Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Морозов, Гамильтонов формализм в теориях со старшими производными, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 2, 208–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:57:12

© 2008 г.

А. Ю. Морозов*

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ В ТЕОРИЯХ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Дан краткий обзор основных формул гамильтонова формализма классической механики в случае, когда лагранжиан содержит N -е производные по времени от n координат; для нелокальных моделей $N = \infty$.

Ключевые слова: теории с высшими производными, гамильтоновы механики, репараметризационная инвариантность.

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение долгого времени теории со старшими производными находились на периферии теоретических исследований. Главная причина этого состоит в том, что старшие производные не слишком часто возникают при описании обычных физических систем. Этому, в свою очередь, можно дать простое объяснение: если наблюдаемый мир описывается низкоэнергетическим пределом некоторой пока неизвестной фундаментальной теории, тогда он с необходимостью управляется лагранжевой динамикой с наименьшим возможным числом производных по времени, и закон Ньютона включает лишь ускорения. С этой точки зрения в *фундаментальной* теории не может быть никакого ограничения на число производных, и в самом деле, члены со старшими производными присутствуют в большинстве подходов, от квантово-полевых формулировок теории струн и М-теории [1] до чисто полевых моделей типа асимптотически устойчивой гравитации [2] или квантовой версии недавней модели “ E_8 объединения” [3] в теории частиц. Разумеется, разнообразные нелокальные и бесчисленные некоммутативные модели также попадают в категорию теорий с высшими производными. Более того, даже самые обычные физические теории, скажем *классическая* электродинамика, на самом деле оказываются несовместными без введения старших производных, если появляется необходимость учитывать радиационные явления и не ограничиваться при этом четырьмя измерениями пространства-времени. Это приходится делать, например, в забавных моделях

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: morozov@itep.ru

ТЭВ-ной гравитации [4]. В этих обстоятельствах для решения “проблем” электромагнитной массы и радиационного трения требуется включение в затравочное (“фундаментальное”) действие контрчленов, которые не сводятся лишь к перенормировке массы (перенормировки оказывается достаточно лишь при $d = 4$), но неизбежно включают также старшие производные по времени [5]. Конечно, старшие производные широко используются и в технических целях, даже там, где введение подобных членов не диктуется физической необходимостью, например для формальной ультрафиолетовой регуляризации теорий с калибровочной или суперсимметриями [6]. Наконец, члены со старшими производными являются общим местом при обсуждении любых *эффективных* моделей в любой области теории, от физики твердого тела до квантовой гравитации.

По всем этим причинам динамика со старшими производными начинает постепенно привлекать внимание теоретиков, см. относительно недавние обсуждения с различных точек зрения в работах [7]–[19], где развиваются идеи, изложенные в классических статьях, монографиях и учебниках [20]–[37]. Нельзя не отметить, что эта практически нетронутая область очень привлекательна с точки зрения “теоретической теории” и, среди прочего, тесно связана с современным квантово-полевым подходом к топологии [38], $L_\infty^{(n)}$ -структурам в духе работы [39], нелинейной алгебре [40] и другим классическим областям фундаментальной науки. Еще в статье [41] было продемонстрировано, что следует ожидать красивых и необычных теоретических явлений при наложении на такие модели условий репараметризационной инвариантности (что, кстати, необходимо во многих мыслимых приложениях). Особенный интерес представляет стоящая за этими моделями новая симплектическая геометрия [42], [43].

Настоящая краткая заметка представляет лишь нулевую главу в исследовании теорий с высшими производными. Здесь приводится краткий список основных элементарных формул, хорошо известных узкому кругу интересующихся ученых еще со времен Остроградского [20]. Эти формулы описывают *классическую* лагранжеву и гамильтонову динамику, и их необходимо знать для сравнения с результатами, получающимися в разнообразных изощренных подходах, используемых в современной литературе.

2. ЛАГРАЖЕВ ФОРМАЛИЗМ

Рассмотрим классическую механику с действием

$$S\{q^\alpha(t)\} = \int L dt, \quad (1)$$

где лагранжиан $L(q^\alpha, d_t q^\alpha, \dots, d_t^N q^\alpha)$ зависит от первых N производных по времени $q_i^\alpha \equiv d_t^i q^\alpha$ от n координатных переменных $q^\alpha = q_0^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$. В этих обозначениях

$$\dot{q}_i^\alpha = q_{i+1}^\alpha. \quad (2)$$

Определим теперь вариационные производные по q_i^α для всех $i \geq 0$:

$$\delta_\alpha^{i-1} \equiv \partial_\alpha^i - d_t \partial_\alpha^{i+1} + d_t^2 \partial_\alpha^{i+2} - \dots,$$

где $\partial_\alpha^i = \partial/\partial q_i^\alpha$, а импульсы $\Pi_\alpha^i = \delta_\alpha^i L$. Операторы вариационного дифференцирования связаны производными по времени:

$$\delta_\alpha^{i-1} \equiv d_t \delta_\alpha^{i-1} = \partial_\alpha^i - \delta_\alpha^i, \quad (3)$$

эти соотношения в определенном смысле дуальны (2).

