Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ван Хун-Янь, Уравнение Нижника–Веселова–Новикова
с самосогласованными источниками, *ТМФ*, 2008, том 157,
номер 1, 130–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:53:23

© 2008 г.

Ван Хун-Янь*

УРАВНЕНИЕ НИЖНИКА–ВЕСЕЛОВА–НОВИКОВА С САМОСОГЛАСОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Связанное обобщение уравнения Нижника–Веселова–Новикова, т.е. уравнение Нижника–Веселова–Новикова с самосогласованными источниками, построено и решено с помощью так называемой процедуры порождения источника. Получены пфаффианные решения уравнений Нижника–Веселова–Новикова ВКП- и ДКП-типов. Дополнительно приведены билинейное преобразование Беклунда и пара Лакса для уравнения Нижника–Веселова–Новикова с самосогласованными источниками, данная пара Лакса может быть сведена к паре Лакса для обычного уравнения Нижника–Веселова–Новикова.

Ключевые слова: уравнение Нижника–Веселова–Новикова, самосогласованные источники, процедура “порождения источника”, преобразование Беклунда, пара Лакса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитонные уравнения с самосогласованными источниками (СУССИ) могут описывать различные нелинейные динамические системы. Например, в нелинейной интегрируемой системе, описываемой уравнением Кадомцева–Петвиашвили (КП) с самосогласованным источником, были найдены уединенные волны, движущиеся с непостоянной скоростью; полученные результаты тесно связаны с некоторыми задачами физики состояния, физики плазмы, гидродинамики и т.п. [1], [2]. СУССИ широко изучались с помощью обратного преобразования рассеяния, преобразования Дарбу и билинейного метода Хироты [3]–[6]. Совсем недавно в работе [7] автором настоящей статьи и ее коллегой была предложена так называемая процедура “порождения источника” для построения и решения СУССИ на основе билинейной формы Хироты. Три ключевых шага, составляющих эту процедуру, таковы.

1. Записать N -солитонные решения билинейного солитонного уравнения без источников в виде определителя или пфаффиана с некоторыми параметрами, т.е. с произвольными константами $c_{i,j}$.

*School of Information, Renmin University of China; Institute of Computational Mathematics and Scientific Engineering Computing, AMSS, Chinese Academy of Sciences; Graduate University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing, China. E-mail: wanghy@lsec.cc.ac.cn

2. Ввести соответствующие определители или пфаффианы с некоторыми новыми параметрами, скажем произвольными функциями $c_{i,j}(t)$ от одной независимой переменной.

3. Найти связанные билинейные уравнения, решениями которых являются эти новые обобщенные определители или пфаффианы. Данная связанная система и есть система СУССИ.

Предложенная процедура успешно применялась к уравнениям АКП-типа и ВКП-типа как в непрерывном, так и в дискретном случае [7]–[9]. С другой стороны, уравнение Нижника–Веселова–Новикова (НВН) [10], [11]

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xxx} + v_{yyy} + 3(uv)_x + 3(\bar{u}v)_y, \\ u_y &= v_x, \quad \bar{u}_x = v_y, \end{aligned} \quad (1)$$

где нижние индексы обозначают дифференцирование по указанным переменным, является $(2+1)$ -мерным обобщением хорошо известного уравнения Кортевега–де Фриза, отличного от уравнения КП [12]. Для уравнения НВН получено значительное число результатов с использованием обратного преобразования рассеяния, билинейного метода Хироты и т.д. [13]–[20]. Уравнение НВН можно рассматривать как член двухкомпонентной ДКП-иерархии билинейных уравнений или двухкомпонентной ВКП-иерархии билинейных уравнений [21], [22]; решения уравнения НВН ДКП-типа и пфаффианные решения ВКП-типа были получены в работе [21]. Известно, что уравнение КП допускает два типа обобщений: пфаффианизированное уравнение КП (с помощью процедуры пфаффианизации) [23] и КПУССИ [2]. Поэтому представляет интерес исследовать обобщения уравнения НВН. Цель данной работы – построение и решение НВНУССИ с помощью процедуры порождения источника.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 процедура порождения источника применена к уравнению НВН и получено пфаффианное решение НВНУССИ ДКП-типа. В разделе 3 выведено пфаффианное решение НВНУССИ ВКП-типа. В разделе 4 приведены билинейное преобразование Беклунда и пара Лакса для НВНУССИ. Наконец, раздел 5 содержит заключение и обсуждение.

