Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Жислин, Принцип Паули, устойчивость и связанные состояния систем тождественных псевдорелятивистских частиц, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 1, 116–129

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:44:48

© 2008 г.

Г. М. Жислин*

ПРИНЦИП ПАУЛИ, УСТОЙЧИВОСТЬ И СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПСЕВДОРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

На основе анализа свойств псевдорелятивистских гамильтонианов систем Z_n из n тождественных частиц установлено, что для реальных (короткодействующих) потенциалов взаимодействия между частицами существует бесконечная последовательность таких чисел n_s , $s = 1, 2, \dots$, что система Z_{n_s} устойчива, причем $\sup_s n_{s+1} n_s^{-1} < +\infty$. Для устойчивых систем Z_n доказано, что гамильтониан относительного движения таких систем имеет непустой дискретный спектр при некоторых фиксированных значениях полного момента частиц. Результаты получены с полным учетом перестановочной симметрии (запрета Паули) как для фермионных, так и для бозонных систем при любом значении спина частиц. Ранее для псевдорелятивистских систем подобные утверждения были доказаны только без учета перестановочной симметрии и поэтому не имели физического смысла; для нерелятивистских систем результаты с учетом перестановочной симметрии (но без оценки отношения $n_{s+1} n_s^{-1}$) имелись, но были получены в предположениях, справедливость которых для реальных систем до сих пор не установлена. Основная теорема верна и для нерелятивистских систем, что существенно усиливает имевшийся результат.

Ключевые слова: псевдорелятивистские системы, устойчивость, принцип Паули, дискретный спектр, многочастичные гамильтонианы.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. В настоящей работе на основе изучения свойств псевдорелятивистских (ПР) гамильтонианов исследуются возможность существования устойчивых ПР-систем Z_n , состоящие из n тождественных частиц, при $n \rightarrow \infty$ и вопрос о существовании непустого дискретного спектра операторов энергии относительного движения устойчивых ПР-систем. Установлено, что для реальных (короткодействующих) потенциалов взаимодействия между частицами существует бесконечная последовательность таких чисел n_s , $s = 1, 2, \dots$, что система Z_{n_s} устойчива, при этом $\sup_s n_{s+1} n_s^{-1} < +\infty$ (теорема 2.2). Для устойчивых систем Z_n доказано, что гамильтониан относительного движения такой системы имеет непустой дискретный спектр при некоторых

*Федеральное государственное научное учреждение “Научно-исследовательский радиофизический институт”, Н. Новгород, Россия. E-mail: greg@nirfi.sci-nnov.ru

фиксированных значениях полного момента частиц системы Z_n (теорема 2.1). Все результаты получены с полным учетом перестановочной симметрии (запрета Паули) как для фермионных, так и для бозонных систем при любом значении спина частиц.

Ранее для ПР-систем подобные утверждения были доказаны только без учета перестановочной симметрии [1] и поэтому не имели физического смысла. Для нерелятивистских (НР) систем результаты с учетом перестановочной симметрии (но без оценки отношения $n_{s+1}n_s^{-1}$) можно найти в работе [2], но там они были получены в таких предположениях, справедливость которых для реальных систем до сих пор не установлена (и которые в настоящей работе отсутствуют). В связи с этим отметим, что наша основная теорема 2.2 в той же формулировке верна для НР-систем, т.е. существенно усиливает результат работы [2].

1.2. Рассмотрим квантовую систему Z_n , состоящую из n тождественных частиц. Пусть $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ и m – радиус-вектор и масса i -й частицы, $r = (r_1, \dots, r_n)$. Тогда псевдорелятивистский оператор энергии системы Z_n можно записать в виде

$$H_n = K_n(r) + V_n(r), \quad (1.1)$$

где¹⁾

$$K_n(r) = \sum_{i=1}^n K(r_i), \quad V_n(r) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n V(|r_i - r_j|), \quad (1.2)$$

$$K(r_i) = \sqrt{-\Delta_i + m^2}, \quad \Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}, \quad (1.3)$$

$V(|r_i|)$ – вещественная функция, $V(|r_i|) \in \mathcal{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $V(|r_i|) \rightarrow 0$ при $|r_i| \rightarrow \infty$, причем функция $V(|r_i|)$ такова, что оператор H_n ограничен снизу при любом n .

Одночастичные НР-операторы $K(r_i)$ суть интегральные операторы в координатном пространстве, однако в импульсном представлении они превращаются в операторы умножения. Действительно, пусть $\mathcal{F}$ – фурье-преобразование в $\mathbb{R}^3$ и $\bar{f}(p_i) = \mathcal{F}\{f(r_i)\}$, где $f(r_i) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ и p_i – фурье-сопряженная координата к r_i . Тогда

$$K(r_i)f(r_i) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{p_i^2 + m^2} \bar{f}(p_i)\right\}. \quad (1.4)$$

Положим $p = (p_1, \dots, p_n)$,

$$\bar{K}(p_i) = \sqrt{p_i^2 + m^2}, \quad \bar{K}_n(p) = \sum_{i=1}^n \bar{K}(p_i) \quad (1.5)$$

и используем далее наряду с (1.1) смешанную форму записи для оператора H_n :

$$H_n = \bar{K}_n(p) + V_n(r), \quad (1.6)$$

где релятивистский оператор кинетической энергии $\bar{K}_n(p)$ рассматривается в импульсном представлении, а НР-оператор потенциальной энергии V_n – в координатном.

¹⁾ Система единиц выбрана так, что константа Планка и скорость света равны 1.

