Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Х. Чанкаев, А. Б. Шабат, Об одной нелинейной задаче на собственные значения, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 2, 175–187

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 08:22:06

© 2008 г.

М. Х. Чанкаев*, А. Б. Шабат†

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Задача о нулях целых функций, связанных с первым уравнением Пенлеве, сводится к задаче на собственные значения для задачи Дирихле для билинейного уравнения четвертого порядка. В упрощенном варианте эта задача переходит в задачу о расположении нулей тета-функций. Разработанный общий метод применяется затем к обратной задаче рассеяния.

Ключевые слова: целые функции, трансценденты Пенлеве, обратная задача рассеяния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Подстановка степенного ряда в дифференциальное уравнение второго порядка с квадратичной нелинейностью

$$-g_{xx} + 6g^2 = \varepsilon(x) \quad (1.1)$$

приводит нас к рекуррентным формулам, удобным для вычисления коэффициентов разложения. Однако решение нелинейного уравнения вида (1.1) почти никогда не является целой функцией, и для того чтобы выйти за границы круга сходимости ряда, мы применяем преобразование

$$g = -(\ln w)_{xx} = \frac{w_x^2}{w^2} - \frac{w_{xx}}{w}, \quad (1.2)$$

которое должно уничтожать полюсы функции g на границе круга сходимости. Формула (1.2) играет ключевую роль в данной работе. Оказывается, что, зная разложение функции g , с ее помощью можно найти нули функции w , лежащие далеко за границей круга сходимости исходного степенного ряда. Для этого достаточно согласно (1.2) определить отображение коэффициентов соответствующих степенных

*Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Карачаевск, Россия. E-mail: prur.kcsu@mail.ru

†Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, г. Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: shabat@itp.ac.ru

рядов. Обратное отображение $w \mapsto g$ сводится, очевидно, к потенцированию, выполненному в терминах коэффициентов рассматриваемых степенных рядов.

Для того чтобы отображение $g \mapsto w$ устраняло особенности функции g , нужно по крайней мере потребовать, чтобы эти особенности имели вид

$$g(x) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad z \stackrel{\text{def}}{=} x - x_0, \quad (1.3)$$

где точка x_0 обозначает положение полюса. При отображении (1.2) полюсы второго порядка функции g переходят в простые нули функции $w(x)$. Эти вопросы обсуждаются ниже в теореме и приводят к определенным ограничениям на функцию $\varepsilon(x)$ в правой части уравнения (1.1).

Аналогичная ситуация имеет место для отображения, связывающего линейное дифференциальное уравнение второго порядка с соответствующим уравнением Риккати:

$$\psi_{xx} + p(x)\psi_x + q(x)\psi = 0, \quad f_x + f^2 + pf + q = 0.$$

В этом случае простым нулям решения ψ линейного уравнения соответствуют полюсы первого порядка решения f двойственного ему уравнения Риккати:

$$f = (\ln \psi)_x = \frac{\psi_x}{\psi}. \quad (1.4)$$

В случае полиномиального потенциала $u(x)$ линейного уравнения Шредингера

$$\psi_{xx} + k^2\psi = u\psi \quad (1.5)$$

имеем

$$f = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n \Rightarrow (n+3)f_{n+1} = \sum_{j=1}^{n-1} f_j f_{n-j}, \quad (1.6)$$

т.е. вид потенциала и положение полюса x_0 влияют только на начальные данные для рекуррентной процедуры. В простейшем случае при $u = \text{const}$ эта рекуррентная формула позволяет выразить коэффициенты f_n через числа Бернулли и определить тем самым асимптотику f_n при $n \rightarrow \infty$. Отображение (1.4) в этом случае тривиализует рекуррентное соотношение (1.6) и переводит последовательность коэффициентов f_n в последовательность коэффициентов Тейлора функции $\sin kz$, $k^2 = 3f_1$. В специальном случае обратной спектральной задачи для уравнения (1.5), рассматриваемом в разделе 3 данной работы (ср. [1]–[4]), показано, как, используя (1.4) и соответствующее отображение коэффициентов степенных рядов, можно найти нули функций Йоста, расположенные в комплексной плоскости спектрального параметра.

