Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Тайманов, С. П. Царев, Двумерные рациональные солитоны, построенные с помощью преобразований Мутара, и их распад, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 2, 188–207

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:34:24

© 2008 г.

И. А. Тайманов*, С. П. Царев†

ДВУМЕРНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ СОЛИТОНЫ, ПОСТРОЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МУТАРА, И ИХ РАСПАД

Построено семейство двумерных стационарных операторов Шредингера с быстроубывающими гладкими рациональными потенциалами и нетривиальными L_2 -ядрами. Показано, что некоторые из построенных гладких потенциалов порождают решения уравнения Веселова–Новикова, быстро убывающие на бесконечности, несингулярные при $t = 0$ и имеющие особенности при конечных временах $t \geq t_0 > 0$.

Ключевые слова: двумерный оператор Шредингера, преобразование Мутара, уравнение Веселова–Новикова, распад решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы используем преобразование Мутара [1], являющееся двумерным обобщением хорошо известного в теории солитонов преобразования Дарбу, в исследовании некоторых проблем спектральной теории двумерных операторов и $(2 + 1)$ -мерных нелинейных эволюционных уравнений. В частности, основные результаты работы состоят в явной конструкции:

- 1) двумерных операторов Шредингера

$$H = -\Delta + u = -(\partial_x^2 + \partial_y^2) + u(x, y)$$

с быстроубывающими гладкими рациональными потенциалами и нетривиальными L_2 -ядрами, содержащими по крайней мере двумерное подпространство, порожденное рациональными собственными функциями (см. теоремы 2, 3);

- 2) распадающихся за конечное время решений уравнения Веселова–Новикова (ВН) – двумерного обобщения уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ). Упомянутые

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.
E-mail: taimanov@math.nsc.ru

†Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева, Красноярск, Россия. E-mail: sptsarev@mail.ru

решения обладают быстроубывающими гладкими рациональными начальными данными Коши (см. теорему 4).

Первая из вышеуказанных конструкций была анонсирована и кратко описана в работе [2]. Для операторов с потенциалами, убывающими достаточно быстро, существует развитая спектральная теория [3], [4]. Заметим, что для одномерных операторов Шредингера с потенциалами, убывающими достаточно быстро, существование квадратично-суммируемых собственных функций на нулевом уровне энергии невозможно (см., например, [3]). Для операторов в пространствах большой размерности (т.е. при размерности, большей или равной 5) можно легко построить подобные примеры с ядром оператора, содержащим сглаженную функцию Грина оператора Δ . Однако для двумерных операторов построенные нами примеры являются первыми известными примерами операторов, имеющих нетривиальное L_2 -ядро.

Уравнение ВН имеет вид

$$\begin{aligned} U_t &= \partial^3 U + \bar{\partial}^3 U + 3\partial(UV) + 3\bar{\partial}(\bar{V}U) = 0, \\ \bar{\partial}V &= \partial U, \end{aligned} \tag{1}$$

и является первым в иерархии уравнений вида

$$H_t = HA + BH,$$

где A и B – дифференциальные операторы. Здесь и всюду ниже мы используем стандартные операторы производных $\partial = \partial_z = (\partial_x - i\partial_y)/2$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} = (\partial_x + i\partial_y)/2$ по комплексной переменной $z = x + iy$. Указанные уравнения были введены в работе [5] как уравнения, сохраняющие спектр оператора H на нулевом уровне энергии. Главная часть n -го уравнения иерархии ВН имеет вид

$$U_t = \partial^{2n+1}U + \bar{\partial}^{2n+1}U + \dots,$$

где многоточие обозначает слагаемые меньшего порядка.

Из метода обратной задачи вытекает, что решения уравнения КдФ с аналитическими быстроубывающими данными Коши не распадаются за конечное время. Корректность постановки задачи Коши для этого уравнения доказана для многих функциональных пространств (см. работу [6] и приведенные в ней ссылки). Как показано в данной работе, это неверно для рассматриваемого нами естественного двумерного обобщения КдФ.

Примеры распадающихся решений получены не с помощью метода обратной задачи, который недостаточно развит в рассматриваемом случае. Обратная задача рассеяния для двумерного оператора Шредингера на заданном уровне энергии впервые была поставлена в [7] и изучалась для положительных уровней энергии [8] или уровней ниже основного состояния [9]. Мы полагаем, что изучение этой задачи на нулевом уровне энергии будет весьма полезным для понимания явлений, обсуждаемых в данной работе.

Следует заметить, что построенные нами потенциалы, полученные итерациями преобразования Мутара, можно рассматривать как двумерное обобщение одномерных рациональных солитонов, полученных аналогичным способом с помощью преобразования Дарбу (см. п. 2.2). Однако в одномерном случае такие потенциалы всегда сингулярны.

Отметим, что потенциалы получены с помощью итераций преобразования Мутара из потенциала, равного постоянной. Эти потенциалы интегрируемы на нулевом уровне энергии в том смысле, что все решения соответствующего уравнения $H\psi = 0$ могут быть явно найдены с помощью квадратур и линейных комбинаций гармонических функций. Подробнее указанная конструкция приведена в разделе 5.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ И МУТАРА

2.1. Преобразование Дарбу. Пусть

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

является одномерным оператором Шредингера и функция ω удовлетворяет уравнению $H\omega = 0$. Функция ω определяет факторизацию H :

$$H = A^T A, \quad A = -\frac{d}{dx} + v, \quad A^T = \frac{d}{dx} + v, \quad v = \frac{\omega_x}{\omega}. \quad (2)$$

Действительно,

$$A^T A = \left(\frac{d}{dx} + v \right) \left(-\frac{d}{dx} + v \right) = -\frac{d^2}{dx^2} + v^2 + v_x,$$

и уравнение

$$v_x + v^2 = u$$

тем самым эквивалентно $H\omega = 0$. Если функция v вещественнозначна, то имеет место тождество $A^* = A^T$.