1.3. Чтобы определить понятие устойчивости системы Z_n , необходимо рассмотреть всевозможные ее разбиения и их операторы. Обозначим через $D = \{C_1, \dots, C_s\}$ произвольное разбиение системы Z_n на s непересекающихся и не взаимодействующих друг с другом кластеров C_j :

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad \bigcup_{j=1}^s C_j = Z_n, \quad 2 \leq s \leq n.$$

Оператор энергии составной системы D имеет вид

$$H_n(D) = \sum_{j=1}^s H[C_j], \quad (1.7)$$

где $H[C_j]$ – ПР-оператор энергии кластера C_j ,

$$H[C_j] = \sum_{i \in C_j} \bar{K}(p_i) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \in C_j, \\ i \neq j}} V(|r_i - r_j|). \quad (1.8)$$

Операторы H_n и $H_n(D)$ ограничены снизу на $C_0(\mathbb{R}^{3n})$. Расширим их до самосопряженных, сохраняя прежние обозначения.

1.4. Операторы H_n и $H_n(D)$ отвечают энергии *полного* движения соответственно системы Z_n и составной системы D , и они вполне пригодны (после учета принципа Паули) для изучения стабильности системы Z_n . Однако, исследуя вопрос о структуре спектра связанных состояний Z_n , надо рассматривать оператор энергии *относительного* движения. При построении такого оператора в ПР-случае мы следуем работе [3]. Введем радиус-вектор $r_0 = \sum_{j=1}^n r_j/n$ центра масс системы Z_n и относительные координаты $q_i = r_i - r_0$ частиц. Фурье-сопряженные к ним координаты будут соответственно

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i, \quad (1.9)$$

и p_i , где p_i – те же, что для r_i , $i = 1, 2, \dots, n$. В новых координатах потенциал V_n будет зависеть только от $q_1, \dots, q_n$, а оператор кинетической энергии $\bar{K}_n$ – от $p_1, \dots, p_n$ при условии (1.9). Если теперь фиксировать Q , то полученный оператор $H_n(Q)$ будет зависеть только от относительных координат q_i и соответствующих импульсов p_i (и от фиксированного Q). Поэтому $H_n(Q)$ можно рассматривать как оператор энергии относительного движения системы Z_n . Оператор $H_n(D)$ после введения координат q_i, p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и фиксации Q обозначим через $H_n(Q; D)$ ²⁾. Положим $R_0 = \{q \mid q = (q_1, \dots, q_n), q_1 + q_2 + \dots + q_n = 0\}$. Операторы $H_n(Q)$ и $H_n(Q; D)$ будут рассматриваться в $\mathcal{L}_2(R_0)$.

²⁾ Оператор $H_n(Q; D)$ в отличие от $H_n(Q)$ не является оператором энергии относительного движения системы D , ибо не фиксированы значения моментов кластеров C_j , входящих в D , однако для нас это несущественно.

1.5. Пусть S_n – группа перестановок n элементов и $E_n = \{\alpha\}$ – множество всех типов α неприводимых представлений группы S_n . Как известно [4], каждое α из E_n однозначно определяется каким-либо разбиением числа n на целые положительные числа:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_p, \quad 1 \leq p \leq n,$$

т.е. $\alpha = \alpha(n_1, \dots, n_p)$. Пусть k – произвольное целое число, $1 \leq k \leq n$. Положим

$$\begin{aligned} E_n^{(1)}(k) &= \{\alpha \mid \alpha \in E_n, \alpha = \alpha(n_1, \dots, n_p), n_i \leq k, i = 1, 2, \dots, p\}, \\ E_n^{(2)}(k) &= \{\alpha \mid \alpha \in E_n, \alpha = \alpha(n_1, \dots, n_p), p \leq k\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Используя для описания типов $\alpha \in E_n^{(i)}(k)$ схемы Юнга [5], можно сказать, что множества $E_n^{(1)}(k)$ и $E_n^{(2)}(k)$ состоят из тех α , которые отвечают схемам Юнга, имеющим не более k столбцов (для $E_n^{(1)}(k)$) или не более k строк (для $E_n^{(2)}(k)$). Далее всюду полагаем $E_n(k) = E_n^{(1)}(k)$ или $E_n(k) = E_n^{(2)}(k)$. Обозначим через $P_n^{(\alpha)}$ проектор в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{3n})$ и $\mathcal{L}_2(R_0)$ соответственно на подпространства таких функций $\{\psi(r)\}$ и $\{\varphi(q)\}$, которые под действием операторов T_g ,

$$T_g \psi(r) = \psi(g^{-1}r), \quad T_g \varphi(q) = \varphi(g^{-1}q), \quad g \in S_n,$$

преобразуются по представлениям типа α . Явный вид оператора $P_n^{(\alpha)}$ дан в п. 3.6. Положим

$$B_n(k) = \sum_{\alpha \in E_n(k)} \bigoplus P_n^{(\alpha)} \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{3n}), \quad B_{n,0}(k) = \sum_{\alpha \in E_n(k)} P_n^{(\alpha)} \mathcal{L}_2(R_0) \quad (1.11)$$

и обозначим через $H_n(k)$, $H_n(D; k)$ и $H_n(Q; k)$, $H_n(Q; D; k)$ ограничения операторов H_n , $H_n(D)$ и $H_n(Q)$, $H_n(Q; D)$ соответственно на пространства $B_n(k)$ и $B_{n,0}(k)$. Пусть далее $A^{(\alpha)} = P_n^{(\alpha)} A$ для $A = H_n, H_n(Q), H_n(D), H_n(Q; D)$. Очевидно, что

$$H_n(k) = \sum_{\alpha \in E_n(k)} H_n^{(\alpha)}, \quad H_n(D; k) = \sum_{\alpha \in E_n(k)} H_n^{(\alpha)}(D), \quad (1.12a)$$

$$H_n(Q; k) = \sum_{\alpha \in E_n(k)} H_n^{(\alpha)}(Q), \quad H_n(Q; D; k) = \sum_{\alpha \in E_n(k)} H_n^{(\alpha)}(Q; D). \quad (1.12b)$$

1.6. Чтобы результаты данного исследования имели физический смысл, надо учесть запрет Паули. А это означает, следующее [6]:

во-первых, мы должны взять $E_n(k) = E_n^{(1)}(k)$, если система Z_n состоит из фермионов, и $E_n(k) = E_n^{(2)}(k)$, если Z_n состоит из бозонов;

во-вторых, число k должно соответствовать возможным значениям спина частиц. Например, если рассматривать фермионы со спином $\pm 1/2$, то физический смысл имеют операторы $H_n(k)$, $H_n(Q; k)$ только при $E_n(k) = E_n^{(1)}(k)$, $k = 1, 2$.

