \psi^A = h^a_\mu D_\mu \psi^A = \partial_\mu \psi^A - A^m_\mu I_m^A{}_B \psi^B + w A_\mu \psi^A, \quad (2.11)$$

где

$$h^\mu_a = \overset{\circ}{h}^\mu{}_k Y_a^k, \quad Y_a^k = A_a^k + A_a^m I_m^k{}_l x^l - A_a x^k, \quad (2.12)$$

$$h^a_\mu = (h^{-1})^a{}_\mu = Z_k^a \overset{\circ}{h}^k{}_\mu, \quad Z_k^a = (Y^{-1})^a{}_k, \quad A^m_\mu = h^a_\mu A^m_a, \quad A_\mu = h^a_\mu A_a, \quad (2.13)$$

и для метрического тензора пространства в криволинейной системе координат x^μ справедливо:

$$ds^2 = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = g_{ij} \overset{\circ}{h}^i{}_\mu \overset{\circ}{h}^j{}_\nu, \quad \overset{\circ}{h}^i{}_\mu = \frac{\partial x^i}{\partial x^\mu}, \quad (2.14)$$

$$\overset{\circ}{g} = \det(\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}) = \hat{g}(\overset{\circ}{h})^2, \quad \hat{g} = \det(g_{ij}), \quad \overset{\circ}{h} = \det(\overset{\circ}{h}^a{}_\mu).$$

Перебирая различные наборы индексов, находим конкретные значения матрицы S и матрицы U в законе преобразования (2.8):

$$\begin{aligned} S_{ma}^{\mu} &= \delta_m^n h^\mu_a, & S_{ka}^{\mu} &= 0, & S_{ma}^{k\mu} &= 0, & S_{ka}^{l\mu} &= \delta_k^l h^\mu_a, \\ S_a^\mu &= h^\mu_a, & S_{ma}^\mu &= 0, & S_a^{k\mu} &= 0, & S_{ka}^\mu &= 0, \\ U_{ma}^n &= c_m{}^n{}_q A_a^q - I_m^b{}_a A_b^n, & U_{ma} &= -I_m^b{}_a A_b, \\ U_a^n &= A_a^n, & U_a &= A_a, & U_{ka}^n &= 0, & U_{ka} &= 0, \\ U_{ma}^k &= I_m^k{}_l A_a^l - I_m^b{}_a A_b^k, & U_{ia}^k &= -I_n^k{}_i A_a^n + \delta_i^k A_a, & U_a^k &= 0. \end{aligned}$$

Найденные матрицы U и S определяют правила преобразования для полей A_a^m , A_a и A_a^k :

$$\delta A_a^m = \omega^n c_n{}^m{}_q A_a^q - \omega^n I_n^b{}_a A_b^m + \varepsilon A_a^m + h^\mu_a \partial_\mu \omega^m, \quad (2.15)$$

$$\delta A_a = -\omega^n I_n^l{}_a A_l + \varepsilon A_a + h^\mu_a \partial_\mu \varepsilon, \quad (2.16)$$

$$\delta A_a^k = \omega^n (I_n^k{}_l A_a^l - I_n^l{}_a A_l^k) + a^l (-A_a^n I_n^k{}_l + A_a \delta_l^k) + h^\mu_a \partial_\mu a^k, \quad (2.17)$$

откуда на основании (2.12), (2.13) находим правила преобразования для полей h^a_μ , A^m_μ и A_μ :

$$\begin{aligned} \delta h^a_\mu &= \omega^n I_n^a{}_b h^b_\mu - \varepsilon h^a_\mu - h^a_\nu \partial_\mu \delta x^\nu, \\ \delta A^m_\mu &= \omega^n c_n{}^m{}_q A_\mu^q + \partial_\mu \omega^m - A^m_\nu \partial_\mu \delta x^\nu, \\ \delta A_\mu &= \partial_\mu \varepsilon - A_\nu \partial_\mu \delta x^\nu. \end{aligned} \quad (2.18)$$

При геометрической интерпретации теории величины h^a_μ будут отождествлены с тетрадными потенциалами. Закон преобразования (2.18) показывает, что тетрады h^a_μ по индексу a преобразуются по векторному представлению подгруппы псевдоповращений группы $\mathcal{PW}$, а по индексу μ – по векторному представлению группы общих преобразований координат с инфинитезимальным параметром δx^ν . Тем самым при локализации группы Пуанкаре–Вейля $\mathcal{PW}(x)$ (как и при локализации группы Пуанкаре) тетрадные потенциалы h^a_μ преобразуются согласно (2.18) тензорным образом, в отличие от введенных нами калибровочных полей A^m_a , A_a и A^k_a , которые преобразуются относительно $\mathcal{PW}(x)$ по правилам (2.15)–(2.17), т.е. нетензорным образом. Заметим, однако, что набор полей с тетрадами, который в предыдущих работах принимался в качестве калибровочных полей, имеет ясный геометрический смысл, и в этом его несомненное преимущество.