Подстановка разложения (1.3) в уравнение (1.1) приводит к аналогичному (1.6) рекуррентному соотношению

$$(n^2 + 3n - 10)g_{n+2} = 6 \sum_{j=0}^n g_j g_{n-j}, \quad n \geq 3. \quad (1.7)$$

Рис. 1. Потенциал $u = f' - f^2 - 1$, $q = 1/8$, $a_0 = 0$ (см. раздел 3).

Начальные данные в этом случае, при линейной по x функции $\varepsilon(x)$, имеют вид

$$g_0 = g_1 = 0, \quad g_2 = \frac{\alpha}{10}, \quad g_3 = \frac{\beta}{6}, \quad (1.8)$$

где α и β берутся из разложения $\varepsilon(x) = \alpha + \beta z$ в окрестности полюса x_0 . Характерной особенностью рекуррентного соотношения (1.7) является обращение в нуль коэффициента $n^2 + 3n - 10$ при $n = 2$, что оставляет неопределенным коэффициент g_4 . Мы покажем, как этот произвольный параметр g_4 можно использовать для постановки задачи о нахождении соседних с x_0 полюсов.

Поскольку задача об аналитическом продолжении степенного ряда за границу круга сходимости сама по себе является некорректной, несколько неожиданными представляются результаты численных экспериментов, основанных на отображениях (1.4) и (1.2). На рис. 1 показан график безотражательного потенциала $u(x)$ оператора Шредингера из раздела 3 с геометрической прогрессией в качестве спектра. На нем приведены результаты расчетов, использующих пересчет коэффициентов разложений Тейлора, основанный на формуле (1.2). На рисунке изображены также результаты вычислений, использующих первоначальное разложение Тейлора, которое сходится на отрезке, на концах которого потенциал обращается в “бесконечность”. Внутри отрезка оба графика совпадают.

Отметим, что если правая часть уравнения (1.1) является полиномиальной по x , то для вычисления радиуса сходимости локального решения $g(z) = \sum a_n z^n$ при помощи персонального компьютера оказывается достаточным исследовать численно графики функций

$$\tilde{a}(n) = \left| \frac{\ln |a_n|}{n} \right|, \quad \hat{a}(n) = \left| \frac{\ln |a_n|}{n \ln n} \right|. \quad (1.9)$$

Вторая формула (1.9) применяется при

$$\ln R \approx -\frac{\ln |a_n|}{n} \approx \infty,$$

когда ряд $\sum a_n z^n$ определяет целую функцию $g(z)$ конечного порядка ρ :

$$|g(z)| < e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Связь роста целой функции $g(z)$ с поведением ее коэффициентов a_n при $n \rightarrow \infty$ устанавливается известным неравенством [5]

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad M(r) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

2. БИЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

В этом разделе рассматривается следующая задача Дирихле:

$$B(w) = \varepsilon(x)w^2, \quad w(x_0) = w(x_1) = 0, \quad (2.1)$$

для билинейного уравнения четвертого порядка

$$B(w) \stackrel{\text{def}}{=} ww_{xxxx} - 4w_x w_{xxx} + 3w_{xx}^2 = \varepsilon(x)w^2. \quad (2.2)$$

Обсудим сначала связь уравнения (2.2) с дифференциальным уравнением (1.1). Это уравнение второго порядка с квадратичной нелинейностью, оно выполняет для (2.2) роль уравнения Риккати. Связь этих уравнений осуществляется, как и в случае уравнения Риккати, при помощи логарифмической производной. Действительно, обозначив $f = (\ln w)_x$, получаем

$$\frac{w_{xx}}{w} = f_x + f^2, \quad \frac{w_{xxx}}{w} = f_{xx} + 3ff_x + f^3, \quad \frac{w_{xxxx}}{w} = f_{xxx} + 4ff_{xx} + 3f_x^2 + 6f^2 f_x + f^4.$$

Таким образом, $B(w) = (f_{xxx} + 6f_x^2)w^2$, и, обозначив $f_x = -g$, находим, что

$$B(w) = \varepsilon(x)w^2, \quad g = -(\ln w)_{xx} \Rightarrow g_{xx} = 6g^2 - \varepsilon(x). \quad (2.3)$$

Билинейное уравнение (2.2) значительно сложнее соответствующего «уравнения Риккати». Однако замена (2.3) избавляет нас от необходимости рассматривать полюсы решений уравнения (1.1)¹⁾.