Преобразование Дарбу оператора H состоит в перестановке операторов A^T и A [10]:

$$H = A^T A \rightarrow \tilde{H} = A A^T,$$

или в терминах u :

$$u = v^2 + v_x \rightarrow \tilde{u} = v^2 - v_x.$$

Легко проверить следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если функция φ удовлетворяет уравнению $H\varphi = E\varphi$, где $E = \text{const}$, то функция $\tilde{\varphi} = A\varphi$ удовлетворяет уравнению $\tilde{H}\tilde{\varphi} = E\tilde{\varphi}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вообще говоря, преобразование Дарбу определяется любым решением уравнения $H\omega = c\omega$ при $c = \text{const}$. В этом случае оно сводится к преобразованию оператора $H' = H - c$, для которого $H'\omega = 0$.

2.2. Одномерные солитоны, получаемые с помощью преобразования Дарбу. Пусть $u = 0$ и $\omega = \omega_1 = x = \tau_1$. Тогда

$$v = \frac{1}{x}, \quad v_x = -\frac{1}{x^2}, \quad u_1 = \tilde{u} = \frac{2}{x^2}.$$

Функция

$$\psi(P, x) = \left(1 - \frac{1}{i\sqrt{E}x}\right) e^{i\sqrt{E}x}$$

мероморфна по переменной $P = (E, \lambda)$ на римановой поверхности $\Gamma = \{\lambda^2 = E\}$, и для любого значения E ее ветви дают базис решений уравнения

$$H_1\psi = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u_1\right)\psi = E\psi$$

(мы будем нормировать функцию ψ условием $\psi \approx e^{i\sqrt{E}x}$ при $E \rightarrow \infty$). Применяя преобразование Дарбу, определенное $\omega_2 = x^2 + \tau_2/\omega_1$, получаем новый потенциал. В частности, для любого n потенциал

$$U_n = \frac{n(n+1)}{x^2}$$

может быть получен после n итераций. Орбита потенциала U_n под действием уравнений иерархии КдФ дает n -мерное семейство M_n потенциалов.

Справедливы следующие утверждения [11], [12].

1. Существует общая рекуррентная процедура, найденная Адлером и Мозером [11] для определения полиномов $\theta_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ таких, что:

а) θ_n – полином степени $n(n+1)/2$ по переменной $x = \tau_1$, в частности

$$\theta_1 = x = \tau_1, \quad \theta_2 = x^3 + \tau_2, \quad \theta_3 = x^6 + 5\tau_2x^3 + \tau_3x - 5\tau_2^2;$$

б) функция

$$u_n(x) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \theta_n(\tau_1 + x, \tau_2, \dots, \tau_n)$$

является потенциалом H , полученным после n итераций преобразования Дарбу (при исходном значении $u_0 = 0$), где τ_k , $k = 2, 3, \dots$, – свободные скалярные параметры (константы интегрирования), появляющиеся последовательно на каждом шаге итерации;

в) для $\varphi_n = \theta_{n+1}/\theta_n$ имеем

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u_n\right)\varphi_n = 0.$$

2. M_n – n -мерное семейство, параметризованное $\tau \in \mathbb{C}^n$ и состоящее из потенциалов $u_n(\tau_1 + x, \tau_2, \dots, \tau_n)$.

3. Существуют бирациональные преобразования $\tau \rightarrow t$ вида

$$t_k = a_k\tau_k + g_k(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}), \quad a_k \neq 0,$$

такие, что

$$\frac{\partial u_n}{\partial t_k} = X_k(u_n)$$

есть k -й поток иерархии КдФ.

4. Нули $x_1, \dots, x_{n(n+1)/2}$ полиномов θ_n при эволюции в соответствии с уравнениями иерархии КдФ определяют некоторые интегрируемые гамильтоновы системы. Например, для исходного уравнения КдФ

$$u_t = 3uu_x - \frac{1}{2}u_{xxx} = X_2(u)$$

их динамика описывается системой Калоджеро–Мозера.

2.3. Преобразование Мутара. Пусть H – двумерный потенциальный оператор Шредингера, ω – решение уравнения

$$H\omega = (-\Delta + u)\omega = 0.$$

Тогда (эллиптическое) преобразование Мутара оператора H (ср. [1]) определено следующим образом:

$$\tilde{H} = -\Delta + u - 2\Delta \ln \omega = -\Delta - u + 2 \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega^2}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если функция φ удовлетворяет уравнению $H\varphi = 0$, то функция θ , определяемая из совместной системы

$$(\omega\theta)_x = -\omega^2 \left(\frac{\varphi}{\omega} \right)_y, \quad (\omega\theta)_y = \omega^2 \left(\frac{\varphi}{\omega} \right)_x, \quad (3)$$

удовлетворяет уравнению $\tilde{H}\theta = 0$.

Очевидно, что если θ удовлетворяет (3), то

$$\theta + \frac{C}{\omega}, \quad C = \text{const}, \quad (4)$$

удовлетворяет (3) для любой постоянной C .