Введем теперь величину

$$C^c_{ab} = -2h^c_\tau h^\lambda_{[a} \partial_{|\lambda|} h^\tau_{b]} = 2h^\lambda_a h^\tau_b \partial_{[\lambda} h^c_{\tau]} \quad (2.19)$$

и образуем калибровочно-инвариантные напряженности калибровочных полей:

$$F^m_{ab} = 2h^\lambda_{[a} \partial_{|\lambda|} A^m_{b]} + A^m_c C^c_{ab} - c_n{}^m{}_q A^n_a A^q_b, \quad (2.20)$$

$$F_{ab} = 2h^\lambda_{[a} \partial_{|\lambda|} A_{b]} + A_c C^c_{ab}, \quad (2.21)$$

$$F^c_{ab} = C^c_{ab} + 2I_n{}^c{}_{[a} A^n_{b]} + 2A_{[a} \delta^c_{b]}, \quad (2.22)$$

$$Q_a = -g^{bc} D_a g_{bc} = -h^\mu_a g^{bc} \partial_\mu g_{bc} - 2g^{bc} A^z_a I_{zbc} = -h^\mu_a g^{bc} \partial_\mu g_{bc} + 8A_a. \quad (2.23)$$

Справедлива следующая теорема [23].

ТЕОРЕМА 2 (структура лагранжиана свободного калибровочного поля). *Принципу локальной инвариантности удовлетворяет лагранжева плотность*

$$\mathcal{L}_0 = \sqrt{|g|} L_0(F^m_{ab}, F_{ab}, F^c_{ab}, Q_a, g_{ab}, \beta(x)), \quad (2.24)$$

где L_0 представляет собой скалярную функцию, образованную из напряженностей калибровочных полей (2.20)–(2.23).

3. УРАВНЕНИЯ КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ

Полная лагранжева плотность системы поля ψ^A и калибровочного поля, возникающего при локализации группы Пуанкаре–Вейля, имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\psi, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{L}_0$ задается выражением (2.24), $\mathcal{L}_\psi$ – выражением (2.9). Для полной лагранжевой плотности (3.1) выполняются вариационные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta A^m_a} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial A^m_a}, & \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta A_a} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial A_a}, \\ \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta A^k_a} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial A^k_a}, & \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \beta} &= -\frac{\delta \mathcal{L}_\psi}{\delta \beta}, & \frac{\delta \mathcal{L}_\psi}{\delta \psi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Четвертое из этих вариационных уравнений поля является следствием остальных. Правые части этих уравнений представляют собой источники калибровочного поля, которые вычисляются с помощью выражения (2.9):

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial A_a^m} = \sqrt{|g|} (\overset{\circ}{M}{}^a{}_m + S^a{}_m),$$

$$\overset{\circ}{M}{}^a{}_m = I_m{}^c{}_b x^b \overset{(g)}{t}{}^a{}_c, \quad \sqrt{|g|} S^a{}_m = \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial D_a \psi^A} I_m{}^A{}_B \psi^B, \quad (3.3)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial A_a} = \sqrt{|g|} \Delta^a, \quad \Delta^a = -x^b \overset{(g)}{t}{}^a{}_b + J^a, \quad \sqrt{|g|} J^a = -\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial D_a \psi^A} w \psi^A, \quad (3.4)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial A_a^k} = \sqrt{|g|} \overset{(g)}{t}{}^a{}_k, \quad \sqrt{|g|} \overset{(g)}{t}{}^a{}_k = Z_l^a \left(\mathcal{L}_\psi \delta_k^l - \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial l \psi^A} P_k \psi^A \right), \quad (3.5)$$

где $\overset{(g)}{t}{}^a{}_k$ – тензор энергии-импульса внешнего поля, $S^a{}_m$, $\overset{\circ}{M}{}^a{}_m$ спиновый и орбитальный моменты внешнего поля [34], Δ^a , J^a – полный и собственный дилатационные токи внешнего поля [35].