Полезным является следующее соотношение, заменяющее до некоторой степени закон сложения решений для линейных уравнений:

$$B(uv) = u^2 B(v) + 12(uu_{xx} - u_x^2)(vv_{xx} - v_x^2) + v^2 B(u). \quad (2.4)$$

Эта формула проверяется непосредственным дифференцированием, и из нее, в частности, следует, что решения уравнения (2.2) можно умножать на функцию e^{ax+b} , зависящую от двух произвольных параметров $a, b \in \mathbb{C}$. Это связано с тем, что сумма коэффициентов полинома B , однородного по производным, равна нулю, т.е. $1 - 4 + 3 = 0$. В терминах функции $f = (\ln w)_x$ указанная замена соответствует сдвигу $f \rightarrow f + k$. При $u(x) = e^{kx^2}$ имеем

$$B(u) = 24k^2 u^2, \quad uu_{xx} - u_x^2 = 2ku^2,$$

¹⁾ По-видимому, условие $\varepsilon_{xx} = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы любое решение уравнения (2.2) допускало продолжение на всю комплексную плоскость (ср. [6]).

и формула (2.4) принимает вид

$$w = e^{kx^2} \hat{w} \Rightarrow B(\hat{w}) + 24k(\hat{w}\hat{w}_{xx} - \hat{w}_x^2) = (\alpha - 24k^2)\hat{w}^2. \quad (2.5)$$

Легко видеть, что $\hat{g} = -(\ln \hat{w})_{xx} = g + 2k$,

$$\hat{g}_{xx} = 6\hat{g}^2 - 24k\hat{g} + 24k^2 - \alpha(x).$$

Другими словами, умножению решения уравнения (2.2) на e^{kx^2} соответствует преобразование сдвига $g \rightarrow g + g_0$ в формуле (2.3). Заметим еще, что перемене знака $g \rightarrow -g$ соответствует замена $w \rightarrow v = 1/w$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Начальные данные в задаче Коши для уравнения (2.2) сводятся в силу билинейности к двум случаям: $b_0 = 1$ и $b_0 = 0$. Применяв указанные выше преобразования, мы находим, что при $b_0 = 1$ путем умножения на экспоненту линейной функции можно добиться, чтобы $b_1 = b_2 = 0$. При $b_0 = 0$, не ограничивая общности, можно положить $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = 0$.

ТЕОРЕМА. Нули решения w уравнения (2.2) являются простыми, причем

$$w(x_0) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{xx}(x_0) = 0,$$

если функция w непрерывна вместе со своими производными до седьмого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности нуля порядка k решения уравнения (2.2) имеем

$$w = z^k(b_k + zb_{k+1} + \dots), \quad b_k \neq 0, \Rightarrow g = -(\ln w)_{xx} = kz^{-2} + g_0 + zg_1 + \dots.$$

Подстановка полученного выражения для g в уравнение (1.1) дает $k = 1$. Далее мы находим, что $g_0 = g_1 = 0$ и

$$g = \frac{1}{z^2} + z^2g_2 + z^3g_3 + z^4g_4 + z^5g_5 + \dots, \quad 10g_2 = \alpha_0, \quad 6g_3 = \alpha_1,$$

где α_0, α_1 — два первых коэффициента разложения функции $\varepsilon(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$\varepsilon(x) = \alpha_0 + z\alpha_1 + z^2\alpha_2 + \dots.$$

Таким образом, вне зависимости от выбора коэффициента g_4 ,

$$6g^2 - g_{xx} = 10g_2 + 6g_3z - 8g_5z^3 + \dots,$$

коэффициент при z^2 в правой части оказался равным нулю, и полюсное решение вида (1.3) может удовлетворять уравнению (1.1) только при нулевом коэффициенте $\alpha_2 = \varepsilon_{xx}(x_0)/2$.

Следствием теоремы является утверждение, указывающее на связь вопроса об аналитических свойствах решений уравнения (1.1) с условием $\varepsilon_{xx} = 0$ (см. сноску 1).

