Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. П. Круш, Е. Л. Лакштанов, Явное представление функции Грина для трехмерного внешнего уравнения Гельмгольца, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 2, 163–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:02:36

© 2008 г.

Ж. П. Круш*, Е. Л. Лакштанов*

ЯВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВНЕШНЕГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Построена последовательность решений внешнего уравнения Гельмгольца, ограничения которых образуют ортонормальный базис на заданной поверхности. Зависимость коэффициентов этих функций от коэффициентов поверхности задается явной алгебраической формулой. Таким же образом построена явная нормальная производная функции Грина–Дирихле. Построен также оператор Дирихле–Неймана. Доказано, что нормированные коэффициенты равномерно отделены от нуля.

Ключевые слова: явное решение, внешняя задача Гельмгольца, функция Грина, оператор Дирихле–Неймана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ и $k > 0$. Рассеянное поле определяется уравнением Гельмгольца и условием излучения

$$\Delta\Psi(r) + k^2\Psi(r) = 0, \quad r \in \Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \quad (1.1)$$

$$\int_{|r|=R} \left| \frac{\partial\Psi(r)}{\partial|r|} - ik\Psi(r) \right|^2 dS = o(1), \quad R \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

с граничными условиями Дирихле

$$\Psi(r) \equiv u_0(r), \quad r \in \partial\Omega, \quad u_0 \in C(\partial\Omega). \quad (1.3)$$

Например, существование и единственность решения уравнений (1.1)–(1.3) доказаны в [1]. Функция $\Psi(r)$, удовлетворяющая указанным условиям, имеет асимптотический вид

$$\Psi(r) = \frac{e^{ik|r|}}{|r|} f(q) + o\left(\frac{1}{|r|}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad q = \frac{r}{|r|} \in S^2, \quad (1.4)$$

*Department of Mathematics, University of Aveiro, Portugal. E-mail: pedrocruz@ua.pt, lakshtanov@rambler.ru

где функция $f(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi, k, u_0)$ называется *амплитудой рассеяния*, а наблюдаемая

$$\sigma_T = \int_{S^2} |f(q)|^2 d\sigma(q)$$

называется *полным сечением рассеяния*; здесь σ – элемент площади на единичной сфере.

Очень важный частный случай граничного условия имеет вид

$$u_0 = e^{ik\langle r, \theta_0 \rangle}, \quad r \in \partial\Omega,$$

что соответствует рассеянию плоской волны с углом падения $\theta_0 \in S^2$. Полный импульс, переданный препятствию (в нормировке на большой объем) является наблюдаемой, называемой *транспортным сечением*

$$R = \int_{S^2} (1 - \langle q, \theta_0 \rangle) |f(q)|^2 d\sigma(q).$$

К сожалению, аналитические выражения для этих наблюдаемых при определенных $k > 0$ существуют только для нескольких тел простой формы [2], [3]. Более того, рассеяние происходит не только на плоских или сферических волнах, но и, например, на произвольном вторичном излучении.

Кроме того, существует несколько численных методов для прямого вычисления рассеяния. Один из них основан на численном решении интегрального уравнения [4]. Другой метод, развитый Раммом и Гутманом [5]–[8], позволяет построить функцию Грина и, таким образом, получить решения для произвольного граничного условия $u_0 \in C(\partial\Omega)$. Фундаментальное аналитическое достижение Рамма и Гутмана состоит в так называемой модифицированной гипотезе Рэлея. В частности, функции $Y_{lm}(\theta, \varphi) h_l(k|r|)|_{\partial\Omega}$ (сферические гармоники и сферические функции Ганкеля, см. (1.7)) образуют базис в пространстве $L_2(\partial\Omega, dS)$.

Цель данной работы состоит в том, чтобы явно выразить коэффициенты физических наблюдаемых и нормальную производную функции Грина–Дирихле. Мы найдем постоянную равномерную нижнюю границу для нормированных коэффициентов (знаменателей) и докажем сходимость всех возникающих рядов.

Функция Грина лапласиана в Ω' имеет вид

$$\Delta_r G(r, t) + k^2 G(r, t) = -\delta(r - t), \quad r, t \in \Omega', \quad G \equiv 0, \quad r \in \partial\Omega, \quad t \in \Omega',$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|t|=R} \left| \frac{\partial G(r, t)}{\partial n_t} - ikG(r, t) \right|^2 dS = o(1), \quad R \rightarrow \infty.$$

Как известно, по формуле Грина

$$\Psi(r) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(r, t)}{\partial n_t} u_0(t) dS(t), \quad r \in \overline{\Omega'}.$$

В данной работе мы явно выразим ядро $\partial G(r, t)/\partial n_t$ через коэффициенты поверхности $\partial\Omega$, а также наблюдаемые C , σ_T , R и $\{A_{lm}\}$, где A_{lm} , $0 \leq |m| \leq l$, – коэффициенты представления

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (1.5)$$

$Y_{lm}(\theta, \varphi)$ – сферические гармоники.