Уравнения (3.2)–(3.5) позволяют обобщить на локализованную группу Пуанкаре–Вейля $\mathcal{PW}(x)$ теорему об источниках калибровочного поля, доказанную в [9], [20] для локализованной группы Пуанкаре.

ТЕОРЕМА 3 (теорема об источниках калибровочного поля). *Источниками калибровочного поля, введенного локализованной группой симметрий $\mathcal{PW}(x)$, служат инварианты теоремы Нётер, соответствующие нелокализованной группе симметрий $\mathcal{PW}$.*

Согласно этой теореме в качестве источника калибровочного поля дополнительно (по сравнению с локализованной группой Пуанкаре) возникает дилатационный ток внешнего поля Δ^a , связанный с возможным наличием дилатационного заряда в природе [36]–[38].

Если в качестве внешнего поля выступает спинорное поле, то согласно теореме 1 лагранжиан взаимодействия с калибровочным полем группы Пуанкаре–Вейля имеет вид

$$\mathcal{L}_\psi = \sqrt{|g|} L_\psi, \quad L_\psi = \bar{\psi}_A \gamma^a D_a \psi^A - m \bar{\psi}_A \psi^A,$$

где калибровочная производная D_a определена выражениями (2.10) и (2.12). Рассмотрим калибровочное поле как слабое поле. Для тетрадного поля $h^\mu{}_a$ это означает представление $h^\mu{}_a = \overset{\circ}{h}{}^\mu{}_a + \overset{(1)}{h}{}^\mu{}_a$, где $\overset{(1)}{h}{}^\mu{}_a$ имеет первый порядок малости наряду с полями A_a^m и A_a , и в асимптотически плоском пространстве перейдем к декартовой системе координат, в которой $\overset{\circ}{h}{}^\mu{}_a = \delta_a^\mu$. Подставляя в лагранжиан выражение для D_a , получаем

$$L_\psi = \bar{\psi}_A \gamma^a D_a^{(t)} \psi^A - m \bar{\psi}_A \psi^A + L_{\psi M} + L_{\psi D}, \quad (3.6)$$

$$D_a^{(t)} \psi^A = A_a^k \partial_k \psi^A - A_a^m I_m{}^A{}_B \psi^B - w A_a \psi^A, \quad (3.7)$$

$$L_{\psi M} = A_a^m I_m{}^k{}_l x^l \bar{\psi}_A \gamma^a \partial_k \psi^A, \quad L_{\psi D} = -A_a x^k \bar{\psi}_A \gamma^a \partial_k \psi^A. \quad (3.8)$$

Первое слагаемое лагранжиана (3.6) содержит производную $D_a^{(t)}\psi^A$, которая получается из (2.10) заменой тетрад h^μ_a на трансляционное калибровочное поле A^k_a . Это слагаемое содержит член с прямым взаимодействием гравитационного поля со спиновым моментом спинорного поля, стандартный для ОТО. Третье слагаемое лагранжиана описывает прямое взаимодействие лоренцева калибровочного поля с орбитальным моментом спинорного поля, а четвертое слагаемое описывает прямое взаимодействие дилатационного калибровочного поля с орбитальным дилатационным моментом.

Вычислим для примера третье слагаемое лагранжиана (3.6). Для этого вычислим для спинорного поля выражение (3.5) для тензора энергии-импульса:

$$t^a_k = Z^a_k L_\psi - \bar{\psi}_A \gamma^a \partial_k \psi^A,$$

и используем выражение для генераторов векторного представления группы $\mathcal{PW}(x)$:

$$I_{ij}^a{}_b = \delta_i^a g_{jb} - \delta_j^a g_{ib}, \quad m \rightarrow \{i, j\}, \quad i < j. \quad (3.9)$$

В результате получаем

$$L_{\psi M} = \frac{1}{2} A_a^{ij} M_{ij}^a, \quad M_{ij}^a = x_i t^a_j - x_j t^a_i,$$