СЛЕДСТВИЕ. При $\varepsilon(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2$, $\alpha_2 \neq 0$, решение задачи Дирихле (2.1) не допускает аналитического продолжения за отрезок $[x_0, x_1]$.

Возникающая при $\varepsilon_{xx} \neq 0$ в концах отрезка особенность седьмых производных рассматривается кратко в конце настоящего раздела.

2.1. Спектральный параметр λ . Предположим, что решение задачи Дирихле (2.1) допускает аналитическое продолжение в достаточно широкую область, содержащую внутри себя отрезок $[x_0, x_1]$, и выполняется условие $\varepsilon_{xx} = 0$ (см. сноску 1).

Подстановка

$$w = zP(z), \quad P(z) = 1 + zp_1 + z^2p_2 + z^3p_3 + \dots$$

в билинейное уравнение дает согласно формуле (2.4)

$$B(P) + \frac{12}{z^2}(P_x^2 - PP_{xx}) = \varepsilon(x)P^2 \Rightarrow 2p_2 = p_1^2, \quad 3p_3 = p_1^3.$$

Заменой $w \rightarrow we^{kx}$ можно добиться, чтобы $p_1 = 0$. Поэтому в случае $w(x_0) = 0$, не ограничивая общности, можно ограничиться решениями уравнения (2.2) следующего специального вида:

$$w(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = p_2 = p_3 = 0. \quad (2.6)$$

ЛЕММА. Пусть решение $w(z)$ уравнения (2.2) удовлетворяет условиям (2.6). Обозначим $p_4 = a$, $p_5 = b$, $p_6 = \lambda$, и пусть

$$\deg z = -1, \quad \deg a = 4, \quad \deg b = 5, \quad \deg \lambda = 6.$$

Тогда коэффициенты $p_k = p_k(a, b, \lambda)$, $k > 6$, однозначно определяются значениями параметров a , b , λ и являются обобщенно однородными полиномами степени k по этим переменным, а функция $P(z) = P(z, a, b, \lambda)$ является однородной функцией нулевого порядка. При этом первые две переменные a , b однозначно связаны с правой частью уравнения (1.1) формулой

$$a + bz = -\frac{\varepsilon(x)}{120}, \quad z \equiv x - x_0,$$

а переменная λ является свободным параметром.

Как и в случае теоремы, для доказательства воспользуемся формулой (2.3) и компактной рекуррентной формулой (1.7) для коэффициентов ряда (1.3) (см. раздел 1). Коэффициенты p_j , $j \geq 4$, ряда (2.6) восстанавливаются по коэффициентам g_j , $j \geq 2$, с помощью рекуррентных формул

$$p_{n+2} = -\frac{1}{n+2} \sum_{j=2}^{n-4} \frac{g_j}{j+1} p_{n-j}, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = p_2 = p_3 = 0. \quad (2.7)$$

Из этих формул по индукции выводится утверждение леммы.

Пользуясь однородностью, перепишем задачу Дирихле (2.1) в виде

$$B(w) = \alpha(x)w^2, \quad w(0) = w(1) = 0. \quad (2.8)$$

В этом случае уравнение $\sum p_n = 0$ дает нам алгебраическое уравнение относительно значений $\lambda = p_6$, при которых степенной ряд (2.6) обращается в нуль при $z = 1$.

Рассмотрим значения параметра $\lambda = p_6$, при которых у “нелинейной спектральной задачи” (ср. [7]) имеется нетривиальное решение, как собственные значения задачи Дирихле (2.8). В частности, оборвав ряд (2.6) на z^{11} , мы получаем в силу формул леммы

$$p_8 = -\frac{5}{14}a^2, \quad p_9 = -\frac{1}{3}ab, \quad p_{10} = -\frac{1}{11}\left(a\lambda + \frac{7}{6}b^2\right), \quad p_{11} = -\frac{1}{11}b\lambda. \quad (2.9)$$

Это дает следующую приближенную формулу для первого собственного значения задачи (2.8):

$$\lambda_1 = -11\frac{1+A}{11-A} + \frac{18b^2 - 176Ab + 165A^2}{42(11-A)}, \quad A = a + b. \quad (2.10)$$