2. КОНСТРУКЦИЯ НВНУССИ И ЕГО ПФАФФИАННОЕ РЕШЕНИЕ ДКП-ТИПА

В работе [21] представлены билинейная форма уравнения НВН и его пфаффианное решение ДКП-типа. Здесь мы приведем эквивалентный билинейный вид решения уравнения НВН ДКП-типа. Если применить преобразование зависимых переменных

$$v = 2(\ln \tau)_{xy}, \quad u = 2(\ln \tau)_{xx}, \quad \bar{u} = 2(\ln \tau)_{yy}$$

и ввести вспомогательную переменную s , то уравнение НВН преобразуется к билинейному виду

$$D_y(D_x^3 - D_t + D_s)\tau \cdot \tau = 0, \quad (2)$$

$$D_x(D_y^3 - D_s)\tau \cdot \tau = 0, \quad (3)$$

где D обозначает билинейный оператор Хироты [23]:

$$D_x^n D_y^m a \cdot b = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^m a(x, y) b(x', y') \Big|_{x'=x, y'=y}.$$

Билинейные уравнения (2), (3) имеют следующее пфаффианное решение ДКП-типа:

$$\tau = \text{pf}(1, 2, \dots, 2N) \triangleq \text{pf}(\cdot), \quad (4)$$

причем элементы пфаффиана определяются как

$$\text{pf}(i, j) = c_{i,j} + \int_{-\infty}^x D_x \varphi_i \cdot \varphi_j dx - \int_{-\infty}^y D_y \psi_i \cdot \psi_j dy + \varphi_i \psi_j - \varphi_j \psi_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

где $c_{i,j} = -c_{j,i}$ – константы, а $\varphi_i = \varphi_i(x, t)$, $\psi_i = \psi_i(y, s, t)$ удовлетворяют линейным дисперсионным соотношениям

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = \frac{\partial^3 \psi_i}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial s} = \frac{\partial^3 \psi_i}{\partial y^3}. \quad (5)$$

Мы здесь предполагаем, что φ_i и ψ_i вместе со своими производными стремятся к нулю при $x \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow -\infty$ соответственно. Докажем теперь, что так определенная функция τ действительно является решением уравнений (2), (3). Известно [21], что τ удовлетворяет уравнению (3), поэтому надо только доказать, что τ удовлетворяет уравнению (2). Для этого введем новые элементы пфаффиана:

$$\text{pf}(d_m, i) = \frac{\partial^m \varphi_i}{\partial x^m}, \quad \text{pf}(c_n, i) = \frac{\partial^n \psi_i}{\partial y^n}, \quad \text{pf}(d_m, d_n) = \text{pf}(c_m, c_n) = \text{pf}(d_m, c_n) = 0,$$

где $m, n \in \mathbb{Z}$ и $i = 1, 2, \dots, 2N$. Тогда имеем дифференциальные формулы

$$\begin{aligned} \tau_{xxx} &= \text{pf}(c_0 + d_0, d_3, \cdot) + \text{pf}(d_1, d_2, \cdot), \\ \tau_s &= \text{pf}(c_3, c_0 + d_0, \cdot) + 2\text{pf}(c_1, c_2, \cdot), \\ \tau_t &= \text{pf}(c_0 + d_0, d_3, \cdot) + \text{pf}(c_3, c_0 + d_0, \cdot) - 2\text{pf}(d_1, d_2, \cdot) + 2\text{pf}(c_1, c_2, \cdot), \end{aligned}$$

где $\text{pf}(c_0 + d_0, a) = \text{pf}(c_0, a) + \text{pf}(d_0, a)$, $\text{pf}(a, c_0 + d_0) = \text{pf}(a, c_0) + \text{pf}(a, d_0)$. Подстановка полученных результатов в уравнение (2) приводит к пфаффианному тождеству [23]

$$\begin{aligned} &\text{pf}(c_1, c_0 + d_0, d_1, d_2, \cdot) \text{pf}(\cdot) - \text{pf}(d_1, d_2, \cdot) \text{pf}(c_1, c_0 + d_0, \cdot) + \\ &+ \text{pf}(c_0 + d_0, d_2, \cdot) \text{pf}(c_1, d_1, \cdot) - \text{pf}(c_1, d_2, \cdot) \text{pf}(c_0 + d_0, d_1, \cdot) = 0, \end{aligned}$$

из которого следует, что уравнение (2) выполнено. Тем самым, функция τ , заданная формулой (4), является пфаффианным решением уравнений (2), (3) ДКП-типа.