Мы будем использовать следующее обозначение для преобразования Мутара:

$$M_\omega(u) = \tilde{u} = u - 2\Delta \ln \omega, \quad M_\omega(\varphi) = \left\{ \theta + \frac{C}{\omega}, C \in \mathbb{C} \right\}.$$

В одномерном пределе преобразование Мутара сводится к преобразованию Дарбу. Действительно, пусть $u = u(x)$ зависит лишь от x , а $\omega = f(x)e^{\sqrt{c}y}$. В этом случае функция f удовлетворяет одномерному уравнению Шредингера

$$H_0 f = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u \right) f = cf,$$

и преобразование Мутара сводится к преобразованию Дарбу оператора H_0 , определенному решением f :

$$H = H_0 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow \tilde{H} = \tilde{H}_0 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Если $g = g(x)$ удовлетворяет уравнению $H_0 g = E g$, то $H \varphi = 0$, где $\varphi = e^{\sqrt{E}y} g(x)$. Из (3) заключаем, что $\theta = e^{\sqrt{E}y} h(x)$ удовлетворяет уравнению $\tilde{H} \theta = 0$, если

$$h = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{E}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{f_x}{f} \right) g,$$

т.е. h отличается от преобразования Дарбу функции g лишь множителем:

$$h = -\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{E}} A g.$$

Здесь $H_0 - c = A^T A$ – факторизация оператора $H_0 - c$, определенная f . Обратное преобразование Дарбу задается формулой

$$g = \frac{1}{\sqrt{c} - \sqrt{E}} \left(\frac{d}{dx} + \frac{f_x}{f} \right) h.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существует другое двумерное обобщение преобразования Дарбу – каскадное преобразование Лапласа. Оно определено для более общих операторов, т.е. операторов Шредингера с электромагнитным полем

$$H = 4(\bar{\partial} + \beta)(-\partial + \alpha) + u,$$

и задается формулой

$$H \rightarrow \tilde{H} = 4u(-\partial + \alpha)u^{-1}(\bar{\partial} + \beta) + u.$$

Тем самым, если $H \varphi = 0$, то $\tilde{\varphi} = (-\partial + \alpha)\varphi$ удовлетворяет уравнению $\tilde{H} \tilde{\varphi} = 0$. В одномерном пределе указанное преобразование также сводится к преобразованию Дарбу. Его связь с интегрируемыми системами была недавно изучена в [13].

3. СОЛИТОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ, ПОЛУЧАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МУТАРА

В [2] мы привели простейшие примеры быстроубывающих рациональных потенциалов двумерного оператора Шредингера, имеющих многомерное L_2 -ядро. Эти примеры были построены с помощью преобразования Мутара следующим образом.

Основная конструкция. Пусть

$$H_0 = -\Delta = -\Delta + u_0$$

– оператор с потенциалом $u_0 = 0$, ω_1 и ω_2 удовлетворяют соответственно уравнениям

$$H_0 \omega_1 = 0, \quad H_0 \omega_2 = 0.$$

Применим преобразования Мутара M_{ω_1} и M_{ω_2} , определенные решениями ω_1, ω_2 , и получим операторы

$$H_1 = -\Delta + u_1, \quad H_2 = -\Delta + u_2,$$

где $u_1 = M_{\omega_1}(u_0)$, $u_2 = M_{\omega_2}(u_0)$. По построению имеем

$$H_1 M_{\omega_1}(\omega_2) = 0, \quad H_2 M_{\omega_2}(\omega_1) = 0.$$

Выберем некоторую функцию $\theta_1 \in M_{\omega_1}(\omega_2)$ и положим

$$\theta_2 = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \theta_1 \in M_{\omega_2}(\omega_1).$$

Эти функции определяют преобразования Мутара операторов H_1 и H_2 . В результате получаем операторы H_{12} и H_{21} с потенциалами

$$u_{12} = M_{\theta_1}(u_1), \quad u_{21} = M_{\theta_2}(u_2).$$

Следующая лемма может быть доказана прямым вычислением, которое мы опускаем.

ЛЕММА. 1) $u_{12} = u_{21} = u$, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} u_0 & \xrightarrow{\omega_1} & u_1 \\ \omega_2 \downarrow & & \downarrow \theta_1 \\ u_2 & \xrightarrow{\theta_2} & u_{12} = u_{21} \end{array},$$

где $\theta_1 \in M_{\omega_1}(\omega_2)$, $\theta_2 = -\omega_1 \theta_1 / \omega_2 \in M_{\omega_2}(\omega_1)$, коммутативна;

2) для $\psi_1 = 1/\theta_1$ и $\psi_2 = 1/\theta_2$ имеем

$$H\psi_1 = H\psi_2 = 0,$$

где $H = -\Delta + u$.

Отметим, что в приведенной конструкции имеется свободный скалярный параметр C (4), соответствующий выбору конкретной функции $\theta_1 \in M_{\omega_1}(\omega_2)$. Этот параметр в некоторых случаях может быть использован для построения несингулярного потенциала u и функций ψ_1 и ψ_2 .

Применим теперь описанную конструкцию для случая $u_0 = 0$. Искомая явная формула для нахождения потенциала u приводится в следующей теореме 1. Она также может быть доказана прямым вычислением, которое мы опускаем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\omega_1 = p_1(z) + \overline{p_1(z)}, \quad \omega_2 = p_2(z) + \overline{p_2(z)},$$

где p_1, p_2 – голоморфные функции от z . Рассмотрим преобразование Мутара оператора $H_0 = -\Delta$, определенное ω_1 . Тогда соответствующее преобразование (3) от ω_2 задается формулой

$$\theta_1 = \frac{i}{p_1 + \bar{p}_1} \left((p_1 \bar{p}_2 - p_2 \bar{p}_1) + \int ((p'_1 p_2 - p_1 p'_2) dz + (\bar{p}_1 \bar{p}'_2 - \bar{p}'_1 \bar{p}_2) d\bar{z}) \right).$$

Тем самым вторая итерация, определенная функцией θ_1 , дает нам оператор $H = -\Delta + u$, где

$$\begin{aligned} u &= -2\Delta \ln \omega_1 - 2\Delta \ln \theta_1 = -2\Delta \ln(\omega_1 \theta_1) = \\ &= -2\Delta \ln i \left((p_1 \bar{p}_2 - p_2 \bar{p}_1) + \int ((p'_1 p_2 - p_1 p'_2) dz + (\bar{p}_1 \bar{p}'_2 - \bar{p}'_1 \bar{p}_2) d\bar{z}) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Свободный скалярный параметр, который мы упомянули ранее, появляется здесь как постоянная интегрирования в (5).