Рассматривая дальнейшие приближения, можно убедиться, что введенный таким образом спектральный параметр λ годится в качестве прицельного параметра при вычислительных экспериментах. Более того, так как степень спектрального параметра λ постепенно повышается, уравнение

$$\Delta(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 0 \quad (2.11)$$

определяет и следующие собственные значения, помимо первого λ_1 , определенного формулой (2.10). С практической точки зрения при этом удобно фиксировать p_4 , p_5 и $p_6 = \lambda$ и, в дополнение к задаче о вычислении спектра, рассматривать задачу о нулях $P(z) = 0$ решений уравнения

$$B(P) + \frac{12}{z^2}(P_z^2 - PP_{zz}) + 120(p_4 + p_5z)P^2 = 0, \quad P(z) = 1 + \sum_{n=4}^{\infty} p_n z^n. \quad (2.12)$$

Формулы типа (2.9) и обрыв степенного ряда $P(z)$ приводят к удобной и достаточно точной формуле для определения “соседних” с $w(x_0) = 0$ нулей решения w уравнения (2.2). Учет высших членов, полученных при помощи рекуррентного соотношения (1.7), позволяет вычислить несколько десятков нулей. Связь нулей $P(z)$ с решениями уравнения (2.11) (см. лемму) можно показать на “автомодельном примере” с $p_4 = p_5 = 0$. В этом частном случае (см. ниже) в степенном ряду $P(z)$ остаются только степени, кратные шести и в силу однородности ряд (2.12) принимает следующий вид:

$$P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}_n z^{6n}, \quad \hat{p}_n = \hat{p}_n(\lambda) = \hat{p}_n(1)\lambda^n. \quad (2.13)$$

При $\lambda = 1$ нули $P(z)$ (см. рис. 2) образуют правильную треугольную решетку, а изменение λ приводит лишь к растяжению этой решетки.

Хотя рекуррентная формула (1.7) удобна для практических вычислений, полученный ряд (1.3) не удастся использовать для оценки радиуса сходимости соответствующего ряда $P(z) = P(z, a, b, y)$ (см. лемму). Таким образом, возникает задача

Рис. 2. Нули функции $P(z)$.

построения и исследования более сложной рекуррентной формулы, связанной непосредственно с уравнением (2.12). Рассматривая это уравнение в классе степенных рядов с нулевыми первыми коэффициентами, перейдем к операторам дифференцирования, для которых степени независимой переменной z^n являются собственными функциями:

$$D \stackrel{\text{def}}{=} z \frac{d}{dz} \Rightarrow D^j: \left(\sum_{n=4}^{\infty} a_n z^n \right) \rightarrow \sum_{n=4}^{\infty} n^j a_n z^n, \quad j = 1, 2, \dots$$

Обозначим $P_j = D^j(P)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Тогда, очевидно, $zP_z = P_1$ и

$$z^2 P_{zz} = P_2 - P_1, \quad z^3 P_{zzz} = P_3 - 3P_2 + 2P_1, \quad z^4 P_{zzzz} = P_4 - 6P_3 + 11P_2 - 6P_1.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.12), получаем

$$PQ = P_1(4P_3 - 6P_2 - 7P_1) - 3P_2^2, \quad (2.14)$$

где $P = \sum p_n z^n$, $p_0 = 1$, $p_1 = p_2 = p_3 = 0$,

$$Q = [D^4 - 6D^3 - D^2 + 6D + 120(p_4 z^4 + p_5 z^5)](P) = \sum_{n=8}^{\infty} q_n z^n.$$

Таким образом, $q_n = 0$ при $n < 8$,

$$q_n = \gamma_n p_n + 120(p_4 p_{n-4} + p_5 p_{n-5}), \quad n \geq 8, \quad \gamma_n = (n-6)(n^3 - n).$$

Собирая члены с одинаковыми степенями z^n , $n \geq 8$, мы получаем требуемую рекуррентную формулу, эквивалентную рассматриваемому уравнению (2.14):

$$q_n + \sum_{k=8}^{n-4} q_k p_{n-k} = \sum_{k=4}^{n-4} p_k p_{n-k} \beta_n(k), \quad \beta_n(k) = k(n-k)(7k^2 - 6k - 3nk - 7). \quad (2.15)$$