Применим далее процедуру порождения источника к билинейному уравнению НВН (2), (3). Сначала заменим функцию τ на пфаффиан

$$f = \text{pf}_1(1, 2, \dots, 2N) \triangleq \text{pf}_1(\cdot), \quad (6)$$

элементы которого определяются как

$$\text{pf}_1(i, j) = C_{i,j}(t) + \int_{-\infty}^x D_x \varphi_i \cdot \varphi_j dx - \int_{-\infty}^y D_y \psi_i \cdot \psi_j dy + \varphi_i \psi_j - \varphi_j \psi_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

причем $C_{i,j}(t) = -C_{j,i}(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$C_{i,j}(t) = \begin{cases} C_i(t), & j = 2N + 1 - i, \quad 1 \leq i \leq M \leq N, \\ c_{i,j}, & j \neq 2N + 1 - i, \quad 1 \leq i < j \leq N, \end{cases}$$

где $C_i(t)$ – произвольная функция переменной t . Следуя процедуре порождения источника, введем новые функции

$$g_i = \sqrt{2\dot{C}_i(t)} \text{pf}_1(c_0 + d_0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, 2N), \quad (7)$$

$$h_i = \sqrt{2\dot{C}_i(t)} \text{pf}_1(c_0 + d_0, 1, \dots, \widehat{2N + 1 - i}, \dots, 2N), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (8)$$

где элементы нового пфаффиана определяются как

$$\text{pf}_1(d_m, i) = \frac{\partial^m \varphi_i}{\partial x^m}, \quad \text{pf}_1(c_n, i) = \frac{\partial^n \psi_i}{\partial y^n},$$

$$\text{pf}_1(d_m, d_n) = \text{pf}_1(c_m, c_n) = \text{pf}_1(d_m, c_n) = 0.$$

Точка обозначает производную по t , а шляпка над аргументом указывает на удаление этого аргумента. Можно показать, что так определенные f , g_i и h_i удовлетворяют следующим билинейным уравнениям:

$$D_y(D_x^3 - D_t + D_s)f \cdot f = \sum_{i=1}^M D_y g_i \cdot h_i, \quad (9)$$

$$D_x(D_y^3 - D_s)f \cdot f = 0, \quad (10)$$

$$D_x D_y g_i \cdot f = 0, \quad (11)$$

$$D_x D_y h_i \cdot f = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (12)$$

Действительно, функция f , очевидно, удовлетворяет уравнению (10), поэтому надо только проверить, что f , g_i и h_i удовлетворяют уравнениям (9) и (11), (12). Для упрощения доказательства положим

$$\tilde{g}_j = \text{pf}_1(c_0 + d_0, 1, \dots, \hat{j}, \dots, 2N), \quad j = 1, 2, \dots, 2N.$$

Тогда имеем дифференциальные формулы

$$\begin{aligned} f_t &= \sum_{i=1}^M \text{pf}_1(1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{2N + 1 - i}, \dots, 2N) + \\ &\quad + \text{pf}_1(c_0 + d_0, d_3, \cdot) + \text{pf}_1(c_3, c_0 + d_0, \cdot) - 2\text{pf}_1(d_1, d_2, \cdot) + 2\text{pf}_1(c_1, c_2, \cdot), \end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{j,y} = \text{pf}_1(c_1, 1, \dots, \hat{j}, \dots, 2N),$$

$$\tilde{g}_{j,x} = \text{pf}_1(d_1, 1, \dots, \hat{j}, \dots, 2N),$$

$$\tilde{g}_{j,xy} = \text{pf}_1(c_1, c_0 + d_0, d_1, 1, \dots, \hat{j}, \dots, 2N).$$

Подставляя полученные результаты в уравнения (9), (11) и уравнение (12), получаем соответственно следующие пфаффианные тождества:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \dot{C}_i(t) [& \text{pf}_1(c_1, c_0 + d_0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{2N+1-i}, \dots, 2N) \text{pf}_1(\cdot) - \\ & - \text{pf}_1(c_1, c_0 + d_0, \cdot) \text{pf}_1(1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{2N+1-i}, \dots, 2N) + \\ & + \text{pf}_1(c_1, 1, \dots, \hat{i}, \dots, 2N) \text{pf}_1(c_0 + d_0, 1, \dots, \widehat{2N+1-i}, \dots, 2N) - \\ & - \text{pf}_1(c_1, 1, \dots, \widehat{2N+1-i}, \dots, 2N) \text{pf}_1(c_0 + d_0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, 2N)] = 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{C}_j(t) [& \text{pf}_1(c_1, c_0 + d_0, d_1, *) \text{pf}_1(\cdot) - \text{pf}_1(d_1, *) \text{pf}_1(c_1, c_0 + d_0, \cdot) - \\ & - \text{pf}_1(c_1, *) \text{pf}_1(c_0 + d_0, d_1, \cdot) + \text{pf}_1(c_0 + d_0, *) \text{pf}_1(c_1, d_1, \cdot)] = 0, \end{aligned}$$

где $*$ обозначает $1, \dots, \hat{j}, \dots, 2N$. Таким образом, уравнения (9), (11) и (12) выполнены. Тем самым f , g_i и h_i из (6)–(8) составляют пфаффианное решение уравнений (9)–(12) ДКП-типа, а уравнения (9)–(12) представляют собой НВНУССИ в билинейном виде.