Однако, поскольку математическая формулировка результатов и их доказательство не зависят от указанных условий, далее мы не предполагаем обязательного их выполнения. В то же время всегда, когда мы будем использовать физические пояснения математических утверждений и определений, эти пояснения автоматически будут относиться только к ситуации, в которой данные требования выполнены.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР: ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Положим

$$\mu_n(k) = \min_D \inf H_n(D; k). \quad (2.1)$$

Будем говорить, что система Z_n

$$k\text{-устойчива, если } \inf H_n(k) < \mu_n(k), \quad (2.2)$$

$$k\text{-неустойчива, если } \inf H_n(k) \geq \mu_n(k) \quad (2.3)$$

(можно доказать, что строгое неравенство в (2.3) невозможно, но для нас это не существенно).

Так как оператор H_n представляет собой ПР-оператор энергии системы Z_n , неравенство в (2.2) означает, что любое разбиение системы Z_n приводит к возрастанию минимального значения энергии в пространстве состояний $B_n(k)$. Таким образом, k -устойчивость системы Z_n эквивалентна энергетической невыгодности ее разбиений по отношению к состояниям из $B_n(k)$, т.е. эквивалентна устойчивости в обычном смысле, но в пространстве $B_n(k)$. При этом, если взять за k максимальное из разрешенных принципом Паули значений, то можно говорить об устойчивости системы Z_n , не упоминая k . Однако использование понятия k -устойчивости, вообще говоря, позволяет получить дополнительную информацию о типе перестановочной симметрии устойчивых состояний. Чтобы понять причины этого, достаточно заметить, что k -устойчивость системы Z_n не влечет за собой автоматически ее k_1 -устойчивость при $k_1 \neq k$. Действительно, пусть система Z_n k -устойчива и $k_1 \neq k$. Для определенности считаем $k_1 > k$. Тогда, поскольку $E_n(k) \subset E_n(k_1)$, имеем

$$B_n(k) \subset B_n(k_1). \quad (2.4)$$

Поэтому

$$\inf H_n(k_1) \leq \inf H_n(k), \quad \mu_n(k_1) \leq \mu_n(k). \quad (2.5)$$

Так как система Z_n k -устойчива,

$$\inf H_n(k) < \mu_n(k), \quad (2.6)$$

и мы видим, что соотношений (2.5), (2.6) недостаточно для того, чтобы было справедливо неравенство

$$\inf H_n(k_1) < \mu_n(k_1),$$

т.е. для k_1 -устойчивости системы Z_n . Поэтому мы не можем исключить ситуацию, когда система Z_n одновременно k -устойчива и k_1 -неустойчива при $k_1 \neq k$.

2.2. Введем множество

$$F_n(k) = \{\alpha \mid \alpha \in E_n(k), \inf H_n^{(\alpha)} < \mu_n(k)\}. \quad (2.7)$$

Если система Z_n k -устойчива, то в силу (1.12a) и (2.2) множество $F_n(k)$ не пусто.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть система Z_n k -устойчива. Тогда для любого $\alpha \in F_n(k)$ дискретный спектр $s_d(H_n^{(\alpha)}(Q))$ оператора $H_n^{(\alpha)}(Q)$ не пуст при всех Q из некоторого множества $\Gamma_n(\alpha) \subseteq \mathbb{R}^3$.

СЛЕДСТВИЕ. Дискретный спектр $s_d(H_n(Q; k))$ оператора $H_n(Q; k)$ k -устойчивой системы Z_n не пуст при $Q \in \Gamma_n[k] = \bigcup_{\alpha \in F_n(k)} \Gamma_n(\alpha)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В НР-случае согласно ХВЖ-теореме устойчивость системы эквивалентна существованию непустого дискретного спектра оператора $\mathcal{H}$ энергии относительного движения при любом Q , ибо в НР-ситуации движение центра масс полностью отделяется и $\mathcal{H}$ не зависит от Q . В ПР-случае такое отделение невозможно, и поэтому структура дискретного спектра может зависеть от Q ³⁾.

2.3. Приведенная ниже теорема 2.2, составляющая основной результат настоящей статьи, говорит о том, что для широкого класса потенциалов взаимодействия (включающего наиболее интересные для приложений случаи) не существует ограничения сверху на число n частиц в k -устойчивых системах Z_n .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть существует такое $A > 0$, что для куба $C(A) \subset \mathbb{R}^3$ с центром в начале координат и ребрами длины $2A$, параллельными осям координат, выполняется неравенство

$$\delta := \int_{r_1, r_2 \in C(A)} V(|r_1 - r_2|) dr_1 dr_2 < 0. \quad (2.8)$$

Тогда для каждого $k \geq 1$ существует бесконечная последовательность таких чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_s < \dots$, что системы Z_{n_s} , $s = 1, 2, \dots$, k -устойчивы. Если дополнительно предположить, что

$$d_0 := \inf_{r_1} V(|r_1|) > -\infty, \quad (2.9)$$

то

$$\sup_s \frac{n_{s+1}}{n_s} < +\infty. \quad (2.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для того чтобы имело место неравенство (2.8), достаточно выполнения условий [2]

$$V(|r_1|) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} V(|r_1|) dr_1 < 0. \quad (2.11)$$