Начальными данными для рекуррентного соотношения (2.15) служат значения спектрального параметра $\lambda = p_6$ и двух первых коэффициентов искомого ряда $P(z)$. Напомним, что в силу леммы коэффициенты p_4 и p_5 непосредственно связаны с заданной правой частью рассматриваемого уравнения (2.14). Поэтому наше исходное уравнение (1.1) записывается в виде

$$g_{xx} = 6g^2 + 120(p_4 + p_5 z), \quad z = x - x_0.$$

При $p_5 = 0$ уравнение допускает, очевидно, дополнительное интегрирование и сводится к уравнению, определяющему эллиптическую функцию Вейерштрасса:

$$g_x^2 = 4(g^3 + 60p_4 g + 210\lambda). \quad (2.16)$$

Таким образом, в этом частном случае при $\varepsilon(x) = \text{const}$ спектральный параметр $\lambda = p_6$ определяет вид соответствующей эллиптической кривой, а при вырождении кривой удовлетворяет уравнению

$$(21\lambda)^2 + 320p_4^3 = 0.$$

Во всех перечисленных случаях функция $P(z)$ не имеет особенностей в комплексной плоскости и можно надеяться, что классическая теория целых функций поможет разобраться с асимптотикой при $n \rightarrow \infty$ коэффициентов p_n , определяемых рекуррентным соотношением (2.15) в случае общего положения $\varepsilon_{xx} = 0$. Простейшей здесь является задача об асимптотике коэффициентов p_n при $\varepsilon = 0$. Этот случай (рис. 2) соответствует нулевым начальным данным $p_4 = p_5 = 0$ для рекуррентной формулы (2.15) и приводит к степенному ряду (2.13) по переменной $\zeta = z^6$. Очевидная формула

$$\widehat{D} = \zeta \frac{d}{d\zeta} = 6z \frac{d}{dz} = 6D$$

показывает, что уравнение (2.14) меняется несущественно при замене независимой переменной z на ζ . Соответственно изменяется рекуррентная формула (2.15) и вычисление коэффициентов $\hat{p}_n(\lambda) = \lambda^n \hat{p}_n(1)$ ряда (2.13) дает, например,

$$\hat{p}_2 = \frac{-7\lambda^2}{286}, \quad \hat{p}_3 = \frac{-161\lambda^3}{277134}, \quad \hat{p}_4 = \frac{217\lambda^4}{280459608}, \quad \dots$$

Здесь можно проследить определенную аналогию с соотношением (1.6) и числами Бернулли.

2.2. Случай $\varepsilon_{xx} = \text{const} \neq 0$. Численное построение решения задачи Дирихле (2.1) оказывается, как и следовало ожидать, малочувствительным к нарушению условия $\varepsilon_{xx} = 0$. Можно, например, построить аналог формулы (2.10) для приближенного вычисления первого собственного значения нелинейной спектральной задачи (2.1). Однако характер особенностей решений меняется, и степенные ряды типа (1.3), (2.6) модифицируются логарифмическими добавками. В частности, при квадратичной по x правой части уравнения (1.1)

$$\varepsilon(x) = \alpha_0 + z\alpha_1 + z^2\alpha_2, \quad z = x - x_0, \quad (2.17)$$

аналогом разложения (2.6) является следующая приближенная формула:

$$w = z - \frac{1}{120}(z^5\alpha_0 + z^6\alpha_1) + \frac{\alpha_2}{210}z^7 \ln z + \lambda z^7 + \dots \quad (2.18)$$

для решения задачи Дирихле (2.8). Эта формула по-прежнему содержит произвольный параметр λ , но теперь (см. следствие) решение не допускает аналитического продолжения в комплексную плоскость. Дальнейшее построение разложения (2.18) приводит, как показал Гарифуллин [8], к асимптотическому ряду, содержащему высшие степени двух “независимых” переменных z и $\ln z$.