Применяя преобразование зависимых переменных

$$v = 2(\ln f)_{xy}, \quad u = 2(\ln f)_{xx}, \quad \bar{u} = 2(\ln f)_{yy}, \quad \Phi_i = \frac{g_i}{f}, \quad \Psi_i = \frac{h_i}{f},$$

преобразуем билинейные формы (9)–(12) к нелинейным уравнениям

$$\begin{aligned} v_t = v_{xxx} + v_{yyy} + 3(uv)_x + 3(\bar{u}v)_y + \sum_{i=1}^M (\Phi_{i,x} \Psi_{i,y} - \Phi_{i,y} \Psi_{i,x} + \Phi_i \Psi_{i,xy} - \Phi_{i,xy} \Psi_i), \\ u_y = v_x, \quad \bar{u}_x = v_y, \\ \Phi_{i,xy} = -v \Phi_i, \quad \Psi_{i,xy} = -v \Psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \tag{13}$$

Если положить $\Phi_i = \Psi_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, M$, то уравнения (13) редуцируются к уравнению НВН (1), а билинейные формы (9)–(12) преобразуются в билинейные уравнения НВН (2), (3). Соответственно, решение уравнений (9)–(12) есть решение уравнений (2), (3).

3. ПФАФФИАННОЕ РЕШЕНИЕ НВНУССИ ВКП-ТИПА

В этом разделе мы приведем пфаффианные решения НВНУССИ (13) ВКП-типа. Для этого введем следующее преобразование зависимых переменных:

$$v = 2(\ln F)_{xy} - 1, \quad u = 2(\ln F)_{xx}, \quad \bar{u} = 2(\ln F)_{yy}, \quad \Phi_i = \frac{G_i}{F}, \quad \Psi_i = \frac{H_i}{F}.$$

Тогда НВНУССИ (13) преобразуется в новые билинейные уравнения

$$[D_y(D_x^3 - D_t + D_s) - 3D_x^2]F \cdot F = \sum_{i=1}^M D_y G_i \cdot H_i, \quad (14)$$

$$[D_x(D_y^3 - D_s) - 3D_y^2]F \cdot F = 0, \quad (15)$$

$$(D_x D_y - 1)G_i \cdot F = 0, \quad (16)$$

$$(D_x D_y - 1)H_i \cdot F = 0. \quad (17)$$

Аналогично тому, как это было сделано в разделе 2, можно получить пфаффианное решение уравнений (14)–(17) ВКП-типа. Это пфаффианное решение ВКП-типа записывается как

$$F = \text{pf}_2(1, 2, \dots, 2N) \triangleq \text{pf}_2(\cdot), \quad (18)$$

$$G_i = \sqrt{2\dot{C}_i(t)} \text{pf}_2(d_0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, 2N), \quad (19)$$

$$H_i = \sqrt{2\dot{C}_i(t)} \text{pf}_2(d_0, 1, \dots, \widehat{2N+1-i}, \dots, 2N), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (20)$$

где элементы пфаффиана определены следующим образом:

$$\text{pf}_2(i, j) = C_{i,j}(t) + \int_{-\infty}^x D_x \phi_i \cdot \phi_j dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{pf}_2(d_k, i) = \frac{\partial^k \phi_i}{\partial x^k}, \quad \text{pf}_2(d_k, d_l) = 0, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Здесь каждая $\phi_i = \phi_i(x, y, s, t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial \phi_i^{(l)}}{\partial x_k} = \phi_i^{(l+k)}, \quad \frac{\partial \phi_i^{(l)}}{\partial t} = \phi_i^{(l+3)} + \phi_i^{(l-3)}, \quad x_{-1} = y, \quad x_1 = x, \quad x_{-3} = s, \quad (21)$$

где $\phi_i^{(l)} = \frac{\partial^l \phi_i}{\partial x^l}$, а функции $C_{i,j}(t)$ те же, что были определены выше.