Применим теорему 1 для получения некоторых интересных примеров операторов Шредингера. Ниже мы будем рассматривать лишь случаи, в которых ω_1 и ω_2 – вещественнозначные гармонические многочлены.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$\omega_1 = x + 2(x^2 - y^2) + xy, \quad \omega_2 = x + y + \frac{3}{2}(x^2 - y^2) + 5xy.$$

Функции ω_1, ω_2 в терминах полиномов от комплексной переменной z можно записать в виде

$$p_1(z) = \left(1 - \frac{i}{4}\right)z^2 + \frac{z}{2}, \quad p_2(z) = \frac{1}{4}(3 - 5i)z^2 + \frac{1 - i}{2}z. \quad (6)$$

При некотором подходящем значении постоянной C в θ_1 получаем

$$\begin{aligned} u &= -\frac{5120(1 + 8x + 2y + 17x^2 + 17y^2)}{(160 + 4x^2 + 4y^2 + 16x^3 + 4x^2y + 16xy^2 + 4y^3 + 17(x^2 + y^2)^2)^2} = \\ &= -\frac{5120|1 + (4 - i)z|^2}{(160 + |z|^2|2 + (4 - i)z|^2)^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{x + 2x^2 + xy - 2y^2}{160 + 4x^2 + 4y^2 + 16x^3 + 4x^2y + 16xy^2 + 4y^3 + 17(x^2 + y^2)^2}, \\ \psi_2 &= \frac{2x + 2y + 3x^2 + 10xy - 3y^2}{160 + 4x^2 + 4y^2 + 16x^3 + 4x^2y + 16xy^2 + 4y^3 + 17(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) мы упростили полученные выражения для ψ_1 и ψ_2 , умножив их на подходящие постоянные. На рис. 1–3 мы приводим графики потенциала u и решений ψ_1, ψ_2 .

ТЕОРЕМА 2 [2]. Потенциал u , заданный формулой (7), является гладким рациональным и убывает как $1/r^6$ при $r \rightarrow \infty$. Функции ψ_1 и ψ_2 , заданные в (8), являются гладкими рациональными, убывают как $1/r^2$ при $r \rightarrow \infty$ и порождают двумерное подпространство в ядре оператора $L = -\Delta + u$: $L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$.

Рис. 1. Потенциал (7)

Рис. 2. Решение ψ_1 в (8).

Здесь и в следующем примере мы полагаем $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ПРИМЕР 2. Возьмем в качестве функций ω_1 и ω_2 два гармонических полинома третьей степени:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= x + \frac{x^2 - y^2 - 3xy}{5} + 2(-x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3), \\ \omega_2 &= x + y + \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{xy}{5} - 4(3x^2y - y^3),\end{aligned}$$

которые в терминах полиномов от комплексной переменной z имеют вид

$$p_1(z) = (i - 1)z^3 + \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{20}i\right)z^2 + \frac{z}{2}, \quad p_2(z) = 2iz^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{20}\right)z^2 + \frac{1-i}{2}z. \quad (9)$$

Рис. 3. Решение ψ_2 в (8).

Тогда потенциал u и функции ψ_1 и ψ_2 принимают вид

$$u = \frac{F_0(x, y)}{G(x, y)^2}, \quad \psi_1 = \frac{F_1(x, y)}{G(x, y)}, \quad \psi_2 = \frac{F_2(x, y)}{G(x, y)}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} F_0(x, y) &= -1280000(25 + 20x - 287x^2 + 60x^3 + 1800x^4 - 30y - 600xy - \\ &\quad - 300x^2y + 313y^2 + 60xy^2 + 3600x^2y^2 - 300y^3 + 1800y^4), \\ G(x, y) &= 40000 + 100x^2 + 40x^3 - 387x^4 + 40x^5 + 800x^6 - 60x^2y - \\ &\quad - 800x^3y - 200x^4y + 100y^2 + 40xy^2 + 26x^2y^2 + 80x^3y^2 + 2400x^4y^2 - \\ &\quad - 60y^3 - 800xy^3 - 400x^2y^3 + 413y^4 + 40xy^4 + 2400x^2y^4 - 200y^5 + 800y^6, \\ F_1(x, y) &= -10x - 2x^2 + 20x^3 + 6xy + 60x^2y + 2y^2 - 60xy^2 - 20y^3, \\ F_2(x, y) &= -10x - 5x^2 - 10y + 2xy + 120x^2y + 5y^2 - 40y^3 \end{aligned}$$

(как и в предыдущем примере, мы упростили выражения для ψ_1 и ψ_2 , умножив их на подходящие постоянные). На рис. 4–6 мы приводим графики потенциала u и решений ψ_1, ψ_2 .

ТЕОРЕМА 3 [2]. Потенциал u , заданный в (10), является гладким рациональным и убывает как $1/r^8$ при $r \rightarrow \infty$. Функции ψ_1 и ψ_2 , заданные формулами (10), являются гладкими рациональными, убывают как $1/r^3$ при $r \rightarrow \infty$ и порождают двумерное подпространство в ядре оператора $L = -\Delta + u: L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Естественнo предположить, что для любого $N > 0$, применяя описанную выше конструкцию к другим гармоническим многочленам, можно построить гладкие рациональные потенциалы u и собственные функции ψ_1 и ψ_2 , убывающие быстрее $1/r^N$.

Рис. 4. Потенциал (10).

Рис. 5. Решение ψ_1 в (10).

4. СОЛИТОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Явные решения уравнения ВН. Для простоты в данном разделе мы перенормируем оператор Шредингера

$$H = \partial\bar{\partial} + U = \frac{1}{4}\Delta - \frac{u}{4}, \quad (11)$$

используя стандартные операторы $\partial = \partial_z = (\partial_x - i\partial_y)/2$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} = (\partial_x + i\partial_y)/2$. Преобразование Мутара, определяемое функцией ω , принимает вид

$$U \rightarrow U + 2\partial\bar{\partial}\ln\omega,$$

Рис. 6. Решение ψ_2 в (10).