Каноническое преобразование (1.2) связывает, очевидно, задачу Дирихле (2.8) с задачей о построении решений уравнения (1.1) с полюсами в двух заранее заданных точках. В случае (2.17) формулы (2.3) сводят задачу о полюсах для уравнения (1.1) к задаче о нулях для уравнения (2.2), но решения последнего имеют конечную гладкость, и это сужает возможности рассматриваемой нами модификации операции аналитического продолжения до стандартных приближенных методов. Другими словами, в этом случае решения w уравнения (2.2), непрерывные вместе с производными до шестого порядка, обязательно имеют логарифмическую особенность в точках, где $w(x) = 0$, и эту особенность необходимо учитывать при аналитических построениях.

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

В задаче рассеяния для линейного уравнения Шредингера (1.5) с убывающим на бесконечности потенциалом $u(x)$ рассматриваются функции Ёоста $\psi^\pm(x, k)$, удовлетворяющие асимптотическим граничным условиям

$$\psi_{xx}^\pm + k^2\psi^\pm = u(x)\psi^\pm, \quad \psi^\pm(x, k)e^{\mp i(kx)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Функция Ёоста $\psi^+(x, k)$ является регулярной аналитической функцией k в верхней полуплоскости $\text{Im } k \geq 0$ и определяется с помощью решения следующего интегрального уравнения для функции $\phi(x, k) = \psi^+(x, k)e^{-i(kx)}$:

$$\phi(x, k) = 1 + \int_x^\infty \frac{1 - e^{2ik(x'-x)}}{2ik} u(x') \phi(x', k) dx', \quad \text{Im } k \geq 0.$$

Вторая функция Ёоста, аналитическая при $\text{Im } k \geq 0$, определяется аналогично интегрированием по x' от $-\infty$. Решающую роль в теории рассеяния играет следующее

простое алгебраическое соотношение, связывающее функции Ёоста:

$$\psi^-(x, k) = a(k)\psi^+(x, -k) + b(k)\psi^+(x, k), \quad \text{Im } k = 0. \quad (3.1)$$

Не зависящие от x коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ считаются в обратной задаче заданными при вещественных значениях k , а потенциал $u(x)$ подлежит определению. Заметим, что указанные коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ выражаются через соответствующие вронскианы и

$$2ika(k) = \psi^- \psi_x^+ - \psi_x^- \psi^+, \quad a(k)a(-k) = 1 + b(k)b(-k), \quad (3.2)$$

$$\ln a(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx + \frac{1}{(2ik)^3} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx + \dots, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

В силу формулы (3.2) функция $a(k)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, и нули этого аналитического продолжения играют важную роль в обратной задаче. В этих комплексных нулях функции $a(k)$ задаются коэффициенты пропорциональности функций Ёоста:

$$\psi^-(x, k_j) = C_j \psi^+(x, k_j), \quad a(k_j) = 0, \quad \text{Im } k_j > 0, \quad (3.4)$$

и, так как функции $\psi^\pm(x, k_j)$ стремятся к нулю на соответствующих бесконечностях, то из соотношений (3.4) следует, что $\lambda_j = k_j^2$ являются собственными значениями оператора Шредингера $L = -D^2 + u$. Заканчивая это краткое описание математических понятий задачи рассеяния для одномерного оператора Шредингера, напомним, что *дополнительным спектром* в обратной задаче называется множество нулей функций Ёоста $\psi^\pm(x, k)$ при фиксированном $x = x_0$ ²⁾.

Применим методику, изложенную в разделе 2, к обратной задаче для оператора Шредингера с безотражательным потенциалом и бесконечным дискретным спектром

$$\lambda = -1, -q^2, -q^4, \dots, \quad 0 < q^2 < 1, \quad (3.5)$$

имеющим точку накопления $\lambda = 0$ [1]–[4]. В этом случае коэффициент $b(k)$ в формулах (3.1), (3.2) равен тождественно нулю, но $u(x) = O(1/x^2)$ слабо убывает на бесконечности. При более быстром убывании $u(x) = O(1/x^{2+\varepsilon})$ безотражательного потенциала спектр, как известно, является конечным, а функции Ёоста $\psi^\pm(x, k)e^{\mp i(kx)}$ становятся полиномами по k после умножения на подходящие нормировочные множители, не зависящие от x . Дополнительный спектр при этом совпадает с нулями этих полиномов [9], что в силу осцилляционных теорем немедленно дает точную оценку вещественного потенциала через минимальное собственное значение $\bar{\lambda} < 0$:

$$0 > u(x) > 2\bar{\lambda}.$$

В случае оператора Шредингера $L = -D^2 + u$ с геометрической прогрессией (3.5) в качестве спектра и

$$a(k) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 - i\zeta q^j}{1 + i\zeta q^j}, \quad \zeta = \frac{1}{k},$$

²⁾Понятие дополнительного спектра служило ориентиром при формулировке нелинейной задачи (2.1) на собственные значения.