Эти условия выполняются, например, когда $V(|r_1|)$ есть линейная комбинация потенциалов Юкавы:

$$V(|r_1|) = \sum_{i=1}^m a_i \frac{e^{-b_i |r_1|}}{|r_1|}, \quad b_i > 0,$$

если

$$\sum_{i=1}^m a_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m a_i b_i^2 < 0.$$

³⁾ Например, для двухчастичной ПР-системы дискретный спектр оператора $H_2(Q)$ при некоторых потенциалах взаимодействия конечен для одних значений Q и бесконечен для других [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Утверждения теоремы 2.2 и ее доказательство практически без изменений переносятся на случай НР-систем.

2.4. Доказательства теорем 2.1, 2.2 даны в разделе 3, а здесь мы сформулируем вопросы, на которые нам ответить не удалось.

1. Зависят ли “магические” числа $n_1, n_2, \dots$ от k ?
2. Вытекает ли из k -устойчивости системы Z_n ее k_1 -устойчивость при каких-либо $k_1 \neq k$?
3. Какие типы α неприводимых представлений групп S_n входят в множество $F_n(k)$ (см. (2.7)), либо (хотя бы) сколько строк или столбцов содержат соответствующие этим α схемы Юнга, если система Z_n является k -устойчивой?
4. Остается ли теорема 2.1 справедливой, если всюду в работе вместо множества $E_n(k)$ взять $E_n(k_2, k_1) = E_n(k_2) \setminus E_n(k_1)$ ($k_2 > k_1$) и пространство $B_n(k)$ и операторы $H_n(k)$, $H_n(D; k)$ заменить соответственно на пространство $B_n(k_2, k_1)$ и операторы $H_n(k_2, k_1)$, $H_n(D; k_2, k_1)$, определенные с использованием $E_n(k_2; k_1)$ вместо $E_n(K)$, а понятие k -устойчивости заменить на (k_2, k_1) -устойчивость?

Общая причина того, что сегодня мы не в состоянии дать ответы на эти вопросы заключается в нерешенности задачи о взаимном расположении величин $\inf H_n^{(\alpha)}$ в зависимости от α . Эта труднейшая задача не решена даже для НР-систем: в этом случае результаты имеются лишь для одномерных частиц [8].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

3.1. Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\alpha \in F_n(k)$ (см. (2.7)) и $\Phi_n(\alpha; Q) = \inf H_n^{(\alpha)}(Q)$. Очевидно, $\inf H_n^{(\alpha)} \equiv \inf_Q \Phi_n(\alpha; Q)$. Так как функция $\Phi_n(\alpha; Q)$ непрерывна по Q и $\inf H_n^{(\alpha)} < \mu_n(k)$, найдется такое открытое множество $\Gamma_n(\alpha) \subseteq \mathbb{R}^3$ значений Q , что для любого $Q \in \Gamma_n(\alpha)$

$$\inf H_n^{(\alpha)}(Q) < \mu_n(k). \quad (3.1)$$

Далее, в силу (1.12a) и (2.1) $\mu_n(k) \leq \inf H_n^{(\alpha)}(D)$ для любых $\alpha \in E_n(k)$ и D . Как легко видеть,

$$\inf H_n^{(\alpha)}(D) = \inf_{Q'} \inf H_n^{(\alpha)}(Q'; D),$$

и поэтому в силу (1.126) $\mu_n(k) \leq \inf H_n^{(\alpha)}(Q'; D)$ при каждом $\alpha \in E_n(k)$ и любых D и Q' . Следовательно,

$$\mu_n^{(\alpha)}(Q') := \min_D \inf H_n^{(\alpha)}(Q'; D) \geq \mu_n(k). \quad (3.2)$$

Согласно [9] $\mu_n^{(\alpha)}(Q')$ есть нижняя граница существенного спектра оператора $H_n^{(\alpha)}(Q')$. Поэтому из неравенств (3.1), (3.2) следует, что при любых $\alpha \in F_n(k)$ и $Q \in \Gamma_n(\alpha)$ число $\inf H_n^{(\alpha)}(Q)$ есть точка дискретного спектра оператора $H_n^{(\alpha)}(Q)$. Теорема 2.1 доказана.

Докажем следствие. Из (1.126) вытекает, что нижняя граница $\mu_n(Q'; k)$ существенного спектра оператора $H_n(Q'; k)$ есть

$$\mu_n(Q'; k) := \min_{\alpha \in E_n(k)} \mu_n^{(\alpha)}(Q').$$

Вследствие (3.2) $\mu_n(Q'; k) \geq \mu_n(k)$, и поэтому все точки спектра оператора $H_n(Q'; k)$, лежащие слева от $\mu_n(k)$, принадлежат его дискретному спектру. Пусть $\Gamma_n[k] = \bigcup_{\alpha \in F_n(k)} \Gamma_n(\alpha)$. Если $Q \in \Gamma_n[k]$, то $Q \in \Gamma_n(\alpha)$ для какого-либо $\alpha \in F_n(k)$, и, значит,

$$\lambda := \inf H_n^{(\alpha)}(Q) < \mu_n(k).$$

Поэтому $\lambda \in s_d(H_n(Q; k))$, и следствие доказано.