а преобразование собственных функций, которое задается теми же формулами (3), следует переписать в терминах комплексной переменной в виде

$$\left(\bar{\partial} + \frac{\omega_{\bar{z}}}{\omega}\right)\theta = i\left(\bar{\partial} - \frac{\omega_{\bar{z}}}{\omega}\right)\varphi, \quad \left(\partial + \frac{\omega_z}{\omega}\right)\theta = -i\left(\partial - \frac{\omega_z}{\omega}\right)\varphi,$$

или

$$\varphi \rightarrow \theta = \frac{i}{\omega} \int (\varphi \partial \omega - \omega \partial \varphi) dz - (\varphi \bar{\partial} \omega - \omega \bar{\partial} \varphi) d\bar{z}.$$

Будем предполагать, что функция φ зависит также от времени t и удовлетворяет уравнениям

$$H\varphi = 0, \quad \partial_t \varphi = (\partial^3 + \bar{\partial}^3 + 3V\partial + 3V^*\bar{\partial})\varphi, \quad (12)$$

где $\bar{\partial}V = \partial U$, $\partial V^* = \bar{\partial}U$. Непосредственным вычислением доказывается

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 (Расширенное преобразование Мутара)¹⁾. Система (12) инвариантна относительно расширенного преобразования Мутара

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow \theta = & \frac{i}{\omega} \int (\varphi \partial \omega - \omega \partial \varphi) dz - (\varphi \bar{\partial} \omega - \omega \bar{\partial} \varphi) d\bar{z} + \\ & + [\varphi \partial^3 \omega - \omega \partial^3 \varphi + \omega \bar{\partial}^3 \varphi - \varphi \bar{\partial}^3 \omega + 2(\partial^2 \varphi \partial \omega - \partial \varphi \partial^2 \omega) - \\ & - 2(\bar{\partial}^2 \varphi \bar{\partial} \omega - \bar{\partial} \varphi \bar{\partial}^2 \omega) + 3V(\varphi \partial \omega - \omega \partial \varphi) + 3V^*(\omega \bar{\partial} \varphi - \varphi \bar{\partial} \omega)] dt, \end{aligned} \quad (13)$$

$$U \rightarrow U + 2\partial \bar{\partial} \ln \omega, \quad V \rightarrow V + 2\partial^2 \ln \omega, \quad V^* \rightarrow V^* + 2\bar{\partial}^2 \ln \omega.$$

Если ω – вещественнозначная функция, то указанные преобразования сохраняют свойство $V^* = \bar{V}$.

¹⁾Эта теорема впервые была сформулирована в [14]. Однако в [14] третья строка в формуле преобразования Мутара $\varphi \rightarrow \theta$ была пропущена. В настоящей работе мы исправляем эту ошибку. Вследствие указанной ошибки формула (6.2.5) в работе [14] не дает решения уравнения ВН. Недавно мы узнали, что это исправление уже было сделано в [15] (см. также [16], где был описан другой подход к расширенным преобразованиям Мутара).

Условием совместности системы (12) является система

$$\begin{aligned} U_t &= \partial^3 U + \bar{\partial}^3 U + 3\partial(UV) + 3\bar{\partial}(V^*U) = 0, \\ \bar{\partial}V &= \partial U, \quad \partial V^* = \bar{\partial}U, \end{aligned}$$

которая при $V^* = \bar{V}$ сводится к уравнению ВН. Ниже мы будем рассматривать только этот случай.

Рассмотрим следующий поток на пространстве функций $p(z, t)$, голоморфных по z :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^3 p}{\partial z^3}. \quad (14)$$

Если функции $p_1(z, t)$ и $p_2(z, t)$ удовлетворяют (14), то функции $\omega = p_1 + \bar{p}_1$ и $\varphi = p_2 + \bar{p}_2$ удовлетворяют системе (12) при $U = V = 0$. Расширенное преобразование Мутара отличается от классического на слагаемое с дифференциалом dt :

$$\theta = \frac{i}{\omega} \int (\Psi_1(\omega, \varphi) dz + \Psi_2(\omega, \varphi) d\bar{z} + \Theta(\omega, \varphi) dt).$$

Подставим $\omega = p_1 + \bar{p}_1$, $\varphi = p_2 + \bar{p}_2$ в Ψ_s . В соответствии с (14) и равенствами $V = V^* = 0$ подынтегральное выражение является замкнутой формой, что влечет равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1(p_1 + \bar{p}_1, p_2 + \bar{p}_2)}{\partial t} &= \frac{\partial \Theta(p_1 + \bar{p}_1, p_2 + \bar{p}_2)}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Psi_2(p_1 + \bar{p}_1, p_2 + \bar{p}_2)}{\partial t} &= \frac{\partial \Theta(p_1 + \bar{p}_1, p_2 + \bar{p}_2)}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Следовательно, функции Θ_z и $\Theta_{\bar{z}}$ определяются по Ψ_s и мы имеем следующий аналог теоремы 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть

$$\omega_1 = p_1(z, t) + \overline{p_1(z, t)}, \quad \omega_2 = p_2(z, t) + \overline{p_2(z, t)},$$

где p_1 и p_2 – голоморфные функции от z , удовлетворяющие (14). Рассмотрим расширенное преобразование Мутара оператора $H_0 = -\Delta$, определенное ω_1 . Пусть θ_1 – образ ω_2 под действием этого преобразования и пусть $H = -\Delta + u$ получен итерацией преобразования Мутара, определенного θ_1 . Тогда

$$\begin{aligned} U(z, \bar{z}, t) &= 2\partial\bar{\partial} \ln i \left((p_1\bar{p}_2 - p_2\bar{p}_1) + \int ((p_1'p_2 - p_1p_2') dz + (\bar{p}_1\bar{p}_2' - \bar{p}_1'\bar{p}_2) d\bar{z}) + \right. \\ &\quad \left. + \int (p_1'''p_2 - p_1p_2''' + 2(p_1'p_2'' - p_1''p_2') + \bar{p}_1\bar{p}_2''' - \bar{p}_1''' \bar{p}_2 + 2(\bar{p}_1''\bar{p}_2' - \bar{p}_1'\bar{p}_2'')) dt \right). \end{aligned} \quad (15)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $p_1(z, t)$ и $p_2(z, t)$ – голоморфные функции от z , которые удовлетворяют уравнению (14). Тогда подстановка их в (15) дает решение уравнения ВН, рациональное по z , $\bar{z}$ и t .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как очевидно, аналоги (13) существуют для всех уравнений иерархии ВН, и, следовательно, могут быть получены явные формулы для их решений, в частности, вида (13).