Докажем, что F , G_i и H_i действительно удовлетворяют уравнениям (14)–(17). Для простоты положим

$$\tilde{G}_j = \text{pf}_2(d_0, 1, \dots, \hat{j}, \dots, 2N) \triangleq \text{pf}_2(d_0, *), \quad j = 1, \dots, 2N.$$

Имеем дифференциальные формулы

$$F_s = \text{pf}_2(d_{-3}, d_0, \cdot) - 2\text{pf}_2(d_{-2}, d_{-1}, \cdot), \quad (22)$$

$$F_x = \text{pf}_2(d_0, d_1, \cdot), \quad F_{xx} = \text{pf}_2(d_0, d_2, \cdot), \quad (23)$$

$$F_y = \text{pf}_2(d_{-1}, d_0, \cdot), \quad F_{yy} = \text{pf}_2(d_{-2}, d_0, \cdot), \quad F_{xy} = \text{pf}_2(d_{-1}, d_1, \cdot), \quad (24)$$

$$F_{xxx} = \text{pf}_2(d_0, d_3, \cdot) + \text{pf}_2(d_1, d_2, \cdot), \quad F_{yyy} = \text{pf}_2(d_{-3}, d_0, \cdot) + \text{pf}_2(d_{-2}, d_{-1}, \cdot), \quad (25)$$

$$F_{xxy} = \text{pf}_2(d_0, d_1, \cdot) + \text{pf}_2(d_{-1}, d_2, \cdot), \quad F_{yyx} = \text{pf}_2(d_{-1}, d_0, \cdot) + \text{pf}_2(d_{-2}, d_1, \cdot), \quad (26)$$

$$F_t = \sum_{i=1}^M \text{pf}_2(1, \dots, \hat{i}, \dots, \widehat{2N+1-i}, \dots, 2N) + \\ + \text{pf}_2(d_0, d_3, \cdot) + \text{pf}_2(d_{-3}, d_0, \cdot) - 2\text{pf}_2(d_1, d_2, \cdot) - 2\text{pf}_2(d_{-2}, d_{-1}, \cdot), \quad (27)$$

$$\tilde{G}_{j,x} = \text{pf}_2(d_1, *), \quad \tilde{G}_{j,y} = \text{pf}_2(d_{-1}, *), \quad \tilde{G}_{j,xy} = \tilde{G}_j + \text{pf}_2(d_{-1}, d_0, d_1, *). \quad (28)$$

Подстановка формул (22)–(28) в уравнение (14) приводит к сумме пфаффианных тождеств:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \dot{C}_i(t) & \left[\text{pf}_2(d_{-1}, d_0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, 2N+1-i, \dots, 2N) \text{pf}_2(\cdot) - \right. \\ & - \text{pf}_2(d_{-1}, d_0, \cdot) \text{pf}_2(1, \dots, \hat{i}, \dots, 2N+1-i, \dots, 2N) + \\ & + \text{pf}_2(d_{-1}, 1, \dots, \hat{i}, \dots, 2N) \text{pf}_2(d_0, 1, \dots, 2N+1-i, \dots, 2N) - \\ & \left. - \text{pf}_2(d_{-1}, 1, \dots, 2N+1-i, \dots, 2N) \text{pf}_2(d_0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, 2N) \right] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (14) выполнено. Подстановка (22)–(26) в уравнение (15) приводит к пфаффианному тождеству

$$\begin{aligned} & \text{pf}_2(d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, \cdot) \text{pf}_2(\cdot) - \text{pf}_2(d_{-2}, d_{-1}, \cdot) \text{pf}_2(d_0, d_1, \cdot) + \\ & + \text{pf}_2(d_{-2}, d_0, \cdot) \text{pf}_2(d_{-1}, d_1, \cdot) - \text{pf}_2(d_{-2}, d_1, \cdot) \text{pf}_2(d_{-1}, d_0, \cdot) = 0, \end{aligned}$$

из которого видно, что F удовлетворяет уравнениям (15). Аналогичным образом, подставляя (19), (20) и (28) в уравнения (16) и (17) соответственно, получаем пфаффианное тождество

$$\begin{aligned} & \text{pf}_2(d_{-1}, d_0, d_1, *) \text{pf}_2(\cdot) - \text{pf}_2(d_{-1}, *) \text{pf}_2(d_0, d_1, \cdot) - \\ & - \text{pf}_2(d_1, *) \text{pf}_2(d_{-1}, d_0, \cdot) + \text{pf}_2(d_0, *) \text{pf}_2(d_{-1}, d_1, \cdot) = 0, \end{aligned}$$

из которого видно, что уравнения (16), (17) также выполнены. Итак, F , G_i и H_i , заданные в (18)–(20), являются решением уравнений (14)–(17) ВКП-типа.

4. БИЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕКЛУНДА И ПАРА ЛАКСА ДЛЯ НВНУССИ

В данном разделе мы получим билинейное преобразование Беклунда (ПБ) для билинейного НВНУССИ (9)–(12). Билинейное НВНУССИ (9)–(12) допускает следующее билинейное ПБ:

$$\begin{aligned} D_y g_i \cdot f' &= \lambda_i D_y f \cdot g'_i + \mu g' - \lambda_i \mu f g'_i, \\ D_y f \cdot h'_i &= \lambda_i D_y h_i \cdot f' + \mu f h'_i - \lambda_i \mu h_i f', \\ (D_x - \gamma) g_i \cdot f' &= \lambda_i (\gamma - D_x) f \cdot g'_i, \\ (D_x - \gamma) f \cdot h'_i &= \lambda_i (\gamma - D_x) h_i \cdot f', \\ (D_x D_y + \beta D_y) f \cdot f' &= 0, \quad (D_y^3 - D_s - \alpha) f \cdot f' = 0, \\ (D_x^3 - D_t + D_s + 3\beta D_x^2 + 3\beta^2 D_x + \theta) f \cdot f' &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (\lambda_i^{-1} g_i h'_i - \lambda_i g'_i h_i), \end{aligned} \tag{29}$$

где λ_i , μ , γ , α , β и θ – произвольные константы.

Покажем, что уравнения (29) являются билинейным ПБ для уравнений (9)–(12), т.е. что функции f' , g'_i и h'_i из (29) также удовлетворяют уравнениям (9)–(12). Действительно, используя (29) и билинейные операторные тождества (П.1)–(П.5) из

приложения, легко показать, что

$$\begin{aligned}
 P_i &= (D_x D_y g_i \cdot f) g'_i f' - g_i f (D_x D_y g'_i \cdot f') = \\
 &= \frac{1}{2} D_x [(D_y g_i \cdot f') \cdot f g'_i - g_i f' \cdot (D_y f \cdot g'_i)] + \\
 &\quad + \frac{1}{2} D_y [(D_x g_i \cdot f') \cdot f g'_i - g_i f' \cdot (D_x f \cdot g'_i)] = \\
 &= \frac{\lambda_i}{2} D_x (D_y f \cdot g'_i) \cdot f g'_i - \frac{1}{2\lambda_i} D_x g_i f' \cdot (D_y g_i \cdot f') + \\
 &\quad + \frac{1}{2} D_y [(D_x g_i \cdot f') \cdot f g'_i - g_i f' \cdot (D_x f \cdot g'_i)] = \\
 &= \frac{\lambda_i}{2} D_y (D_x f \cdot g'_i) \cdot f g'_i + \frac{1}{2} D_y (\gamma g_i f' + \lambda_i \gamma f g'_i - \lambda_i D_x f \cdot g'_i) \cdot f g'_i - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \lambda_i^{-1} D_y g_i f' \cdot (D_x g_i \cdot f') - \\
 &\quad - \frac{1}{2} D_y g_i f' \cdot (\gamma f g'_i + \lambda_i^{-1} \gamma g_i f' - \lambda_i^{-1} D_x g_i \cdot f') = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M, \\
 P &= \left[D_y (D_x^3 - D_t + D_s) f \cdot f - \sum_{i=1}^M D_y g_i \cdot h_i \right] (f')^2 - \\
 &\quad - f^2 \left[D_y (D_x^3 - D_t + D_s) f' \cdot f' - \sum_{i=1}^M D_y g'_i \cdot h'_i \right] = \\
 &= 2D_y [(D_x^3 - D_t + D_s + 3\beta D_x^2 + 3\beta^2 D_x) f \cdot f'] \cdot f f' + \sum_{i=1}^M g_i f' (D_y h_i \cdot f') - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^M (D_y g_i \cdot f') h_i f' - \sum_{i=1}^M (D_y f \cdot g'_i) f h'_i + \sum_{i=1}^M f g'_i (D_y f \cdot h'_i) = \\
 &= 2D_y [(D_x^3 - D_t + D_s + 3\beta D_x^2 + 3\beta^2 D_x) f \cdot f'] \cdot f f' + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^M \lambda_i [(D_y h_i \cdot f') f g'_i - (D_y f \cdot g'_i) h_i f'] - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^M \lambda_i^{-1} [(D_y g_i \cdot f') f h'_i - (D_y f \cdot h'_i) g_i f'] = 0.
 \end{aligned}$$

Полученные формулы показывают, что функции f' , g'_i и h'_i удовлетворяют уравнениям (9), (11). Аналогичным образом можно доказать, что уравнения (10), (12) выполнены для функций f' , g'_i и h'_i . Таким образом, уравнения (29) составляют билинейное ПБ для уравнений (9)–(12).