3.2. Доказательство теоремы 2.2. Предположим, что теорема неверна, т.е. что для некоторого $n_0 > 0$ система Z_n k -неустойчива при любых $n \geq n_0$. Фиксируем $n \geq n_0$. Тогда найдется такое разбиение $D' = \{C'_1, \dots, C'_m\}$ системы Z_n , что выполняется неравенство

$$\inf H_n(k) \geq \inf H_n(D'; k). \quad (3.3)$$

Для произвольного кластера $C \subset Z_n$ обозначим через $|C|$ число элементов C , через $S[C]$ – группу перестановок частиц из C . Ясно, что группа $S[C]$ изоморфна группе $S_{|C|}$. Пусть

$$\check{S}(D') = S[C'_1] \times S[C'_2] \times \dots \times S[C'_m] \quad (3.4)$$

и $I_n(\alpha; D')$ – множество всех типов $\check{\alpha} = \check{\alpha}(D')$ неприводимых представлений группы $\check{S}(D')$, содержащихся в представлении типа α группы S_n после ограничения его с S_n на $\check{S}(D')$. Для любого $\check{\alpha} \in I_n(\alpha; D')$ обозначим через $P_n^{(\check{\alpha})}(D')$ проектор в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{3n})$ на подпространство функций, преобразующихся под действием операторов T_g , $T_g \psi(r) = \psi(g^{-1}r)$, $g \in \check{S}(D')$, по представлению типа $\check{\alpha}$, и положим $B_n^{(\check{\alpha})} = P_n^{(\check{\alpha})}(D')\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{3n})$. Очевидно,

$$P_n^{(\alpha)}\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{3n}) = \sum_{\check{\alpha} \in I_n(\alpha; D')} \bigoplus B_n^{(\check{\alpha})},$$

и, значит,

$$B_n(k) = \sum_{\alpha \in E_n(k)} \sum_{\check{\alpha} \in I_n(\alpha; D')} \bigoplus B_n^{(\check{\alpha})}.$$

Пространство $B_n^{(\check{\alpha})}$ инвариантно для оператора $H_n(D')$. Поэтому

$$\inf H_n(D'; k) = \min_{\alpha \in E_n(k)} \min_{\check{\alpha} \in I_n(\alpha; D')} \inf P_n^{(\check{\alpha})} H_n(D').$$

Следовательно, найдутся такие $\alpha_0 \in E_n(k)$ и $\check{\alpha}_0 \in I_n(\alpha_0; D')$, что

$$\inf H_n(D'; k) = \inf P_n^{(\check{\alpha}_0)} H_n(D'). \quad (3.5)$$

3.3. В силу (3.4) любое неприводимое представление группы $\check{S}(D')$ есть тензорное произведение некоторых неприводимых представлений групп $S[C'_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$. Отсюда следует, что для типа α_0 мы можем указать такие типы β_i неприводимых представлений групп $S[C'_i]$, что

$$P_n^{(\check{\alpha})} = \prod_{i=1}^m P^{(\beta_i)}[C'_i],$$

где $P^{(\beta_i)}[C'_i]$ – проекторы, определенные аналогично проекторам $P_n^{(\alpha)}$, но действующие только на переменные r_j , $j \in C'_i$, $i = 1, \dots, m$. Поэтому в силу (1.7) (с $D = D'$)

$$P_n^{(\beta)} H_n(D') = \sum_{i=1}^m H^{(\beta_i)}[C'_i], \quad (3.6)$$

где $H^{(\beta_i)}[C'_i] = P^{(\beta_i)}[C_i] H[C_i]$.

По построению β_i есть один из типов неприводимых представлений группы $S[C'_i]$, которые возможны для нее после ограничения неприводимого представления типа α_0 группы S_n на $S[C'_i]$. Отсюда вытекает [4], [6], что типу β_i отвечает схема Юнга $Y(\beta_i)$ из $t_i = |C'_i|$ клеток, полученная из отвечающей типу α_0 схемы Юнга $Y(\alpha_0)$ удалением $n - t_i$ “крайних” клеток из соответствующих строк или столбцов. Следовательно, схема $Y(\beta_i)$ не может содержать больше столбцов и строк, чем $Y(\alpha_0)$, т.е. $\beta_i \in E_{t_i}(k)$. Из этого факта и из того, что операторы $H[C'_i]$ и H_{t_i} унитарно эквивалентны, имеем⁴⁾

$$\inf H^{(\beta_i)}[C'_i] \geq \inf H_{t_i}(k). \quad (3.7)$$

В силу (3.3), (3.5)–(3.7)

$$\inf H_n(k) \geq \sum_{i=1}^m \inf H_{t_i}(k), \quad (3.8)$$

где, очевидно, $\sum_{i=1}^m t_i = n$.

3.4. Если для некоторого i выполняется неравенство $t_i \geq n_0$, то по предположению п. 3.2 система t_i частиц k -неустойчива. Применяя к этой системе подход, который в п. 3.3 был применен к системе Z_n , убеждаемся в существовании такого разбиения $t_i = t_{i1} + t_{i2} + \dots + t_{is_i}$ числа t_i , что справедлива аналогичная (3.8) оценка

$$\inf H_{t_i}(k) \geq \sum_{j=1}^{s_i} \inf H_{t_{ij}}(k), \quad (3.9)$$

где $1 \leq t_{ij} < t_i$, $s_i \geq 2$.

Применяя этот подход сначала для всех операторов $H_{t_i}(k)$, $t_i \geq n_0$, потом для всех операторов $H_{t_{ij}}(k)$, $t_{ij} \geq n_0$, и т.д. и подставляя полученные оценки в (3.8), мы получим после конечного числа шагов неравенство

$$\inf H_n(k) \geq \sum_{i=1}^p \inf H_{n_i}(k), \quad (3.10)$$

где $n_i < n_0$, $i = 1, 2, \dots, p$, $\sum_{i=1}^p n_i = n$.