4.2. σ -Потоки. Обозначим через $\mathcal{H}_N$ пространство всех гармонических многочленов $p(z) + \overline{p(z)}$, где

$$p(z) = \sigma_0 z^N + \sigma_1 z^{N-1} + \cdots + \sigma_{N-1} z + \sigma_N,$$

и через $\mathcal{H}_N^0$ – подпространство при $\sigma_0 = 1$.

Поток (14) порождает на $\mathcal{H}_N$ линейный поток

$$\dot{\sigma}_k = (k-1)(k-2)(k-3)\sigma_{k+3}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (16)$$

Поскольку σ_0 постоянна вдоль потока, мы можем ограничить эти уравнения на $\mathcal{H}_N^0$ и получить следующий частный вид линейной системы на $\sigma_1, \dots, \sigma_N$:

$$\dot{\sigma} = A + B\sigma, \quad (17)$$

которая порождает динамическую систему на n -й симметрической степени $S^n \mathbb{C}$ пространства $\mathbb{C}$. Действительно, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ являются элементарными симметрическими многочленами от корней $z_1, \dots, z_n$ многочлена $p(z)$:

$$\sigma_1(z_1, \dots, z_n) = -(z_1 + \cdots + z_n), \quad \dots, \quad \sigma_n(z_1, \dots, z_n) = (-1)^n z_1 \cdots z_n,$$

и интегрируемая (фактически линейная) эволюция σ порождает на $S^n \mathbb{C}$ некоторую динамическую систему. Мы будем называть эту динамическую систему на $S^n \mathbb{C}$ σ -системой.

В отличие от системы Калоджеро–Мозера, σ -системы не описывают динамику сингулярностей уравнения ВН (система Калоджеро–Мозера дает эту динамику для уравнения КдФ), т.е. динамику частицеподобных решений [17], [12] (см. также п. 2.2 настоящей работы). Фактически системы Калоджеро–Мозера и σ -системы различны во многих отношениях.

К примеру, рассмотрим простейший поток, порожденный (14) на $\mathcal{H}_3$:

$$\dot{\sigma}_1 = 0, \quad \dot{\sigma}_2 = 0, \quad \dot{\sigma}_3 = 6.$$

Общее решение дается формулами

$$\sigma_1 = a_1, \quad \sigma_2 = a_2, \quad \sigma_3 = a_3 + 6t.$$

Однако для решений $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ системы Калоджеро–Мозера k -й элементарный симметрический многочлен $\sigma_k(x_1, \dots, x_n)$ является полиномом по t степени k , и, следовательно, любая функция $x_k(t)$ является алгебраической ([12], следствие 3).

Мы можем привести примеры, в которых решения системы Калоджеро–Мозера и σ -системы связаны перепараметризацией временной переменной. Таким решением, например, является решение “равностороннего треугольника” системы Калоджеро–Мозера, которое соответствует решению

$$-2 \frac{d^2}{dx^2} [(x - x_1(t))(x - x_2(t))(x - x_3(t))]$$

уравнения КдФ:

$$x_k(t) = \varepsilon^k \sqrt[3]{\varepsilon} t, \quad \varepsilon = e^{2\pi i/3}, \quad k = 1, 2, 3,$$

и решение σ -системы, соответствующее $p(z, t) = z^3 + 6t$:

$$z_k(t) = \varepsilon^k \sqrt[3]{6t}, \quad \varepsilon = e^{2\pi i/3}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Согласно следствию 1 имеем следующее утверждение.

Если даны два решения $p_1 \in \mathcal{H}_M^0$ и $p_2 \in \mathcal{H}_N^0$ системы (16), то подстановкой $e^{i\lambda_1} p_1$ и $e^{i\lambda_2} p_2$ (где λ_1 и λ_2 – вещественные постоянные) в (15) получим решения уравнения ВН²⁾ Тем самым каждой паре решений (16) соответствует $(S^1 \times S^1)$ -семейство решений уравнения ВН.

Мы полагаем, что σ -системы заслуживают отдельного изучения не только в силу установленной нами связи с уравнением ВН, но и в силу естественного характера их появления в данном круге задач.

4.3. О распаде решений. Для простоты запишем формулу (15) в виде

$$U = 2\partial\bar{\partial} \ln \Phi(p_1, p_2)$$

(см. формулу (11) новой нормировки операторов). В результате интегрирования в (5) функция $\Phi(p_1, p_2)$ определена с точностью до постоянной, которую мы предполагаем вещественной, что приводит к вещественному потенциалу $U(z, \bar{z})$. Согласно утверждению 3 потенциал $V = \bar{V}^*$ равен

$$V = 2\partial^2 \ln \Phi(p_1, p_2).$$

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Потенциал (7) (см. теорему 2) является стационарным решением уравнения ВН.

С другой стороны, с помощью предложенного выше метода можно получить решения уравнения ВН, имеющие сингулярности при $t > 0$.