Далее мы выведем пару Лакса для НВУССИ (13) из билинейного ПБ (29). Для этого применим преобразование зависимых переменных

$$\begin{aligned}
 v &= 2(\ln f)_{xy}, & u &= 2(\ln f)_{xx}, & \bar{u} &= 2(\ln f)_{yy}, \\
 \phi &= \frac{f'}{f}, & \Phi_i &= \frac{g_i}{f}, & \Psi_i &= \frac{h_i}{f}, & \phi_{i,1} &= \frac{g'_i}{g_i}, & \phi_{i,2} &= \frac{h'_i}{h_i}
 \end{aligned}$$

и положим $\mu = 0$ и $\gamma + \beta = 0$; тогда из ПБ (29) получаем следующую пару Лакса для НВНУССИ (13):

$$\begin{aligned}
 \phi_{xy} &= -\phi v - \gamma \phi_y, \\
 \phi_t &= \phi_{xxx} + \phi_{yyy} + 3u\phi_x + 3w\phi_y + 3\gamma^2\phi_x + \\
 &\quad + 3\gamma\phi_{xx} + \left((\theta - 3\gamma u)\phi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \Phi_i \Psi_i (\lambda_i^{-1} \phi_{i,2} - \lambda_i \phi_{i,1}) \right), \\
 \frac{\partial \phi_{i,1}}{\partial y} &= -\frac{\Phi_{i,y}}{\Phi_i} \phi_{i,1} - \lambda_i^{-1} \frac{\Phi_{i,y}}{\Phi_i} \phi + \lambda_i^{-1} \phi_y, \\
 \frac{\partial \phi_{i,1}}{\partial x} &= -\left(\gamma + \frac{\Phi_{i,x}}{\Phi_i} \right) \phi_{i,1} - \lambda_i^{-1} \left(\gamma - \frac{\Phi_{i,y}}{\Phi_i} \right) \phi + \lambda_i^{-1} \phi_x, \\
 \frac{\partial \phi_{i,2}}{\partial y} &= -\frac{\Psi_{i,y}}{\Psi_i} \phi_{i,2} - \lambda_i \frac{\Psi_{i,y}}{\Psi_i} \phi + \lambda_i \phi_y, \\
 \frac{\partial \phi_{i,2}}{\partial x} &= -\left(\gamma + \frac{\Psi_{i,x}}{\Psi_i} \right) \phi_{i,2} - \lambda_i \left(\gamma - \frac{\Psi_{i,y}}{\Psi_i} \right) \phi + \lambda_i \phi_x,
 \end{aligned} \tag{30}$$

где λ_i , γ и θ – произвольные константы. Условие совместности спектральных функций ϕ , $\phi_{i,1}$ и $\phi_{i,2}$ из (30) дает в точности НВНУССИ (13).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЯ

В данной работе мы применили процедуру порождения источника к уравнению НВН. В результате было выведено НВНУССИ и получены пфаффианные решения ДКП- и ВКП-типов. Если положить каждую $C_i(t)$ постоянной, то источники окажутся равными нулю и НВНУССИ (13) редуцируется к уравнению НВН (1), а решения НВНУССИ ДКП- и ВКП-типов редуцируются к решениям уравнения НВН без источников ДКП- и ВКП-типов соответственно. Более того, мы привели билинейное ПБ для НВНУССИ и получили пару Лакса для НВНУССИ. Если положить $\phi_{i,1} = 0$ и $\phi_{i,2} = 0$, а также $\lambda_i = 0$, то пара Лакса (30) примет вид

$$\begin{aligned}
 \phi_{xy} &= -\phi v - \gamma \phi_y, \\
 \phi_t &= \phi_{xxx} + \phi_{yyy} + 3u\phi_x + 3w\phi_y + 3\gamma^2\phi_x + 3\gamma\phi_{xx} + (\theta - 3\gamma u)\phi.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Приведенное выражение в точности задает пару Лакса для уравнения НВН (1). Заметим, что аналогично тому, как это делалось в разделе 3, можно также применить процедуру порождения источника к уравнению ВКП-типа [23]

$$[(D_3 - D_1^3)D_{-1} + 3D_1^2]\tau \cdot \tau = 0 \tag{32}$$

и получить систему

$$\begin{aligned}
 [(D_3 - D_1^3)D_{-1} + 3D_1^2]f \cdot f &= \sum_{i=1}^M D_{-1}g_i \cdot h_i, \\
 (D_1D_{-1} - 1)g_i \cdot f &= 0, \\
 (D_1D_{-1} - 1)h_i \cdot f &= 0,
 \end{aligned} \tag{33}$$

где $D_i = D_{x_i}$, $i = -1, 1, 3$; эта система играет роль уравнения ВКП-типа (32) с самосогласованными источниками.