Пусть $d_1 = \min_{l < n_0} \inf H_l(k)$. Тогда в силу (3.10) для любого $n \geq n_0$ выполняется соотношение

$$\inf H_n(k) \geq -n|d_1|. \quad (3.11)$$

⁴⁾Нас не должен беспокоить случай $t_i < k$, так как величина k ограничивает число столбцов (или строк) в возможных схемах Юнга лишь сверху.

3.5. Далее мы для каждого $n \gg 1$ построим такую нормированную функцию $\tilde{\psi}_n(r)$ из пространства $B_n(k)$, что

$$(H_n(k)\tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n) \leq -d_2 n^2, \quad (3.12)$$

где $d_2 > 0$, d_2 не зависит от n . Тогда в силу (3.11), (3.12) при всех n , $n \geq n_0$, $n \gg 1$, будет выполнена оценка

$$-|d_1|n^{-1} \leq -d_2,$$

которая справедлива для всех n лишь при $d_2 \leq 0$. Но $d_2 > 0$. Из полученного противоречия будет вытекать, что неравенство (3.11) не имеет места, поэтому лежащее в основе его вывода предположение о k -неустойчивости систем Z_n при всех $n \geq n_0$ для какого-либо n_0 неверно. Отсюда будет следовать первое утверждение теоремы 2.2. Второе утверждение, неравенство (2.10), будет доказано в п. 3.11.

3.6. Переходим к построению функций $\tilde{\psi}_n(r)$, для которых верно неравенство (3.12). Пусть $\varphi_t(u)$, $u \in \mathbb{R}^3$, $t = 1, 2, \dots, n$, – финитные ортонормированные в $\mathbb{R}^3$ функции из $W_2^1(\mathbb{R}^3)$. Положим

$$\psi_n(r) = \prod_{t=1}^n \varphi_t(r_t).$$

Пусть $\chi_g^{(\alpha)}$ и l_α – характер и размерность представления типа $\alpha \in E_n(k)$. Как известно [6], проекторы $P_n^{(\alpha)}$ (см. п. 1.5) имеют вид

$$P_n^{(\alpha)}\psi(r) = \frac{l_\alpha}{n!} \sum_{g \in S_n} \bar{\chi}_g^{(\alpha)} \psi(g^{-1}r).$$

Положим $\tilde{\psi}_n(r) = \|P_n^{(\alpha)}\psi_n\|^{-1} P_n^{(\alpha)}\psi_n$ и докажем, что при подходящем выборе функций $\varphi_t(r_t)$ неравенство (3.12) будет выполняться. Нам необходимо оценить сверху величины $(P_n^{(\alpha)}\psi_n, P_n^{(\alpha)}\psi_n)$, $(K_n P_n^{(\alpha)}\psi_n, P_n^{(\alpha)}\psi_n)$ и $(V_n P_n^{(\alpha)}\psi_n, P_n^{(\alpha)}\psi_n)$, для чего полезны следующие соотношения:

$$(\psi_n(r), \psi_n(g^{-1}r)) = 0, \quad g \neq e, \quad g \in S_n, \quad (3.13)$$

$$(K(r_i)\psi_n(r), \psi_n(g^{-1}r)) = 0, \quad g \neq e, \quad g \in S_n, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.14)$$

$$(V(|r_i - r_j|)\psi_n(r), \psi_n(g^{-1}r)) = 0, \quad g \neq e, \quad g \neq g_{ij}, \quad g \in S_n, \quad (3.15)$$

где e – единичный элемент S_n , $g_{ij} = \begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix} \in S_n$.

Докажем эти соотношения. Пусть

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Тогда, очевидно,

$$\psi_n(g^{-1}r) = \prod_{s=1}^n \varphi_{t_s}(r_s).$$

Если $g \neq e$, то найдутся p, q такие, что $t_p \neq p, t_q \neq q$, и (3.13) будет выполняться, например, как следствие равенства

$$(\varphi_p(r_p), \varphi_{t_p}(r_p))_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.17)$$

Далее, поскольку оператор $K(r_i)$ действует только на функцию $\varphi_i(r_i)$, то (3.14) при $p \neq i$ будет следовать из (3.17), а при $p = i$ – из равенства

$$(\varphi_q(r_q), \varphi_{t_q}(r_q))_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (3.18)$$

Теперь проверим (3.15). Так как $g \neq g_{ij}$, то $g^{-1} \neq g_{ij}$. Пусть сначала в (3.16) $t_i = i, t_j = j$ или $t_i = j, t_j = i$. Так как $g \neq e, g \neq g_{ij}$, в рассматриваемом случае существует $p \neq i, j$ такое, что $t_p \neq p, i, j$. Поэтому будет верно (3.17), а следовательно, и (3.15). Если $t_i = i, t_j = q \neq i, j$, или $t_i = j, t_j = q \neq i, j$, или $t_i = q \neq i, j$, то $t_q \neq q$. Поэтому будет верно (3.18), а значит, и (3.15). Таким образом равенства (3.13)–(3.15) доказаны.