ТЕОРЕМА 4. Решение $U(z, \bar{z}, t)$ уравнения ВН, полученное из полиномов $p_1 = iz^2$, $p_2 = z^2 + (1+i)z$ в соответствии с утверждением 4 при условии, что постоянная интегрирования в (13) $C = -20$, имеет вид

$$U = \frac{H_1}{H_2},$$

где

$$H_1 = -12(24tx^2 + 12tx + 24ty^2 + 12ty + x^5 - 3x^4y + 2x^4 - 2x^3y^2 - 4x^3y - 2x^2y^3 - 60x^2 - 3xy^4 - 4xy^3 - 30x + y^5 + 2y^4 - 60y^2 - 30y),$$

²⁾Если умножить, к примеру, p_1 на постоянную $\mu \in \mathbb{R}$, то $\omega = p_1 + \bar{p}_1$ умножится на μ , и, поскольку преобразование Мутара зависит от выбора ω , взятого с точностью до постоянного множителя, это не изменит результата преобразования.

$$H_2 = (3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 + 3y^4 + 4y^3 + 30 - 12t)^2.$$

Это решение убывает на бесконечности как t^{-3} и, очевидно, имеет сингулярность при достаточно больших значениях $t > 0$.

5. КУБИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА СУПЕРПОЗИЦИИ

В данном разделе мы распространим алгебраическую формулу суперпозиции Бьянки [18] для трех начальных решений $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ уравнения Мутара на случай уравнения ВН. Фактически уже расширенное преобразование Мутара (13) разумно рассматривать как “расширенную формулу суперпозиции”, которая строит новое решение θ по двум начальным решениям ω, φ линейной задачи (12) с некоторыми начальными потенциалами U, V, V^* . В отличие от широко известной алгебраической формулы суперпозиции двух решений уравнения синус-Гордон, преобразование (13) не является алгебраической операцией и требует выполнения квадратуры. Это типично для $(2+1)$ -мерных преобразований Беклунда. В этом случае алгебраическая формула суперпозиции существует для трех начальных решений (см. [19], где дано более детальное изложение свойств многомерных преобразований Беклунда).

Легко проверить, что следующее предложение, полученное Бьянки [18] для уравнения Мутара $\varphi_{xy} = u(x, y)\varphi$, также верно и в нашем случае.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – три решения (12), где $U = U_0, V = V_0, V^* = V_0^*$ – некоторое заданное решение уравнения ВН (1), θ_1, θ_2 – преобразованные решения (12) с новыми потенциалами $U_1 = U_0 - 2\partial\bar{\partial}(\ln \omega_1), U_2 = U_0 - 2\partial\bar{\partial}(\ln \omega_2)$ и соответственно преобразованными V_i, V_i^* (другим решением уравнения ВН), полученные из ω_3 с помощью (13). Тогда существует единственное решение θ' четвертой линейной системы (12) с потенциалами $U = U_{12}, V = V_{12}, V^* = V_{12}^*$ такое, что θ' связано с θ_1, θ_2 посредством расширенного преобразования Мутара (13). Это решение θ' выражается алгебраической формулой

$$\theta' - \omega_3 = \frac{\omega_1\omega_2}{\lambda}(\theta_2 - \theta_1), \quad \lambda = \omega_1\omega'_1 = -\omega_2\omega'_2, \quad (18)$$

где ω'_1, ω'_2 получены из ω_1, ω_2 в соответствии с (13).

Представим полученное утверждение и “расширенную формулу суперпозиции” (13) в виде коммутативных ромбической и кубической диаграмм (“куб Бьянки нелинейной суперпозиции”), показанных на рис. 7.

Ромбическая диаграмма на рис. 7а показывает решения ω_1 и ω_2 системы (12) с начальным потенциалом U_0 и соответствующими потенциалами V_0, V_0^* , которые дают некоторое решение уравнения ВН (1). Эти решения ω_i определяют два новых потенциала U_1, U_2 , как и соответствующие потенциалы V_i, V_i^* , два новых решения уравнения ВН. Это является *первым шагом* нелинейной суперпозиции. Согласно формуле (13) имеется однопараметрическое множество решений θ_1 системы (12) с потенциалами U_1, V_1, V_1^* , а также $\theta_2 = -\omega_1\theta_1/\omega_2$ – решение (12) с потенциалами $U_2,$

Рис. 7. Ромбическая и кубическая формулы нелинейной суперпозиции для $(2 + 1)$ -мерных интегрируемых систем.

V_2, V_2^* . Используя далее либо θ_1 , либо θ_2 , мы можем найти потенциалы

$$\begin{aligned} U_{12} &= U_1 + 2\partial\bar{\partial}\ln\theta_1 = U_2 + 2\partial\bar{\partial}\ln\theta_2, \\ V_{12} &= V_1 + 2\partial^2\ln\theta_1 = V_2 + 2\partial^2\ln\theta_2, \\ V_{12}^* &= V_1^* + 2\bar{\partial}^2\ln\theta_1 = V_2^* + 2\bar{\partial}^2\ln\theta_2, \end{aligned}$$

показанные в виде последнего четвертого кружка на ромбической диаграмме. Это является *вторым шагом*. Как видно, второй шаг требует выполнения квадратуры и приводит к появлению свободной постоянной интегрирования в конечных потенциалах U_{12}, V_{12}, V_{12}^* .

Если мы выполняем указанные два шага для каждой из трех пар $\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}$, показанных на рис. 7б (что дает три дополнительных постоянных интегрирования), алгебраическая формула суперпозиции Бьянки (18) дает решение θ' системы (12) для множества потенциалов U_{12}, V_{12}, V_{12}^* , полученных на втором шаге.

Формула (18) была доказана в [18] для случая уравнения Мутара $\omega_{xy} = U(x, y)\omega$. Прямое вычисление показывает, что она сохраняет динамику потенциалов, определенную формулой (1), как утверждает теорема 5.

Используя (12) и (18), легко доказать следующие утверждения.