Пусть $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{L}$ – множество индексов,

$$\mathcal{L} = \{(l, m): l, m \in \bar{\mathbb{N}}, |m| \leq l\},$$

и пусть $\mathbf{l} \in \mathcal{L}$ при $\mathbf{l} = (l(1), l(2))$. Используем также обозначения $\bar{\mathbf{l}} = (l(1), -l(2))$ и зададим отношение порядка:

$$(l, m) > (p, r) \Leftrightarrow l > p \wedge [(l = p) \vee (|m| > |r|)] \wedge [(l = p) \vee (m > 0) \vee (m = -r)],$$

так что

$$\mathcal{L} = \{(0, 0), (1, 0), (1, -1), (1, 1), (2, 0), (2, -1), (2, 1), (2, -2), (2, 2), (3, 0), \dots\}.$$

Положим $\mathbf{0} = (0, 0)$, и пусть операции $+$ и $-$ имеют естественное определение в $\mathcal{L} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{L}$ в соответствии с введенным порядком.

1.1. Поверхности с обратным радиус-вектором, представленным в виде конечной комбинации гармоник. Пусть $\mathcal{F}$ – подмножество функций (мульти-индексов) $\mathcal{L}^{\bar{\mathbb{N}}}$ с конечным носителем. Определим емкость следующим образом:

$$|d| = \sum_{\mathbf{l}} d(\mathbf{l}), \quad \text{Supp } d = \max\{\mathbf{l}: d(\mathbf{l}) \neq 0\}, \quad d \in \mathcal{F}.$$

Пусть $e_{\mathbf{l}} \in \mathcal{F}$ определяется как $e_{\mathbf{l}}(\mathbf{m}) = \delta_{\mathbf{l}\mathbf{m}}$ (т.е. равно единице при $\mathbf{l} = \mathbf{m}$). Положим

$$C^d = \frac{|d|!}{\prod_{\mathbf{l}} d(\mathbf{l})!}, \quad I^d = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \prod_{\mathbf{l}} (Y_{\mathbf{l}}(\theta, \varphi))^{d(\mathbf{l})} d\theta d\varphi, \quad d \in \mathcal{F},$$

и

$$a^d = \prod_{\mathbf{l}} a_{\mathbf{l}}^{d(\mathbf{l})}$$

для произвольной функции $a \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}$ с конечным носителем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть поверхность звездной формы $\partial\Omega$ задана как множество $\{r = r(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\}$, где

$$|r(\theta, \varphi)| = \frac{1}{\sum_{\mathbf{l} \leq (N, N)} a_{\mathbf{l}} Y_{\mathbf{l}}(\theta, \varphi)}, \quad (1.6)$$

причем $N \geq 0$, $\{a_{\mathbf{l}}\}$ – коэффициенты. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Функции

$$\widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}(r) = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} c_{\mathbf{n}\mathbf{k}} Y_{\mathbf{k}}(\theta, \varphi) h_{\mathbf{k}(1)}(k|r|), \quad \mathbf{n} \in \mathcal{L},$$

удовлетворяют уравнениям (1.1), (1.2), и их ограничения $\{\widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}|_{\partial\Omega}, \mathbf{n} \in \mathcal{L}\}$ образуют ортонормальный базис в $L_2(\partial\Omega, d\theta d\varphi)$. Здесь

$$c_{\mathbf{n}\mathbf{n}} = 1/\lambda_{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{n} \in \bar{\mathbb{N}},$$

$$\lambda_0^2 = g_{00} > 0, \quad \lambda_n^2 = g_{nn} - \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sum_{p=0}^k \bar{c}_{kp} g_{np} \right|^2 > 0, \quad n > 0.$$

Определим g_{ij} , $\hat{h}_{nm}$, c_{nm} . Пусть

$$g_{ij} = (-1)^{j(2)} \sum_{m=0}^{i(1)+j(1)} \frac{1}{k^{m+2}} \left(\sum_{l=0}^m \hat{h}_{i(1)l} \bar{\hat{h}}_{j(1)(m-l)} \right) \sum_{\substack{d: |d|=m+2, \\ \text{Supp } d \leq (N, N)}} C^d a^d I^{d+e_i+e_j},$$

где коэффициенты $\hat{h}_{nj}$ определяются из известного представления для сферических функций Ханкеля [9],

$$h_n(t) = \frac{e^{ikt}}{t} \frac{\sum_{j=0}^n \hat{h}_{nj} t^{n-j}}{t^n} = \frac{e^{ikt}}{t} \sum_{j=0}^n \frac{\hat{h}_{nj}}{t^j}, \quad \hat{h}_{n0} = 1, \quad t \neq 0, \quad (1.7)$$

при

$$\hat{h}_{nm} = \frac{i^m}{2^m} \prod_{p=1}^m (n+p) \cdot \prod_{p=1}^m \frac{n-m+p}{p}, \quad 0 < m \leq n.$$