Полученные результаты показывают, что процедура порождения источника применима не только к таким солитонным уравнениям, обладающим детерминантными решениями, как уравнения АКП-типа, но и к солитонным уравнениям, имеющим пфаффианные решения. В этом отношении она отличается от процедуры пфаффианизации из работы [23]. Насколько нам известно, процедура пфаффианизации применима к уравнениям АКП-типа, в том числе к уравнению КП и $(2+1)$ -мерному решеточному уравнению Тоды, но ее нельзя применить к другим солитонным уравнениям, обладающим пфаффианными решениями, например к уравнению ВКП-типа и уравнению НВН.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Билинейные операторные тождества Хироты

Следующие билинейные операторные тождества выполнены для произвольных функций a , b , a' , b' и c :

$$(D_x D_y a \cdot a) b^2 - a^2 (D_x D_y b \cdot b) = 2D_x (D_y a \cdot b) \cdot ab = 2D_y (D_x a \cdot b) \cdot ab, \quad (\text{П.1})$$

$$(D_x^3 D_y a \cdot a) b^2 - a^2 (D_x^3 D_y b \cdot b) = 2D_y (D_x^3 a \cdot b) \cdot ab + 6D_x (D_x D_y a \cdot b) \cdot (D_x b \cdot a), \quad (\text{П.2})$$

$$D_y (D_x^2 a \cdot b) \cdot ab = D_x (D_x D_y a \cdot b) \cdot ab + D_x (D_y a \cdot b) \cdot (D_x a \cdot b), \quad (\text{П.3})$$

$$(D_y a \cdot b) c^2 = (D_y a \cdot c) bc - ac (D_y b \cdot c), \quad (\text{П.4})$$

$$\begin{aligned} & (D_x D_y a \cdot b) a' b' - ab (D_x D_y a' \cdot b') = \\ &= \frac{1}{2} D_x [(D_y a \cdot b') \cdot ba' - ab' \cdot (D_y b \cdot a')] + \\ &+ \frac{1}{2} D_y [(D_x a \cdot b') \cdot ba' - ab' \cdot (D_x b \cdot a')]. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Благодарности. Автор благодарит рецензентов за уместные замечания, а также профессора Син-Бяо Ху за руководство и поддержку. Данная работа была частично поддежана National Natural Science Foundation of China (грант № 10471139), CAS President grant, Knowledge innovation program of the Institute of Computational Math., AMSS, а также Foundation of Renmin University of China (грант № 30207113).

Список литературы

- [1] V. K. Mel'nikov, *Comm. Math. Phys.*, **112**:4 (1987), 639–652.
- [2] V. K. Mel'nikov, *Comm. Math. Phys.*, **126**:1 (1989), 201–215.
- [3] J. Leon, A. Latifi, *J. Phys. A*, **23**:8 (1990), 1385–1403.
- [4] Y. Matsuno, *J. Phys. A*, **24**:6 (1991), L273–L277.
- [5] Y. Zeng, W.-X. Ma, R. Lin, *J. Math. Phys.*, **41**:8 (2000), 5453–5489.
- [6] S.-F. Deng, D.-Y. Chen, D.-J. Zhang, *J. Phys. Soc. Japan*, **72**:9 (2003), 2184–2192.
- [7] X.-B. Hu, H.-Y. Wang, *Inverse Problems*, **22**:5 (2006), 1903–1920.
- [8] H.-Y. Wang, *J. Math. Anal. Appl.*, **330**:2 (2007), 1128–1138.
- [9] H.-Y. Wang, J. Hu, H.-W. Tam, *J. Phys. A*, **40**:44 (2007), 13385–13394.
- [10] Л. П. Нижник, *ДАН СССР*, **254**:2 (1980), 332–335.

- [11] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *ДАН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24; **279**:4 (1984), 784–788; S. P. Novikov, A. P. Veselov, *Phys. D*, **18**:1–3 (1986), 267–273.
- [12] Y. Tagami, *Phys. Lett. A*, **141**:3–4 (1989), 116–120.
- [13] П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков, *ДАН СССР*, **286**:1 (1986), 19–22.
- [14] M. Boiti, J. Leon, M. Manna, F. Pempinelli, *Inverse Problems*, **2**:3 (1986), 271–279.
- [15] Л. В. Богданов, *ТМФ*, **70**:2 (1987), 309–314.
- [16] C. Athorne, A. Fordy, *J. Math. Phys.*, **28**:9 (1987), 2018–2024.
- [17] Y. Cheng, *J. Math. Phys.*, **32**:1 (1991), 157–162.
- [18] X.-Biao Hu, *J. Phys. A*, **27**:4 (1994), 1331–1338.
- [19] S.-Y. Lou, *Phys. Lett. A*, **277**:2 (2000), 94–100.
- [20] L. M. Alonso, E. M. Reus, E. O. Moreno, *Phys. Lett. A*, **159**:8–9 (1991), 384–389.
- [21] Y. Ohta, *J. Phys. Soc. Japan*, **61**:11 (1992), 3928–3933.
- [22] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **19**:3 (1983), 943–1001.
- [23] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge Tracts in Math., **155**, eds. A. Nagai, J. Nimmo, C. Gilson, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

Поступила в редакцию 22.11.2007,
после доработки 2.01.2008