где учтено, что $L_\psi = 0$ в силу уравнения для спинорного поля. Данное взаимодействие описывает эффект, который мог бы проявиться, например, в прецессии электронных орбит под действием внешнего гравитационного поля. Действительно, при отсутствии воздействия на орбитальный момент плоскость орбиты занимает постоянное положение в пространстве. При медленном воздействии калибровочного поля на орбитальный момент происходит прецессия орбиты.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Хорошо известно, что теория калибровочных полей может быть интерпретирована в терминах дифференциальной геометрии (см. работы [3], [14]–[16], [29], [39] и цитируемую там литературу). В работе Вейля [26] обобщение римановой геометрии найдено как следствие требования инвариантности теории относительно локального изменения масштабов. В работах [8]–[12], [20] показано, каким образом при локализации группы Пуанкаре возникает геометрия Римана–Картана.

Покажем, что результаты предыдущих разделов могут быть интерпретированы как результат реализации на пространственно-временном многообразии $\mathcal{M}$ дифференциальной геометрии Вейля–Картана. В основе геометрической интерпретации теории лежит отождествление калибровочной производной (2.11) и ковариантной производной на $\mathcal{M}$. Тогда коэффициенты связности в неголономном базисе имеют вид

$$\Gamma^a_{b\mu} = -A^m_\mu I^a{}_b{}^m + \delta^a_b A_\mu, \quad A^m_\mu = A^m_a h^a_\mu, \quad A_\mu = A_a h^a_\mu. \quad (4.1)$$

Введем следующие величины:

$$F^m_{\mu\nu} = F^m_{ab} h^a_{\mu} h^b_{\nu} = 2\partial_{[\mu} A^m_{\nu]} - c_n^m{}_q A^n_{\mu} A^q_{\nu}, \quad (4.2)$$

$$F_{\mu\nu} = F_{ab} h^a_{\mu} h^b_{\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}, \quad (4.3)$$

$$F^c_{\mu\nu} = F^c_{ab} h^a_{\mu} h^b_{\nu} = 2\partial_{[\mu} h^c_{\nu]} + 2I_n^c{}_a h^a_{[\mu} A^n_{\nu]} + 2A_{[\mu} h^c_{\nu]}, \quad (4.4)$$

$$Q_{\mu} = Q_a h^a_{\mu} = 8(A_{\mu} - \partial_{\mu} \ln \beta(x)). \quad (4.5)$$

Тензором кривизны пространственно-временного многообразия является величина

$$R^a{}_{b\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} \Gamma^a{}_{|b|\nu]} + 2\Gamma^a{}_{c[\mu} \Gamma^c{}_{|b|\nu]} = -I_m^a{}_b F^m_{\mu\nu} + \delta_b^a F_{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Величина (4.3) является тензором сегментарной кривизны Вейля, величина (4.4) – тензором кручения, величина (2.19) – объектом неголономности, а величина (4.5) – вектором Вейля, она образует тензор неметричности вейлевского типа

$$Q_{ab\mu} = \frac{1}{4} g_{ab} Q_{\mu}, \quad Q_{\mu} = g^{ab} Q_{ab\mu}.$$

В результате на пространственно-временном многообразии возникает структура пространства Вейля–Картана.

Величины (4.2)–(4.5) представляют собой тензоры напряженностей калибровочных полей для новой системы динамических переменных $\{A^m_{\mu}, A_{\mu}, h^a_{\mu}, \beta(x), \psi\}$, которой соответствуют следующие уравнения поля:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^m_{\mu}} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_{\mu}} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^a_{\mu}} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \beta} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} = 0. \quad (4.7)$$

Четвертое из этих уравнений поля является следствием остальных. Первое из уравнений поля (4.7) запишем в виде

$$\partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^m_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} (S^{\mu}_{(0)m} + S^{\mu}{}_m), \quad (4.8)$$

$$\sqrt{|g|} S^{\mu}{}_m = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial A^m_{\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial D_{\mu} \psi^A} I_m{}^A{}_B \psi^B,$$

$$\sqrt{|g|} S^{\mu}_{(0)m} = -\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^m_{\mu}} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^n_{\mu\nu}} c_m{}^n{}_q A^q_{\nu} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^c_{\mu\nu}} I_m{}^c{}_a h^a_{\nu}. \quad (4.9)$$