Для $m < n$ имеем

$$c_{nm} = \frac{1}{\lambda_n} \left(\sum_{k=m}^{n-1} \sum_{p=0}^k \bar{c}_{kp} c_{km} g_{np} \right).$$

2. Рассмотрим произвольную функцию $u_0 \in L_2(\partial\Omega)$. Имеем

$$\sigma_T = \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \leq n} \left[\bar{c}_{nm} \left(\sum_{p \leq n} c_{np} \bar{u}_p \right) \left(c_{nm} \sum_{p \leq n} \bar{c}_{np} u_p + 2 \sum_{m < l < n} c_{lm} \sum_{p \leq l} \bar{c}_{lp} u_p \right) \right], \quad (1.8)$$

коэффициенты амплитуды рассеяния

$$A_m = \frac{1}{k} \sum_{n \geq m} c_{nm} \sum_{p \leq n} \bar{c}_{np} u_p, \quad m \in \mathcal{L}, \quad (1.9)$$

где

$$u_p = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \bar{Y}_p(\theta, \varphi) \bar{h}_{p(1)}(k|r(\theta, \varphi)|) d\theta d\varphi.$$

3. Более того, существуют такие числа $C_i = C_i(k, \Omega)$, $i = 1, 2$, что

$$c_{nk} \leq \frac{C_1}{k(1)!}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad k, n \in \mathcal{L}. \quad (1.10)$$

Кроме того,

$$c_{nm} \left| \sum_{p=0}^n \bar{c}_{np} u_p \right| < \frac{C_1}{m(1)!} |\hat{u}_n|, \quad (1.11)$$

$$\hat{u}_n = (u_0, \hat{\Psi}_n|_{\partial\Omega})_{L_2(\partial\Omega, d\theta d\varphi)} = \sum_{k \leq n} \bar{c}_{nk} u_k \rightarrow 0$$

при $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ и

$$\lambda_{\mathbf{n}} > C_2, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{L}. \quad (1.12)$$

4. Имеется слабая сходимость функции

$$\frac{\partial G}{\partial n_t}(r, t) = \sum_{\mathbf{n}} \widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}(r) \overline{\widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}}(t), \quad r, t \in \Omega'.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определим $\{A_{\mathbf{m}}^{\mathbf{L}}, \mathbf{m}, \mathbf{L} \in \mathcal{L}\}$, где $A_{\mathbf{m}}^{\mathbf{L}} = 0$ при $\mathbf{L} < \mathbf{m}$ и

$$A_{\mathbf{m}}^{\mathbf{L}} = \frac{1}{k} \sum_{\mathbf{L} \geq \mathbf{n} \geq \mathbf{m}} c_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{n}} \bar{c}_{\mathbf{n}\mathbf{p}} \hat{u}_{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{L} \geq \mathbf{m},$$

или, рекуррентно,

$$A_{\mathbf{m}}^{\mathbf{L}} = A_{\mathbf{m}}^{\mathbf{L}-1} + \frac{1}{k} c_{\mathbf{L}\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{L}} \bar{c}_{\mathbf{L}\mathbf{p}} \hat{u}_{\mathbf{p}}.$$

Из теоремы 1, используя ортогональность базиса $\{\widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}|_{\partial\Omega}\}$, получаем

$$|A_{\mathbf{m}} - A_{\mathbf{m}}^{\mathbf{L}}| \leq \frac{C}{\mathbf{m}(1)!} \left\| u_0 - \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{L}} \hat{u}_{\mathbf{p}} \right\| = o(1), \quad \mathbf{L} \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{T}}^{\mathbf{L}} &= \sum_{\mathbf{n} \leq \mathbf{L}} |A_{\mathbf{n}}^{\mathbf{L}}|^2, \\ |\sigma_{\mathbf{T}} - \sigma_{\mathbf{T}}^{\mathbf{L}}| &\leq C \left\| u_0 - \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{L}} \hat{u}_{\mathbf{p}} \right\| = o(1), \quad \mathbf{L} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В случае, если $u_0 = e^{ikz}$, т.е. $\theta_0 = (0, 0, 1)$, имеем

$$\begin{aligned} R^{\mathbf{L}} &= \sum_{\mathbf{n} \leq \mathbf{L}} \sqrt{\frac{(\mathbf{n}(1) + \mathbf{n}(2))(\mathbf{n}(1) - \mathbf{n}(2))}{(2\mathbf{n}(1) + 1)(2\mathbf{n}(1) - 1)}} \operatorname{Re}(A_{\mathbf{n}} \bar{A}_{\mathbf{n}+e_{(1,0)}}), \\ |R - R_1| &\leq \left\| u_0 - \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{L}} \hat{u}_{\mathbf{p}} \right\| = o(1), \quad \mathbf{L} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Формула (1.13) является простым следствием равенства