3.7. Из (3.13)–(3.15), поскольку $P_n^{(\alpha)} K_n(r) = K_n(r) P_n^{(\alpha)}, P_n^{(\alpha)} V_n(r) = V_n(r) P_n^{(\alpha)}$, имеем

$$\begin{aligned} (P_n^{(\alpha)} \psi_n, P_n^{(\alpha)} \psi_n) &= (\psi_n, P_n^{(\alpha)} \psi_n) = \frac{l_\alpha^2}{n!} \|\psi_n\|^2 = \frac{l_\alpha^2}{n!}, \\ (K_n P_n^{(\alpha)} \psi_n, P_n^{(\alpha)} \psi_n) &= (K_n \psi_n, P_n^{(\alpha)} \psi_n) = \frac{l_\alpha^2}{n!} (K_n \psi_n, \psi_n), \\ (V_n P_n^{(\alpha)} \psi_n, P_n^{(\alpha)} \psi_n) &= (V_n \psi_n, P_n^{(\alpha)} \psi_n) = \\ &= \sum_{\substack{s, t=1, \\ s < t}}^n (V(|r_s - r_t|) \psi_n, l_\alpha \psi_n + \bar{\chi}_{gst}^{(\alpha)} \psi(g_{st} r)) \frac{l_\alpha}{n!}. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $\tilde{\psi}_n = \|P_n^{(\alpha)} \psi_n\|^{-1} P_n^{(\alpha)} \psi_n$, получим равенства

$$(K_n \tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n) = (K_n \psi_n, \psi_n), \quad (3.19)$$

$$(V_n \tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n) = \sum_{\substack{s, t=1, \\ s < t}}^p J_{st}, \quad (3.20)$$

где

$$J_{st} = (V(|r_s - r_t|) \psi_n, \psi_n + \theta_n(\alpha) \psi_n(g_{st} r)), \quad \theta_n(\alpha) = \frac{1}{l_\alpha} \bar{\chi}_{gst}^{(\alpha)}.$$

3.8. Далее определим функции $\varphi_t(r_t)$ (см. п. 3.6) так же, как в [1]. А именно, пусть число A таково, что выполняется неравенство (2.8), $p \geq 1$ и $\omega \gg 1$ – целые числа. Положим

$$\begin{aligned} f_p(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{A}} \sin \frac{2\pi p \omega}{A} x_1 \quad \text{при } |x_1| \leq A, & f_p(x_1) &\equiv 0 \quad \text{при } |x_1| \geq A, \\ f_{ijk}(r_s) &= f_i(x_s) f_j(y_s) f_k(z_s), & s &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Для каждого n укажем число $\bar{n}$ такое, что $\bar{n}^3 \leq n < (\bar{n} + 1)^3$, и выберем тройки натуральных чисел i_t, j_t, k_t так, что $1 \leq i_t, j_t, k_t \leq \bar{n} + 1$, $(i_t, j_t, k_t) \neq (i_s, j_s, k_s)$ при $t \neq s$. Пусть

$$\varphi_t(r_t) = f_{i_t j_t k_t}(r_t), \quad \psi_n = \prod_{t=1}^n \varphi_t(r_t).$$

Тогда в силу неравенств (2.9) из работы [1] и формулы (3.19)

$$(K_n \tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n) \leq cn^{5/3}, \quad (3.21)$$

где c – константа, не зависящая от n .

3.9. Оценим теперь произвольное слагаемое J_{st} в сумме (3.20). Очевидно,

$$J_{st} = J_{st}^0 + \theta_n(\alpha) J_{st}^1, \quad (3.22)$$

где

$$J_{st}^0 = \int_{r_s, r_t \in C(A)} V(|r_s - r_t|) \varphi_s^2(r_s) \varphi_t^2(r_t) dr_s dr_t,$$

$$J_{st}^1 = \int_{r_s, r_t \in C(A)} V(|r_s - r_t|) \varphi_s(r_s) \varphi_t(r_t) \varphi_s(r_t) \varphi_t(r_s) dr_s dr_t.$$

Оценим сначала величину $\theta(\alpha)$. Пусть $\alpha = \alpha(n_1, \dots, n_p)$ (см. п. 1.5). Тогда согласно равенству (5.6) из [4]

$$\theta_n(\alpha) \equiv \frac{1}{l_\alpha} \chi_{gst}^{(\alpha)} = \sum_{m=1}^p \frac{n_m(n_m - 2m + 1)}{n(n - 1)},$$

где $\sum_{m=1}^p n_m \equiv n$, $n_m \geq 1$. Так как $\alpha \in E_n(k)$, то либо $p \leq k$ (случай бозонов), либо $n_m \leq k$, $m = 1 \dots p$ (случай фермионов). Поэтому при фиксированном k

$$\sup_n \sup_{\alpha \in E_n(k)} |\theta_n(\alpha)| < +\infty. \quad (3.23)$$

Далее заметим, что функционалы J_{sp}^j , $j = 0, 1$, зависят от параметра ω , входящего в функции φ_t и φ_s (см. п. 3.8). Согласно [1] при большом ω и всех n

$$J_{st}^0 = J_{st}^0(\omega) \leq a\delta, \quad (3.24)$$

где число $a > 0$ и не зависит ни от n , ни от ω .

3.10. Для оценки $J_{st}^1 = J_{st}^1(\omega)$ воспользуемся тем, что при $r_s, r_t \in C(A)$

$$W_{st}(r_s, r_t, \omega) := \varphi_s(r_s) \varphi_t(r_s) \varphi_s(r_t) \varphi_t(r_t) =$$

$$= \frac{1}{(2A)^6} \prod_{m=1}^6 \left(\cos \frac{2\pi d_m^- \omega \xi_m}{A} - \cos \frac{2\pi d_m^+ \omega \xi_m}{A} \right), \quad (3.25)$$

где $d_1^\pm = (i_s \pm i_t)$, $d_2^\pm = (j_s \pm j_t)$, $d_3^\pm = (k_s \pm k_t)$, $d_m^\pm = d_{m-3}^\pm$, $m = 4, 5, 6$, $\xi_1 = x_s$, $\xi_2 = y_s$, $\xi_3 = z_s$, $\xi_4 = x_t$, $\xi_5 = y_t$, $\xi_6 = z_t$. Поэтому

$$W_{st}(r_s, r_t, \omega) = \sum_{l=1}^{64} W_l(r_s, r_t, \omega),$$

где

$$W_l(r_s, r_t, \omega) = \frac{\gamma_l}{(2A)^6} \prod_{m=1}^6 \cos \frac{2\pi}{A} d_{lm} \omega \xi_m, \quad \gamma_l = \pm 1, \quad d_{lm} = d_m^\pm.$$