Второе из уравнений поля (4.7) можно записать следующим образом:

$$\partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} (J^{\mu}_{(0)} + J^{\mu}), \quad \sqrt{|g|} J^{\mu} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial A_{\mu}} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial D_{\mu} \psi^A} w \psi^A, \quad (4.10)$$

$$\sqrt{|g|} J^{\mu}_{(0)} = -\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_{\mu}} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^a_{\mu\nu}} h^a_{\nu} - 8 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial Q_{\mu}}. \quad (4.11)$$

Третье из уравнений поля (4.7) представляется в виде

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^a_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} (t^\mu_{(0)a} + t^\mu_{(\psi)a}), \quad (4.12)$$

$$\sqrt{|g|} t^\mu_{(\psi)a} = \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial h^a_\mu} = h^\mu_a \mathcal{L}_\psi - \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial D_\mu \psi^A} D_a \psi^A, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} t^\mu_{(0)a} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial h^a_\mu} = & h^\mu_a \mathcal{L}_0 - 2F^m_{a\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^m_{\mu\nu}} - 2F_{a\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F_{\mu\nu}} - \\ & - 2F^b_{a\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^b_{\mu\nu}} + 2A^m_\nu I^b_m{}_a \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^b_{\mu\nu}} - 2A_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^a_{\mu\nu}} - Q_a \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial Q_\mu}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Величина (4.13) представляет собой известное выражение для канонического тензора энергии-импульса внешнего поля [12].

Величины (4.9), (4.11) и (4.14) представляют собой соответственно внутренний спиновый момент, собственный дилатационный ток и тензор энергии-импульса свободного калибровочного поля. Эти токи сохраняются в сумме с соответствующими токами внешнего поля ψ^A . Данные законы сохранения являются простыми следствиями уравнений калибровочного поля (4.8), (4.10) и (4.12):

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\sqrt{|g|} (S^\mu_{(0)m} + S^\mu_m)) &= 0, & \partial_\mu (\sqrt{|g|} (J^\mu_{(0)} + J^\mu)) &= 0, \\ \partial_\mu (\sqrt{|g|} (t^\mu_{(0)a} + t^\mu_{(\psi)a})) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения поля (4.8), (4.10) и (4.12) могут быть представлены в геометризованном виде с помощью калибровочной производной (2.11), которая, однако, не действует на обозначения с греческими индексами:

$$D_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^m_{\mu\nu}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} S^\mu_m + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^b_{\mu\nu}} I^b_m{}_a h^a_\nu, \quad (4.15)$$

$$D_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F_{\mu\nu}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} J^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^a_{\mu\nu}} h^a_\nu - 4 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial Q_\mu}, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} D_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^a_{\mu\nu}} \right) - F^m_{a\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^m_{\mu\nu}} - F^b_{a\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F^b_{\mu\nu}} - \\ - F_{a\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial F_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} Q_a \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial Q_\mu} + \frac{1}{2} h^\mu_a \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} t^\mu_{(\psi)a}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Данные уравнения, из которых последнее распространяет уравнение Эйнштейна на произвольный лагранжиан, обобщают уравнения поля для калибровочной теории группы Пуанкаре [20], [22].

Следствием структуры тетрадных коэффициентов (2.12) является следующее замечание, обобщающее соответствующее утверждение, приведенное в [20].

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения калибровочного поля (4.7), получаемые из принципа наименьшего действия для системы полей $\{A^m_\mu, A_\mu, h^a_\mu, \beta(x), \psi\}$, выполняются тогда и только тогда, когда выполняются вариационные уравнения поля (3.2) для системы полей $\{A^m_a, A_a, A^k_a, \beta(x), \psi\}$.

Действительно, предположим, что выполняются уравнения поля (4.7). Тогда имеем

$$0 = \delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^m_\mu} \delta A^m_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^a_\mu} \delta h^a_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \beta} \delta \beta + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \dots, \quad (4.18)$$

где многоточие означает полную дивергенцию.