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x)$$

для многочленов Лежандра.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оператор Дирихле–Неймана $\mathcal{N}$, который соответствует граничному условию u_0 для нормальной производной поля $u(r)$, можно построить по формуле

$$(\mathcal{N}u_0)(r) = \sum_{\mathbf{n}} \left(\int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \overline{\widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}}(r(\theta, \varphi)) d\theta d\varphi \right) \frac{\partial \widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}}{\partial n}(r).$$

1.2. Сравнение с другими явными представлениями. Хотя теорема 1 сформулирована для тел звездной формы, ясно, что все представления функции Грина сохраняют свой вид для произвольного достаточно гладкого тела. В общем случае надо только положить

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{p}} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0(\theta, \varphi) \bar{Y}_{\mathbf{p}}(\theta, \varphi) \bar{h}_{\mathbf{p}(1)}(k|r(\theta, \varphi)|) d\theta d\varphi, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{L}, \\ g_{\mathbf{i}\mathbf{j}} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{\mathbf{i}}(\theta, \varphi) \bar{Y}_{\mathbf{j}}(\theta, \varphi) h_{\mathbf{i}(1)}(k|r(\theta, \varphi)|) \bar{h}_{\mathbf{j}(1)}(k|r(\theta, \varphi)|) d\theta d\varphi, \quad \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Как уже упоминалось, возможно, что функции $\{Y_{\mathbf{p}}(\theta, \varphi) h_{\mathbf{p}(1)}(k|r(\theta, \varphi)|)\}$ образуют базис для произвольного достаточно гладкого тела.

Наше представление выполнено для всех значений $k > 0$, но существуют другие явные представления для функции Грина, имеющие место в окрестностях точек $k = 0$ и $k = \infty$. Мы считаем целесообразным привести следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2 ([10], теорема 4.1). *Существует такое $\alpha > 0$, что при $|k| < \alpha$ функция Грина $G(x, r)$ существует, единственна в Ω' и явно задается в виде*

$$G(r, t) = -\frac{e^{ik|r-t|}}{4\pi|r-t|} + e^{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} K^n U_0, \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} K(U_0) &= -2ik \int_{\Omega'} dv(t_1) \frac{G_0(r, t_1)}{|t_1|} \frac{\partial}{\partial |t_1|} [|t_1| U_0], \\ U_0 &= U_0(t_1, t) = \int_{\partial\Omega} dS(t_0) \frac{e^{-ik|t_0|+ik|t_0-t|}}{4\pi|t_0-t|} \frac{\partial}{\partial n_{t_0}} G_0(t_1, t_0). \end{aligned}$$

Здесь v – элемент объема, $G_0(r, t_1)$ – статическая функция Грина–Дурихле.

Нетрудно видеть, что все слагаемые в (1.14) определены рекуррентно, как и в теореме 1. Важно, что первое приближение является статической функцией Грина, которая предполагается известной. Поэтому построенное решение в некотором смысле является возмущением статического решения. Это объясняет быструю экспоненциальную сходимость приближения (1.14).

При высоких частотах существует следующее представление для функции Грина, выполненное для препятствий, удовлетворяющих условиям отсутствия ловушки и единственности соударения (подробности см. в [11]):

$$G(r, t) = -\frac{e^{ik|r-t|}}{4\pi|r-t|} + e^{ikS(r, t)} \sum_{m=0}^l \left(\frac{i}{k}\right) z_m(r, t) + R_l(r, t), \quad (1.15)$$

где функция $S(r, t)$ удовлетворяет уравнению эйконала

$$|\nabla_r S|^2 = 1,$$

а функции $z_m(r, t)$ определяются рекуррентно дифференциальными уравнениями (переноса):

$$2\nabla_r S \cdot \nabla_r z_m + (\nabla_r S) z_m = -\nabla_r z_{m-1}, \quad m \geq 0, \quad z_{-1} \equiv 0.$$

Если r и t не лежат на касательных лучах, то справедлива оценка

$$|R_l(r, t)| = o(k^{1-l}), \quad k \rightarrow \infty.$$

В этом случае экспоненциальная сходимость имеет место потому, что при больших значениях k решения близки к “классическому” предельному решению.

Представление для σ_T в (1.8) выполнено при всех значениях $k > 0$, но у нас нет оценок для скорости сходимости. Для сферы наше представление является известным решением [9] с очень быстрой сходимостью (как $1/n!$). Разумеется, хорошие свойства сходимости должны сохраняться в некоторой окрестности сферы. Более того, мы уверены, что окажется возможным сохранить хорошие свойства сходимости с развитием локальных предельных теорем для знаковых распределений. В действительности, если $1/r$ – характеристическая функция случайной переменной со знаковым распределением, то элементы матрицы Грама g_{ij} являются в вероятностном смысле суммой $(i + j + 2)$ таких переменных [12]. В настоящее время описание окрестности, по крайней мере, экспоненциальной сходимости выходит за пределы наших возможностей. Однако напомним, что представление (1.8), в отличие от представлений (1.15), (1.14), сходится при всех значениях $k > 0$.