Уравнения движения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\Pi_\alpha^{-1} \equiv \delta_\alpha^{-1} L = 0.$$

Они имеют порядок $2N$ по временным производным. Соответственно, начальные условия налагаются на $q^\alpha, d_t q^\alpha, \dots, d_t^{2N-1} q^\alpha$.

Отметим, что в принятых здесь обозначениях верхние индексы – это *не* степени. В дальнейшем мы будем пропускать индексы α в некоторых формулах.

3. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Фазовое пространство имеет $2Nn$ измерений с канонически сопряженными координатами q_i^α и Π_α^i , где $i = 0, \dots, N-1$. Производные q_N^α являются заданными функциями от этих независимых переменных.

Замкнутая симплектическая 2-форма

$$\Omega = d\theta = \sum_{i=0}^{N-1} d\Pi_\alpha^i \wedge dq_i^\alpha \quad (4)$$

сохраняется, $\dot{\Omega} = d_t \Omega = 0$, в то время как производная по времени от соответствующей пресимплектической 1-формы

$$\theta = \sum_{i=0}^{N-1} \Pi_\alpha^i dq_i^\alpha \quad (5)$$

точна, $\dot{\theta} = dL$. Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{q}_i^\alpha = q_{i+1}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial \Pi_\alpha^i}, \quad \dot{\Pi}_\alpha^i = -\Pi_\alpha^{i-1} - \frac{\partial L}{\partial q_i^\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_i^\alpha}, \quad (6)$$

где гамильтониан

$$H(\Pi, q) = \sum_{i=0}^{N-1} \Pi_\alpha^i q_{i+1}^\alpha - L, \quad (7)$$

а q_N^α выражены через канонические переменные.

Рассмотрим $\bar{S}(\bar{q}, \bar{q})$ – действие (1), вычисленное на классической траектории с граничными условиями $\bar{q}_i^\alpha = q_i^\alpha(\bar{t})$ и $\bar{\bar{q}}_i^\alpha = q_i^\alpha(\bar{\bar{t}})$, $i = 0, \dots, N-1$. Тогда

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{q}_i^\alpha} = -\bar{\Pi}_\alpha^i, \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{\bar{q}}_i^\alpha} = \bar{\bar{\Pi}}_\alpha^i. \quad (8)$$

Все эти соотношения являются очевидными обобщениями простейшего случая $N = 1$ (см. [44]).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство приведенных выше соотношений не представляет трудности:

$$d_t \left[\sum_{i=0} dq_i \wedge d\delta^i \right] = \sum_{i=0} (dq_{i+1} \wedge d\delta^i - dq_i \wedge d\delta^{i-1} + dq_i \wedge d\partial^i) = -dq_0 \wedge d\delta_{-1} + \sum_{i=0} dq_i \wedge d\partial^i. \quad (9)$$

При действии на L первый член обращается в нуль на уравнениях движения, $\delta^{-1}L = 0$, а второй член превращается в

$$\sum_{i=0} dq_i \wedge d(\partial_i L) = \sum_{i,j=0} \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} dq_i \wedge dq_j = 0. \quad (10)$$

Аналогично

$$d_t \left[\sum_{i=0} dq_i \delta^i \right] = \sum_{i=0} (dq_{i+1} \delta^i - dq_i \delta^{i-1} + dq_i \partial^i) = -dq_0 \delta^{-1} + d. \quad (11)$$

И снова при действии на L первый член обращается в нуль на уравнениях движения.

Производные гамильтониана в (6) равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \Pi^i} &= q_{i+1} + \left(\Pi^{N-1} - \frac{\partial L}{\partial q_N} \right) \frac{\partial q_N}{\partial \Pi^i}, \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\Pi^{i-1} (1 - \delta_{i,0}) + \frac{\partial L}{\partial q_i} - \left(\Pi^{N-1} - \frac{\partial L}{\partial q_N} \right) \frac{\partial q_N}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Члены в скобках в правой стороне равенств обращаются в нуль, поскольку $\Pi^{N-1} = \delta^{N-1}L = \partial^N L$.