Перейдем теперь к системе независимых переменных $\{A^m_a, A_a, A^k_a, \beta(x), \psi\}$, используя связи (2.12) и (4.1). Для этого вычислим вариацию тетрады

$$\delta h^b_\mu = -h^b_\nu h^a_\mu \delta(\overset{\circ}{h}^\nu_k Y^k_a) = -Z^b_k h^a_\mu (\delta A^k_a + \delta A^m_a I^k_l x^l - \delta A_a x^k) = -Z^b_k h^a_\mu X^k_R \delta A^R_a. \quad (4.19)$$

Обобщенный индекс R пробегает значения $R = \{m, \emptyset, k\}$, где символ $\emptyset$ означает пустое множество, т.е. отсутствие индекса. В результате соотношение (4.18) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^m_\mu} (\delta^m_R - A^m_b Z^b_k X^k_R) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^\emptyset_\mu} (\delta^\emptyset_R - A^\emptyset_b Z^b_k X^k_R) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^b_\mu} Z^b_k X^k_R \right) h^a_\mu \delta A^R_a + \\ & + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \beta} \delta \beta + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \dots = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^R_a} \delta A^R_a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \beta} \delta \beta + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \dots = 0, \end{aligned}$$

откуда вытекают вариационные уравнения поля (3.2).

Наоборот, предположим, что справедливы уравнения поля (3.2) и выполняется равенство

$$0 = \delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^m_b} \delta A^m_b + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_b} \delta A_b + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^k_b} \delta A^k_b + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \beta} \delta \beta + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \dots. \quad (4.20)$$

Перейдем к системе независимых переменных $\{A^m_\mu, A_\mu, h^a_\mu, \beta(x), \psi\}$. При этом вариацию δA^k_a вычислим из равенства (4.19):

$$\delta A^k_a = -Y^k_b h^\mu_a \delta h^b_\mu - X^k_m \delta A^m_a - X^k \delta A_a.$$

Тогда равенство (4.20) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & - \left(A^m_a \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^m_b} - X^k_m \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^k_b} \right) + A_a \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_b} - X^k \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^k_b} \right) + Y^k_a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^k_b} \right) h^\mu_b \delta h^a_\mu + \\ & + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^m_b} - X^k_m \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^k_b} \right) h^\mu_b \delta A^m_\mu + \\ & + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_b} - X^k \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^k_b} \right) h^\mu_b \delta A_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \beta} \delta \beta + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \dots = \\ = & \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^a_\mu} \delta h^a_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^m_\mu} \delta A^m_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \beta} \delta \beta + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \dots = 0, \end{aligned}$$

откуда следуют вариационные уравнения (4.7).

В соответствии с теоремой 2 калибровочно-инвариантный лагранжиан собственного калибровочного поля является скалярной функцией напряженностей калибровочных полей теории, содержащих производные не выше первого порядка. Простейший лагранжиан такого рода, позволяющий динамически реализоваться всем

калибровочным полям, имеет следующий вид [23]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0 &= 2hf_0\beta^4 \left(\Lambda + I_m^a{}_b F^m{}_a{}^b + \sum_k \rho_k^{(k)} F_{cab}^{(k)} F^{cab} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_i f_i^{(i)} (I_{mab} F^m{}_{cd})^{(i)} (I_n{}^{ab} F^{ncd}) + \lambda F_{ab} F^{ab} + \xi Q_a Q^a + \zeta F^c{}_{ac} Q^a \right) = \\
 &= 2hf_0 \left(\frac{1}{2} \beta^2 \bar{R} + 2 \sum_i f_i^{(i)} \bar{R}_{[ab]cd}^{(i)} \bar{R}^{[ab]cd} + \right. \\
 &\quad \left. + \beta^2 \left(\sum_k \rho_k^{(k)} T_{cab}^{(k)} T^{cab} + 64\xi A_\mu A^\mu + 8\zeta T^\mu A_\mu \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 4\lambda (\partial_{[\mu} A_{\nu]})^2 - 8(\zeta T^\mu + 16\xi A^\mu) \beta \partial_\mu \beta + 64\xi g^{\mu\nu} (\partial_\mu \beta) (\partial_\nu \beta) + \Lambda \beta^4 \right). \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Здесь $\bar{R}^a{}_{b\mu\nu}$ и $\bar{R}$ – тензор и скаляр кривизны пространства Вейля–Картана, индексы i, k нумеруют компоненты неприводимых разложений (относительно группы Лоренца) тензоров кривизны и кручения. Нахождение и анализ конкретных вариационных уравнений гравитационного поля, получаемых из данного лагранжиана, будет целью следующих работ.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе развита калибровочная теория для группы Пуанкаре–Вейля и на этой основе построена модель пространства-времени с геометрией пространства Вейля–Картана. Предложена геометрическая интерпретация калибровочной теории, основанная на отождествлении ковариантной производной пространственно-временного многообразия с калибровочной производной. Показано, что тетрадные коэффициенты представляют собой функции от введенных нами калибровочных полей трех типов: лоренцева A_a^m , трансляционного A_a^k и дилатационного A_a , причем $A_a^k = D_a x^k$. В отличие от работ [27], [28], где в качестве калибровочных полей рассматривались тетрадные коэффициенты, преобразующиеся тензорным образом, введенные нами калибровочные поля подчиняются калибровочным преобразованиям в форме, соответствующей определению калибровочных полей как “компенсирующих” полей или связностей (см., например, [3], [29] или [30]).