Завершая наше обсуждение, заметим, что представления, подобные (1.8), нельзя получить для двумерной модели, поскольку функции Бесселя с целым индексом не допускают конечное полиномиальное представление.

1.3. Многогранники и тела вращения ломаной. Вычисление матрицы Грама $G = \{g_{ij}\}$ для многогранника очень простое. Для элементов g_{ij} необходимо найти только $N(i + j)^2$ сумм, где N – число сторон.

Выберем $N + 1$ точек на отрезке $[0, \pi]$,

$$0 = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_{N-1} \leq \theta_N = \pi,$$

и рассмотрим набор тел $\mathcal{R}$, который содержит произвольные тела вращения ломаных с вершинами в точках $\{\theta_i, i = 0, 1, \dots, N\}$.

ТЕОРЕМА 3. Рассмотрим ломаную $r = \sum_i r_i(\theta) I_i(\theta)$, где I_i – характеристическая функция отрезка $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, а коэффициенты $\{a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ определяют части ломаной r_i :

$$a_i r_i \cos \theta + b_i r_i \sin \theta = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.16)$$

Тогда коэффициенты матрицы Грама g_{ij} вычислим в виде

$$g_{ij} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{(f_p)^{i+j+2}} \sum_{l=0}^{i+j+2} C_{i+j+2}^l a_p^l b_p^{i+j+2-l} T_{ij,l(i+j)}^p,$$

$2de$

$$T_{ij,lm}^p = \int_{\theta_{p-1}}^{\theta_p} Y_i(\theta) \bar{Y}_j(\theta) \cos^l \theta \sin^{m+2-l} \theta \sin \theta d\theta, \quad l \leq m+2,$$

$$g_{ij} = \sum_{p=1}^N \sum_{m=0}^{i+j} \frac{1}{k^{m+2}} \left(\sum_{n=0}^m \hat{h}_{in} \bar{\hat{h}}_{j(m-n)} \frac{1}{(f_p)^{m+2}} \right) \left(\sum_{l=0}^{m+2} C_{m+2}^l a_p^l b_p^{m+2-l} T_{ij,lm}^p \right).$$

1.4. Явная зависимость матрицы Грама от частоты. Можно представить элементы матрицы Грама $\{g_{\mathbf{ij}}, \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathcal{L}\}$ для произвольной достаточно гладкой поверхности в виде многочлена по обратной частоте k^{-1} :

$$g_{\mathbf{ij}} = (-1)^{j(2)} \sum_{m=0}^{i(1)+j(1)} \frac{1}{k^{m+2}} p_{\mathbf{ij}}^m, \quad (1.17)$$

где

$$p_{\mathbf{ij}}^m = \sum_{l=0}^m \hat{h}_{i(1)l} \bar{\hat{h}}_{j(1)(m-l)} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{Y_{\mathbf{i}}(\theta, \varphi) \bar{Y}_{\mathbf{j}}(\theta, \varphi)}{|r(\theta, \varphi)|^{m+2}}, \quad 0 \leq m \leq i(1) + j(1). \quad (1.18)$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Положим

$$\Psi_{\mathbf{n}}(r) = Y_{\mathbf{n}}(\theta) h_{\mathbf{n}(1)}(k|r|), \quad \mathbf{n} \in \mathcal{L}, \quad r \in \Omega',$$

где функции $\Psi_{\mathbf{n}}(r)$ удовлетворяют уравнениям (1.1) и (1.2). Более того, они имеют следующий асимптотический вид на бесконечности (см. (1.7)):

$$\Psi_{\mathbf{n}}(r) \sim \frac{1}{k} Y_{\mathbf{n}}(\theta) \frac{e^{ik|r|}}{|r|}, \quad |r| \rightarrow \infty.$$

Пусть A – линейный оператор, действующий из $L_2(\partial\Omega, dS)$ в $L_2(S^2, d\sigma)$, который переводит $u|_{\partial\Omega}$ в амплитуду рассеяния $f(q)$ (см. (1.4)). Здесь dS и $d\sigma$ – стандартные метрики на $\partial\Omega$ и единичной сфере S^2 . В работах [6] ((2.12), (2.16)), [5] ((2.10), (2.13)) доказано, что A – ограниченный оператор; в частности, функции $\Psi_{\mathbf{n}}|_{\partial\Omega}$ образуют базис в $L_2(\partial\Omega, dS)$. Поэтому имеем преобразование

$$A \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{L}} c_{\mathbf{n}} \Psi_{\mathbf{n}} \right) = \frac{1}{k} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{L}} c_{\mathbf{n}} Y_{\mathbf{n}}, \quad \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{L}} c_{\mathbf{n}} \Psi_{\mathbf{n}} \in L_2(\partial\Omega, dS).$$