По построению $(i_s, j_s, k_s) \neq (i_t, j_t, k_t)$, следовательно, для каждого l найдется такое $m_0 = m_0(l)$, что $|d_{lm_0}| \geq 1$. Учитывая это и то, что $V(|r_1|) \in \mathcal{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, имеем

$$\int_{r_s, r_t \in C(A)} V(|r_s - r_t|) W_l(r_s, r_t, \omega) dr_s dr_t \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \infty$$

в силу неравенства Бесселя. Отсюда и из (3.23) вытекает, что при больших ω

$$|\theta_n(\alpha) J_{st}^1(\omega)| \leq \frac{a}{2} |\delta|$$

и в силу (3.24) справедливо неравенство $J_{st}(\omega) < a\delta/2$. Таким образом, из (3.20) следует, что

$$(V_n \tilde{\psi}_n, \tilde{\psi}_n) \leq c_0 n^2 \delta, \quad (3.26)$$

где $c_0 > 0$ и не зависит от n .

Из неравенств (3.21) и (3.26) вытекает (3.12), и тем самым первое утверждение теоремы 2.2 доказано.

3.11. Итак, мы доказали существование такой последовательности чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_s < n_{s+1} < \dots$, что система Z_{n_s} k -устойчива, $s = 1, 2, \dots$. Не ограничивая общности, считаем, что $n_s < n_{s+1} - 1$. Тогда система из $N = n_{s+1} - 1$ частиц будет k -неустойчива. Повторяя рассуждения п. 3.3, 3.4 с подстановкой n_s вместо n_0 и учитывая (3.12), (3.9), мы придем к оценке

$$-d_2 N^2 \geq \inf H_N(k) \geq \sum_{i=1}^m \inf H_{t_i}(k), \quad (3.27)$$

где $\sum_{i=1}^m t_i = N$, $t_i \leq n_s$. Вследствие (2.9)

$$\inf H_{t_i}(k) \geq -d_0 t_i^2. \quad (3.28)$$

В силу (3.27), (3.28)

$$N^2 \leq d_3 \sum_{i=1}^m t_i^2, \quad (3.29)$$

где $d_3 > 0$ и не зависит от m , N и n_s . Здесь $\sum_{i=1}^m t_i = N$, $t_i \leq n_s$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Пусть теперь $t_p = \min_i t_i$ и $t_j < n_s$, $j \neq p$. Построим новое разбиение $\tau' = (t'_1, \dots, t'_m)$, полагая $t'_i = t_i$, $i \neq p, j$, $t'_p = t_p - 1$, $t'_j = t_j + 1$. Очевидно, что в разбиении τ' и в некоторых других в последующих рассуждениях возможно обращение в нуль отдельных слагаемых (в τ' имеем $t'_p = 0$ при $t_p = 1$). Ясно, что для разбиения τ'

$$\sum_{i=1}^m (t'_i)^2 \geq \sum_{i=1}^m t_i^2, \quad \sum_{i=1}^m t'_i = N, \quad t'_i \leq n_s, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Пусть далее $t'_{p'} = \min_{i, t'_i > 0} t'_i$ и $t'_{j'} \neq 0$, $t'_{j'} < n_s$, $j' \neq p'$. Построим разбиение $\tau'' = (t''_1, \dots, t''_m)$, где $t''_i = t'_i$ при $i \neq p', j'$, $t''_{p'} = t'_{p'} - 1$, $t''_{j'} = t'_{j'} + 1$.

Тогда, очевидно,

$$\sum_{i=1}^m (t''_i)^2 \geq \sum_{i=1}^m (t'_i)^2, \quad \sum_{i=1}^m t''_i = N, \quad t''_i \leq n_s.$$

Продолжая подобные рассуждения, мы после конечного числа шагов придем к разбиению $\tilde{\tau} = (\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{m_1})$, для которого

$$\sum_{i=1}^{m_1} \tilde{t}_i^2 \geq \sum_{i=1}^m t_i^2 \quad (3.30)$$

и все числа $\tilde{t}_i$, кроме, быть может, одного, скажем $\tilde{t}_{m_1}$, равны n_s , $0 \leq \tilde{t}_{m_1} \leq n_s$, а $(m_1 - 1)n_s + \tilde{t}_{m_1} = N$. Отсюда следует, что $m_1 \leq Nn_s^{-1} + 1$, поэтому в силу (3.29), (3.30)

$$N^2 \leq d_3 n_s^2 (Nn_s^{-1} + 1).$$

Из данного неравенства вытекает (2.10).

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 05-01-00299).

Список литературы

- [1] Г. М. Жислин, *ТМФ*, **152**:3 (2007), 528–537.
- [2] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, *ТМФ*, **76**:1 (1988), 132–142.
- [3] R. Lewis, H. Siedentop, S. A. Vugalter, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **67**:1 (1997), 1–28.
- [4] Ф. Мурнаган, *Теория представлений групп*, ИЛ, М., 1950.
- [5] М. Хамермеш, *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, Мир, М., 1966.
- [6] Е. Вигнер, *Теория групп и ее приложение к квантомеханической теории атомных спектров*, ИЛ, М., 1961.
- [7] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, *ТМФ*, **121**:2 (1999), 297–306.
- [8] E. Lieb, D. Matiss, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 749–751.
- [9] G. M. Zhislin, *SIGMA*, **2** (2006), 024; [arXiv:math-ph/0602050](https://arxiv.org/abs/math-ph/0602050).

Поступила в редакцию 28.12.2007