1. Если начать с потенциалов $U_0 = V_0 = V^* = 0$ и выбрать произвольные гармонические многочлены в качестве начальных решений $\omega_i, i = 1, 2, \dots, N$, то потенциалы, полученные на первых двух шагах, будут рациональными функциями от (x, y, t) . Все потенциалы, полученные на последующих шагах, также будут рациональными решениями уравнения ВН.

2. Если нам известно некоторое большое множество решений $\{\psi\}$ уравнения Шредингера $(\partial\bar{\partial} + U_0)\psi = 0$ для исходного потенциала U_0 , то с учетом теоремы 5 можно построить соответствующие решения уравнения $(\partial\bar{\partial} + U_{12})\tilde{\psi} = 0$, используя квадратуры (на втором шаге), если мы положим $\omega_3 = \psi$ в формулах суперпозиции (12) и (18).

3. Отсюда вытекает, что мы получаем потенциалы U_{12} , интегрируемые на нулевом уровне энергии, если начинаем с некоторого интегрируемого потенциала U_0 , например $U_0 = 0$.

6. ЗАМЕЧАНИЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СОЛИТОНАХ

Такая же конструкция может быть применена к случаю, когда исходные функции ω_1 и ω_2 удовлетворяют уравнению Шредингера с постоянным потенциалом $u = -k^2$:

$$(-\Delta - k^2)\omega_1 = (-\Delta - k^2)\omega_2 = 0.$$

Тогда вторая итерация вновь может дать интегрируемый потенциал, который будет гладким и периодическим. Мы приведем здесь такой пример.

Рис. 8. Периодический потенциал $\tilde{u}$, раздел 6.

Пусть

$$\omega_1 = \sin kx, \quad \omega_2 = \sin(ax + by), \quad a^2 + b^2 = k^2,$$

и преобразование Мутара, определенное ω_1 , отображает ω_2 в θ_1 (с точностью до слагаемых, кратных $1/\omega_1$):

$$\theta_1 = \frac{b}{2 \sin kx} \left(\frac{\cos(ax + by + kx)}{a + k} - \frac{\cos(ax + by - kx)}{a - k} + C \right),$$

Рис. 9. Решение ψ_1 для периодического потенциала $\tilde{u}$, раздел 6.

$C = \text{const}$. Новый потенциал равен

$$\tilde{u} = k^2 + 2 \frac{\cos^2 kx}{\sin^2 kx}.$$

Проитерируем преобразование Мутара, используя θ_1 . В результате получаем следующий новый потенциал:

$$\tilde{\tilde{u}} = -\tilde{u} + 2 \frac{(\theta_1)_x^2 + (\theta_1)_y^2}{\theta_1^2} = k^2 - 2\Delta \ln(\omega_1 \theta_1),$$

который будет несингулярен при достаточно большом C . Пример подобного периодического потенциала $\tilde{\tilde{u}}$ и соответствующего решения $\psi_1 = 1/\theta_1$ при выборе постоянных $C = 3$, $a = 0$, $b = 1$, $k = 1$ показан на рис. 8, 9.

Очевидно, что итерациями преобразования Мутара можно построить интегрируемые двумерные несингулярные периодические и квазипериодические (если a/b не рационально) потенциалы. Полный базис решений для построенных потенциалов $\tilde{\tilde{u}} = -4U_{12}$ может быть получен применением (18) при $\omega_3 = e^{i(px+qy)}$, $p^2 + q^2 = k^2$. Для изучения спектральных свойств получаемых потенциалов и динамики соответствующих решений уравнения ВН необходимо отдельное исследование.

Благодарности. Авторы выражают благодарность П. Г. Гриневичу и С. П. Новикову за полезные обсуждения. Настоящая работа поддержана РФФИ (гранты № 06-01-72551 (И. А. Тайманов), № 06-01-00814 (С. П. Царев)). Работа И. А. Тайманова также поддержана Комплексным интеграционным проектом 2.15 СО РАН и Математическим институтом Макса Планка (Бонн).

Список литературы

- [1] Т. Moutard, *J. École Polyt.*, **45** (1878), 1–11.
- [2] И. А. Тайманов, С. П. Царев, *УМН*, **62:3(375)** (2007), 217–218.

- [3] Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния. II”, Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем., **3**, ред. Р. В. Гамкрелидзе, ВИНТИ, М., 1974, 93–180.
- [4] Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин, *УМН*, **42**:3(255) (1987), 93–152.
- [5] А. Н. Веселов, С. П. Новиков, *ДАН СССР*, **279** (1984), 20–24.
- [6] С. Е. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *J. Amer. Math. Soc.*, **4**:2 (1991), 323–347.
- [7] В. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *ДАН СССР*, **229** (1976), 15–18.
- [8] П. Г. Гриневич, С. В. Манаков, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:2 (1986), 14–24.
- [9] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:1 (1988), 23–33.
- [10] G. Darboux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **94** (1882), 1456–1459.
- [11] M. Adler, J. Moser, *Comm. Math. Phys.*, **61**:1 (1978), 1–30.
- [12] H. Airault, H. P. McKean, J. Moser, *Comm. Pure Appl. Math.*, **30**:1 (1977), 95–148.
- [13] S. P. Novikov, A. P. Veselov, “Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations”, *Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, eds. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov, AMS, Providence, RI, 1997, 109–132.
- [14] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991.
- [15] Heng-Chun Hu, Sen-Yue Lou, Qing-Ping Liu, *Chinese Phys. Lett.*, **20** (2003), 1413–1415.
- [16] C. Athorne, J. J. C. Nimmo, *Inverse Probl.*, **7**:6 (1991), 809–826.
- [17] В. А. Дубровин, С. П. Новиков, *ЖЭТФ*, **67**:6 (1974), 2131–2144.
- [18] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, V. 1–4, Zanichelli, Bologna, 1923–1927.
- [19] Е. И. Ганжа, С. П. Царев, *УМН*, **51**:6(312) (1996), 197–198; [arXiv: solv-int/9606003](#).

Поступила в редакцию 21.01.2008