Докажем, что существует такая постоянная $C_1 = C_1(k, \Omega)$, что

$$|c_{\mathbf{n}}| \leq \frac{C_1}{\mathbf{n}(1)!}, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{L}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим сферу $S_R := \{|r| = R\}$ такую, что тело Ω строго вкладывается в эту сферу. Определим также $A_1: L_2(\partial\Omega, dS) \rightarrow L_2(S_R, d\sigma_R)$, $d\sigma_R = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, в виде

$$(A_1 u_0)(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} u_0(y) dS(y), \quad x \in S_R.$$

Поскольку функция $\partial G/\partial n_y$ имеет особенности только при $x = y$ (см., например, [10]), оператор A_1 ограничен. Заметим, что функции $h_{\mathbf{n}}(k|r|)$ постоянны на S_R ,

$$\begin{aligned} 4\pi R^2 |h_{\mathbf{n}}(kR)| |c_{\mathbf{n}}| &= |(A_1 u_0, \bar{Y}_{\mathbf{n}})_{L_2(S_R)}| \leq \|A_1 u_0\|_{L_2(S_R)} \|\bar{Y}_{\mathbf{n}}\|_{L_2(S_R)} = \\ &= 4\pi R^2 \|A_1 u_0\|_{L_2(S_R)} \leq 4\pi R^2 \|A_1\| \|u_0\|_{L_2(\partial\Omega)}, \end{aligned}$$

поэтому

$$|c_{\mathbf{n}}| \leq \frac{\|A_1\| \|u_0\|_{L_2(\partial\Omega)}}{|h_{\mathbf{n}}(kR)|}.$$

С учетом асимптотического вида (см. [13], с. 358–364) $h_{\mathbf{n}}(R) \sim n!/(R/2)^n$, $n \rightarrow \infty$, и того, что радиус R можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $kR \geq 2$, получаем оценку (2.1) (что соответствует (1.10) теоремы 1).

Пусть $g(\theta, \varphi)$ – плотность:

$$dS = [g(\theta, \varphi)]^2 d\sigma = |r| \sqrt{\left[|r|^2 + \left(\frac{\partial|r|}{\partial\theta}\right)^2\right] \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial|r|}{\partial\varphi}\right)^2} d\theta d\varphi. \quad (2.2)$$

Для простоты используем то же обозначение $d\sigma = d\theta d\varphi$ для меры на $\partial\Omega$. Очевидно, что если функция $f \in L_2(\partial\Omega, d\sigma)$, то $f/g \in L_2(\partial\Omega, dS)$.

Положим $\Psi_{\mathbf{n}}^0 = \Psi_{\mathbf{n}}|_{\partial\Omega}/g$ и построим ортонормальный базис $\widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}^0$ в $L_2(\partial\Omega, dS)$ в виде

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}^0 &= \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}^0, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{L}, \\ \widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}^0 &= \frac{1}{\lambda_{\mathbf{n}}} \left[\Psi_{\mathbf{n}}^0 - \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}-1} (\Psi_{\mathbf{n}}^0, \widehat{\Psi}_{\mathbf{k}}^0) \widehat{\Psi}_{\mathbf{k}}^0 \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\lambda_{\mathbf{n}} = \left[\|\Psi_{\mathbf{n}}^0\|^2 - \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}-1} |(\Psi_{\mathbf{n}}^0, \widehat{\Psi}_{\mathbf{k}}^0)|^2 \right]^{1/2}.$$

Учитывая, что

$$(\Psi_{\mathbf{n}}^0, \widehat{\Psi}_{\mathbf{k}}^0) = \sum_{\mathbf{p}=0}^{\mathbf{k}} \bar{c}_{\mathbf{k}\mathbf{p}} (\Psi_{\mathbf{n}}^0, \Psi_{\mathbf{p}}^0),$$

находим

$$c_{\mathbf{n}\mathbf{n}} = \frac{1}{\lambda_{\mathbf{n}}}, \quad c_{\mathbf{n}\mathbf{m}} = \frac{1}{\lambda_{\mathbf{n}}} \left[\sum_{\mathbf{k}=\mathbf{m}}^{\mathbf{n}-1} \sum_{\mathbf{p}=0}^{\mathbf{k}} \bar{c}_{\mathbf{k}\mathbf{p}} c_{\mathbf{k}\mathbf{m}} (\Psi_{\mathbf{n}}^0, \Psi_{\mathbf{p}}^0) \right], \quad \mathbf{m} < \mathbf{n}.$$

Положим

$$\widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}(r) = g \widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}^0 = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{n} \in \mathcal{L}, \quad r \in \Omega',$$

и пусть u_0 – функция из $L_2(\partial\Omega, d\sigma)$, а $u_0/g = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \hat{u}_{\mathbf{n}} \widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}^0$. Тогда функция

$$u(r) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \hat{u}_{\mathbf{n}} \widehat{\Psi}_{\mathbf{n}}(r), \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega,$$

удовлетворяет уравнениям (1.1)–(1.3).