Получены общие (для произвольного лагранжиана (2.24)) уравнения гравитационного поля, источниками которых являются тензор энергии-импульса, полный (орбитальный и спиновый) момент и полный дилатационный ток внешнего поля. Появление орбитального момента в качестве источника в уравнениях гравитационного поля, которые тем не менее являются трансляционно-инвариантными [18]–[23], может служить обоснованием недавно предложенного эксперимента [25] с использованием гироскопа на земной орбите для определения возможного существования кручения в пределах Солнечной системы.

Отметим также, что в данной работе предложен калибровочно-инвариантный лагранжиан гравитационного поля (4.21), имеющий ряд отличительных особенностей. Во-первых, он воспроизводит квадратичный лагранжиан пуанкаре-калибровочной теории гравитации [10], [15], [20]. Во-вторых, данный лагранжиан при сохранении калибровочной инвариантности допускает, в отличие от работ [27], [28], наличие ненулевой массы у кванта векторного поля неметричности Вейля, а тем самым и у дилатационного калибровочного поля. Это обстоятельство говорит о том, что калибровочное поле, вводимое при локализации группы масштабных преобразований, является не электромагнитным полем (в отличие от первоначальной идеи Вейля), а полем другой природы, на что указывалось в [40]–[42]. Наличие массы у поля Вейля может сыграть положительную роль в интерпретации современных наблюдательных данных на основе использования постримановых космологических моделей [37], [38], а также для возможного объяснения плавного выхода из стадии инфляции. Наконец, последние слагаемые с полем $\beta(x)$ в данном лагранжиане при введении дилатонного поля $\sigma(x) = \ln \beta(x)$ будут иметь структуру лагранжиана Хиггса и тем самым могут играть определяющую роль при спонтанном нарушении масштабной инвариантности и образовании масс частиц [43].

Благодарности. Авторы выражают благодарность И. В. Тютину за многочисленные консультации по результатам работы.

Список литературы

- [1] Э. Картан, “Теория групп и геометрия”, *Об основаниях геометрии*, ред. А. П. Норден, Гостехиздат, М., 1956, 485–507.
- [2] И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк, *Введение в новые методы дифференциальной геометрии*. Т. I. *Алгебра и учение о перенесении*, ГОНТИ, М.–Л., 1939.
- [3] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1988.
- [4] А. А. Соколов, И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов, *Калибровочные поля*, Изд-во МГУ, М., 1986.
- [5] R. Utiyama, *Phys. Rev.*, **101**:5 (1956), 1597–1607; Р. Утияма, “Инвариантная теория взаимодействия”, *Элементарные частицы и компенсирующие поля*, ред. Д. Иваненко, Мир, М., 1964, 250–273.
- [6] Д. Иваненко (ред.), *Элементарные частицы и компенсирующие поля*, Мир, М., 1964.
- [7] Ф. М. Бродский, Д. Иваненко, Г. А. Соколик, *ЖЭТФ*, **41** (1961), 1307–1309.
- [8] T. W. B. Kibble, *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 212–221; Т. Киббл, “Лоренц-инвариантность и гравитационное поле”, *Элементарные частицы и компенсирующие поля*, ред. Д. Иваненко, Мир, М., 1964, 274–298.
- [9] Б. Н. Фролов, *Вестн. МГУ. Сер. физ., astron.*, 1963, №6, 48–58.
- [10] Б. Н. Фролов, “Современные проблемы гравитации”, *Сб. трудов II Сов. гравитац. конф.*, Изд-во Тбил. ун-та, Тбилиси, 1967, 270–278.
- [11] Y. M. Cho, *Phys. Rev. D*, **14**:12 (1976), 3335–3340.
- [12] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick, J. M. Nester, *Rev. Modern Phys.*, **48**:3 (1976), 393–416.
- [13] F. G. Basombrio, *Gen. Relativity Gravitation*, **12**:2 (1980), 109–136.
- [14] D. Ivanenko, G. Sardanashvily, *Phys. Rep.*, **94**:1 (1983), 1–45.
- [15] F. W. Hehl, J. L. McCrea, E. W. Mielke, Yu. Ne’eman, *Phys. Rep.*, **258**:1–2 (1995), 1–171.