для построения безотражательного потенциала можно использовать автомодельную редукцию одевающей цепочки, которая приводит к уравнению Шабата [1]:

$$f'(x) + q^2 f'(qx) = f^2(x) - q^2 f^2(qx) - 1 + q^2, \quad u = f' + f^2 - 1. \quad (3.6)$$

Это уравнение, представляющее собой q -деформацию уравнения Риккати $f' + f^2 = \text{const}$, рассматривалось в ряде работ [2]–[4], однако оно трудно поддается исследованию обычными методами. Остается, например, нерешенной задача о структуре особенностей аналитического продолжения с вещественной оси x решений уравнения (3.6) (см. [2]).

Рис. 3. Аппроксимация нулей функции Йоста нулями полиномов степени 150, 200, 250.

Тем не менее при любом начальном значении $f(0) = c_0$ аналитическое решение уравнения (3.6) находится однозначно в виде степенного ряда $f = c_0 + c_1 x^2 + c_2 x^4 + \dots$,

$$c_1 = \frac{1 - q^2}{1 + q^2}(c_0^2 - 1), \quad c_n = \frac{1 - q^{n+1}}{n(1 + q^{n+1})} \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}, \quad n > 1,$$

с конечным радиусом сходимости. Выйти за границы круга сходимости позволяют замены (1.4) и (1.2):

$$u(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} (\ln w(x)), \quad f(x) = \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{w(qx)}{w(x)} \right).$$

Для этого достаточно пересчитать коэффициенты разложения Тейлора функции f в коэффициенты разложения Тейлора функции w . Результаты соответствующих вычислений приведены на рис. 3.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Широкая область приложений двойственности, определяемой формулами логарифмического дифференцирования (1.4) и (1.2), не нуждается, по-видимому, в комментариях. В любом случае вопрос об аналитических свойствах этих отображений заслуживает, на наш взгляд, более детального анализа (уместно вспомнить, например, теорию вычетов). Наиболее актуальным и перспективным с математической точки зрения является исследование асимптотики коэффициентов рядов, определяемых рекуррентной формулой (2.15). Мы надеемся также, что удастся расширить область приложений разработанной в данной работе простой методики аналитического продолжения с использованием формул (1.4) и (1.2).

Благодарности. В обсуждении рассмотренных в данной работе задач принимали активное участие В. Э. Адлер, Р. Н. Гарифуллин, В. Г. Марихин и С. И. Похожаев. Авторы выражают им глубокую благодарность за помощь и полезные критические замечания.

Работа А. Б. Шабата была выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00440, 08-01-00453) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3472.2008.2).

Список литературы

- [1] A. B. Shabat, *Inverse Problems*, **8**:2 (1992), 303–308.
- [2] А. Дегасперис, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **100**:2 (1994), 230–247.
- [3] V. E. Adler, “On the rational solutions of the Shabat equation”, *Nonlinear Physics: Theory and Experiment*, Proc. Int. Workshop, eds. E. Alfinito et al., World Scientific, River Edge, NJ, 1996, 3–10.
- [4] Yunkang Liu, *J. Differential Equations*, **154**:1 (1999), 1–41.
- [5] Е. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980.
- [6] V. I. Gromak, I. Laine, S. Shimomura, *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane*, de Gruyter Stud. Math., **28**, Walter de Gruyter, Berlin, 2002.
- [7] С. И. Похожаев, *ДАН*, **165** (1965), 36–39.
- [8] Р. Н. Гарифуллин, *Частное сообщение* (2007).
- [9] А. Б. Шабат, *Динамика сплошной среды*, Сб. науч. трудов, № 5, АН СССР, Институт гидродинамики, Новосибирск, 1970, 130–145.

Поступила в редакцию 13.02.2008