Согласно (2.3) получаем соответствующие частоты рассеяния (см. (1.5))

$$A_{\mathbf{m}} = \frac{1}{k} \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{m}}^{\infty} c_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \left(\sum_{\mathbf{p}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \bar{c}_{\mathbf{n}\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} \right),$$

где $u_{\mathbf{p}} = (u_0/g, \Psi_{\mathbf{p}}^0)_{L_2(\partial\Omega, dS)} = (u_0, \Psi_{\mathbf{p}}|_{\partial\Omega})_{L_2(\partial\Omega, d\sigma)}$.

По построению $\sum_{\mathbf{p}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \bar{c}_{\mathbf{n}\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} = \hat{u}_{\mathbf{n}}$, откуда следует (1.11).

Теперь докажем (1.12). Положим

$$\lambda_{\mathbf{n}} = \|F_{\mathbf{n}}\|_{L_2(\partial\Omega, dS)}, \quad \text{где} \quad F_{\mathbf{n}} = \Psi_{\mathbf{n}}^0 - \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}-1} (\Psi_{\mathbf{n}}^0, \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}^0) \hat{\Psi}_{\mathbf{k}}^0.$$

Имеем $(AF_{\mathbf{n}}, Y_{\mathbf{n}}) = 1/k$, поэтому $\|AF_{\mathbf{n}}\| \geq 1/k$ и

$$\frac{1}{k} \leq \|AF_{\mathbf{n}}\| \leq \|A\| \|F_{\mathbf{n}}\|_{L_2(\partial\Omega, dS)}.$$

В силу представления для $r(\theta, \varphi)$ и равенства (2.2) существует

$$S = \max_{\theta, \varphi} |g(\theta, \varphi)|^2 < \infty.$$

Следовательно,

$$\lambda_{\mathbf{n}} = \|F_{\mathbf{n}}\|_{L_2(\partial\Omega, d\sigma)} \geq \frac{1}{S} \|F_{\mathbf{n}}\|_{L_2(\partial\Omega, dS)} \geq (S\|A\|k)^{-1},$$

что соответствует (1.12) теоремы 1.

Теперь докажем (1.8). Из (1.9) получаем

$$\begin{aligned} |A_{\mathbf{m}}|^2 &= \frac{1}{k^2} \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{m}} \left[c_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{n}} \bar{c}_{\mathbf{n}\mathbf{p}} \hat{u}_{\mathbf{p}} \left(c_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{n}} \bar{c}_{\mathbf{n}\mathbf{p}} \hat{u}_{\mathbf{p}} + 2 \sum_{\mathbf{m} < \mathbf{l} < \mathbf{n}} c_{\mathbf{l}\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{l}} \bar{c}_{\mathbf{l}\mathbf{p}} \hat{u}_{\mathbf{p}} \right) \right], \\ \sigma_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{k^2} \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} \sum_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}} \left[\bar{c}_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \left(\sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{n}} c_{\mathbf{n}\mathbf{p}} \hat{u}_{\mathbf{p}} \right) \left(c_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{n}} \bar{c}_{\mathbf{n}\mathbf{p}} \hat{u}_{\mathbf{p}} + 2 \sum_{\mathbf{m} < \mathbf{l} < \mathbf{n}} c_{\mathbf{l}\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{p} \leq \mathbf{l}} \bar{c}_{\mathbf{l}\mathbf{p}} \hat{u}_{\mathbf{p}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Далее вычислим $(\Psi_{\mathbf{i}}^0, \Psi_{\mathbf{j}}^0)$:

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{ij}} &= (\Psi_{\mathbf{i}}^0, \Psi_{\mathbf{j}}^0) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{\mathbf{i}}(\theta, \varphi) \bar{Y}_{\mathbf{j}}(\theta, \varphi) h_{\mathbf{i}(1)}(k|r(\theta, \varphi)|) \bar{h}_{\mathbf{j}(1)}(k|r(\theta, \varphi)|) = \\ &= (-1)^{j(2)} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{\mathbf{i}}(\theta, \varphi) Y_{\mathbf{j}}(\theta, \varphi) \left(\sum_{p=0}^{\mathbf{i}(1)} \frac{\hat{h}_{\mathbf{i}(1)p}}{(k|r|)^{p+1}} \right) \left(\sum_{p=0}^{\mathbf{j}(1)} \frac{\bar{\hat{h}}_{\mathbf{j}(1)p}}{(k|r|)^{p+1}} \right) = \\ &= (-1)^{j(2)} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{\mathbf{i}}(\theta, \varphi) Y_{\mathbf{j}}(\theta, \varphi) \times \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{i(1)+j(1)} \frac{1}{k^{m+2}} \left(\sum_{l=0}^m \hat{h}_{\mathbf{i}(1)l} \bar{\hat{h}}_{\mathbf{j}(1)(m-l)} \right) \frac{1}{|r(\theta, \varphi)|^{m+2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{j(2)} \sum_{m=0}^{i(1)+j(1)} \frac{1}{k^{m+2}} \sum_{l=0}^m \hat{h}_{i(1)l} \bar{\hat{h}}_{j(1)(m-l)} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{Y_i(\theta, \varphi) \bar{Y}_j(\theta, \varphi)}{|r(\theta, \varphi)|^{m+2}} = \\
 &= (-1)^{j(2)} \sum_{m=0}^{i(1)+j(1)} \frac{1}{k^{m+2}} \left(\sum_{l=0}^m \hat{h}_{i(1)l} \bar{\hat{h}}_{j(1)(m-l)} \right) \sum_{\substack{d: |d|=m+2, \\ \text{Supp } d \leq (N, N)}} C^d a^d I^{d+e_i+e_j}. \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ g_{ij} ДЛЯ СЛУЧАЯ МНОГОГРАННИКОВ. Из (1.16) имеем