- [16] G. Sardanashvily, *On the geometric foundation of classical gauge gravitational theory*, [arXiv: gr-qc/0201074](#).
- [17] R. T. Hammond, *Rep. Progr. Phys.*, **65**:5 (2002), 599–649.
- [18] Б. Н. Фролов, *Проблемы теории гравитации с квадратичными лагранжианами в пространствах с кручением и неметричностью*, Дисс. ... доктора физ.-матем. наук, МГУ, М., 1999.
- [19] Yu. N. Obukhov, *Internat. J. Geom. Meth. Modern Phys.*, **3**:1 (2006), 95–137; [arXiv: gr-qc/0601090](#).
- [20] Б. Н. Фролов, *Пуанкаре-калибровочная теория гравитации*, МПГУ, М., 2003.
- [21] B. N. Frolov, “Physical Interpretations of Relativity Theory”, *Proc. Int. Sci. Meeting PIRT-2003*, Moscow, Liverpool, Sunderland, 2003, 213–219.
- [22] B. N. Frolov, *Gravit. Cosmol.*, **10**:1–2 (2004), 116–120.
- [23] O. V. Babourova, B. N. Frolov, V. Ch. Zhukovsky, *Phys. Rev. D*, **74**:6 (2006), 064012; [arXiv: hep-th/0508088](#).
- [24] V. Aldaya, E. Sánchez-Sastre, *J. Phys. A*, **39**:7 (2006), 1729–1742.
- [25] Y. Mao, M. Tegmark, A. Guth, S. Cabi, *Phys. Rev. D*, **76**:10 (2007), 104029; [arXiv: gr-qc/0608121v3](#).
- [26] Г. Вейль, *Пространство, время, материя*, Янус, М., 1996.
- [27] J. M. Charap, W. Tait, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **340**:1622 (1974), 249–262.
- [28] M. Kasuya, *Nuovo Cimento B*, **28**:1 (1975), 127–137.
- [29] Н. П. Коноплева, В. Н. Попов, *Калибровочные поля*, Атомиздат, М., 1980.
- [30] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, М., 1979.
- [31] D. Gregorash, G. Papini, *Nuovo Cimento B*, **55**:1 (1980), 37–51; **56**:1 (1980), 21–38.
- [32] M. Nishioka, *Fortschr. Phys.*, **33**:4 (1985), 241–257.
- [33] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **333**:1595 (1973), 403–418.
- [34] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1984.
- [35] G. Mack, A. Salam, *Ann. Physics*, **53**:1 (1969), 174–202.
- [36] O. V. Babourova, B. N. Frolov, *Modern Phys. Lett. A*, **12**:38 (1997), 2943–2950; [arXiv: gr-qc/9708006](#).
- [37] R. W. Tucker, C. Wang, *Class. Quantum Gravity*, **15**:4 (1998), 933–954; [arXiv: gr-qc/9612019](#).
- [38] O. V. Babourova, B. N. Frolov, *Class. Quantum Gravity*, **20**:8 (2003), 1423–1441; [arXiv: gr-qc/0209077](#).
- [39] E. Lubkin, *Ann. Physics*, **23**:2 (1963), 233–283.
- [40] R. Utiyama, *Progr. Theoret. Phys.*, **50**:6 (1973), 2080–2090.
- [41] P. G. O. Freund, *Ann. Phys.*, **84**:1–2 (1974), 440–454.
- [42] R. Utiyama, *Gen. Relativity Gravitation*, **6**:1 (1975), 41–47.
- [43] B. N. Frolov, “Generalized conformal invariance and gauge theory of gravity”, *Gravity, Particles and Space-Time*, eds. P. Pronin, G. Sardanashvily, World Scientific, Singapore, 1996, 113–144.

Поступила в редакцию 15.11.2007,
после доработки 25.01.2008