$$\frac{1}{r_i} = \frac{a_i \cos \theta + b_i \sin \theta}{f_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Заметим сначала, что

$$g_{ij} = \sum_{p=1}^N g_{ij}^p, \quad g_{ij}^p := \int_{x_{p-1}}^{x_p} \Psi_i(r_p(\theta), \theta) \bar{\Psi}_j(r_p(\theta), \theta) \sin \theta d\theta.$$

Преобразуем теперь представление для слагаемых g_{ij}^p :

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^p &= \int_{x_{p-1}}^{x_p} Y_i(\theta) \bar{Y}_j(\theta) h_i(kr(\theta)) \bar{h}_j(kr(\theta)) \sin \theta d\theta = \\
 &= \sum_{m=0}^{i+j} \frac{1}{k^{m+2}} \sum_{l=0}^m \hat{h}_{i(1)l} \bar{\hat{h}}_{j(m-l)} \int_0^\pi d\theta \frac{Y_i(\theta, \varphi) \bar{Y}_j(\theta, \varphi)}{|r(\theta, \varphi)|^{m+2}} = \\
 &= \sum_{m=0}^{i+j} \frac{1}{k^{m+2}} \sum_{l=0}^m \hat{h}_{i(1)l} \bar{\hat{h}}_{j(m-l)} \frac{1}{(f_p)^{m+2}} \sum_{l=0}^{m+2} C_{m+2}^l a_p^l b_p^{m+2-l} T_{ij,lm}^p,
 \end{aligned}$$

где

$$T_{ij,lm}^p = \int_{x_{p-1}}^{x_p} Y_i(\theta) \bar{Y}_j(\theta) \cos^l \theta \sin^{m+2-l} \theta \sin \theta d\theta, \quad l \leq m+2.$$

Доказательство представления (1.17) следует из (2.4).

Благодарности. Е. Л. Лахтанов выражает благодарность А. Г. Рамму за многочисленные полезные обсуждения. Данная работа была выполнена при поддержке Centre for Research on Optimization and Control (CEOC) из средств фонда “Fundação para a Ciência e a Tecnologia” (FCT) и поддержке European Community Fund FEDER/РОСТИ и FCT research project PTDC/MAT/72840/2006.

Список литературы

- [1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Изд-во МГУ, 1999; A. G. Ramm, *Scattering by Obstacles*, Math. Appl., **21**, Reidel, Dordrecht, 1986.
- [2] J. J. Bowman, T. B. A. Senior, P. L. E. Uslenghi (eds.), *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, Hemisphere, New York, 1987.
- [3] Le-Wei Li, Mook-Seng Leong, Tat-Soon Yeo et al., *Phys. Rev. E*, **58**:5 (1998), 6792–6806.

- [4] D. Colton, R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Appl. Math. Sci., **93**, Springer, Berlin, 1992.
- [5] S. Gutman, A. G. Ramm, *J. Phys. A*, **35**:38 (2002), 8065–8074.
- [6] A. G. Ramm, S. Gutman, *Modified Rayleigh conjecture method and its applications*, [arXiv:math/0601298v1](#).
- [7] А. Г. Рамм, *Изв. вузов. Сер. радиофизика*, **12** (1969), 1185–1196.
- [8] A. G. Ramm, *Wave Scattering by Small Bodies of Arbitrary Shapes*, World Scientific, Singapore, 2005.
- [9] Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, Т. 1, 2, ИЛ, М., 1958, 1960.
- [10] R. E. Kleinman, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **18**:3 (1965), 205–229.
- [11] H.-D. Alber, R. Leis, “Initial-boundary value and scattering problems in mathematical physics”, *Partial Differential Equations and Calculus of Variations*, Lecture Notes in Math., **1357**, eds. S. Hildebrandt, R. Leis, Springer, Berlin, 1988, 23–60.
- [12] K. Hochberg, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **79**:2 (1980), 298–302.
- [13] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.

Поступила в редакцию 30.01.2008