Наконец, изменение действия $S\{q(t)\}$ при вариации его аргумента $\delta q(t)$ равно

$$\delta S = \int \sum_{i=0}^N \delta x_i \partial^i L = \oint \delta x_j \delta^j L + \int \delta^{-1} L. \quad (13)$$

На классической траектории второй член исчезает, а граничный вклад в первом члене порождает (8).

5. ПУТЬ К КОГОМОЛОГИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

Ключевую роль в только что проделанном вычислении играет оператор

$$\hat{A} = \sum_{i=1} (-1)^i \partial^{i-1} \otimes \partial^{-i} = \frac{1}{1 \otimes 1 + \partial \otimes \partial^{-1}} 1 \otimes \partial^{-1} = \frac{1}{\partial^{-1} \otimes \partial + 1 \otimes 1} \partial^{-1} \otimes 1. \quad (14)$$

Он является формальным обращением оператора ∂ , действующего на произведения по правилу Лейбница:

$$(\partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial) \hat{A} = \frac{1}{1 \otimes 1 + \partial \otimes \partial^{-1}} (\partial \otimes \partial^{-1} + 1 \otimes 1) = 1 \otimes 1.$$

На концептуальном уровне для $\partial = d_t$

$$\Omega = \hat{A}_* dq \overset{\wedge}{\otimes} \frac{\delta L}{\delta q}.$$

В самом деле, для

$$\frac{\delta}{\delta q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} - \partial \frac{\partial}{\partial q_{i+1}} + \dots$$

имеем $\partial \delta_{i+1} = \partial_i - \delta_i$ или

$$\frac{\delta}{\delta q_{i+1}} = -\partial_*^{-1} \frac{\delta}{\delta q_i} = \dots = (-1)^i \partial_*^{-i} \frac{\delta}{\delta q},$$

где ∂_*^{-1} правильно учитывает $\partial/\partial q_i$, лежащие в “когомологии” ∂ .

Более аккуратный анализ должен учесть различие между $\hat{A}_*$ и $\hat{A}$. Именно это различие позволяет Ω не обращаться тождественно в нуль, несмотря на то что $\delta L = 0$. Обращение $\hat{A}_*$ в нуль происходит только при взятии производной ∂ по времени, до этого мы имеем ненулевое выражение.

6. ПРИМЕРЫ С НЕЛОКАЛЬНОСТЬЮ

Развитый выше гамильтонов формализм можно немедленно применить к любым функционалам, в том числе нелокальным.

В качестве квадратичного по q примера можно взять

$$S\{q(t)\} = \int q \frac{1}{1 + M^{-2} \partial^2} q dt, \quad (15)$$

или

$$S\{q(t)\} = \int q(t) q(t + \epsilon) dt = \int q(t) e^{\epsilon \partial} q(t) dt \quad (16)$$

(в этом случае решения уравнений Эйлера–Лагранжа – это любые антипериодические функции $q(\cdot)$, $q(t + 2\epsilon) = -q(t)$), или, в общем случае,

$$S\{q(t)\} = \frac{1}{2} \int \left(\sum_n a_n (\partial^n q)^2 \right) dt, \quad (17)$$

где a_n не зависит от времени (последнее ограничение, естественно, можно и не налагать).

Мы имеем

$$\Pi_i = \delta^i L = \sum_{j=0} (-1)^j a_{i+j+1} \partial^{i+2j+1} q \quad (18)$$

и

$$\Omega = \sum_{i=0} dq_i \wedge d\Pi_i = \sum_{i,j \geq 0} (-1)^j a_{i+j+1} dq_i \wedge dq_{i+2j+1}. \quad (19)$$

Отметим, что члены $dq_i \wedge dq_{i+2j}$ в этом разложении не появляются. Поскольку коэффициенты A_{ij} в матрице $\Omega = \sum_{i < j} A_{ij} dq_i \wedge dq_j$ не зависят от времени, они обязаны иметь специальный вид $A_{ij} = (-1)^j A_{i+j}$ (хорошо знакомый из теории τ -функций для цепочек Тоды [45]) в силу условий сохранения

$$\dot{A}_{ij} + A_{i-1,j} + A_{i,j-1} = 0. \quad (20)$$

7. РЕПАРАМЕТРИЗАЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим преобразования $t \rightarrow u(t) = t + \epsilon(t)$, при этом

$$\begin{aligned} q_1^\alpha &\equiv \dot{q}^\alpha \rightarrow u q_1^\alpha \rightarrow q_1^\alpha + \epsilon q_1^\alpha, \\ q_2^\alpha &\equiv \ddot{q}^\alpha \rightarrow u^2 q_2^\alpha + u \dot{u} q_1^\alpha \rightarrow q_2^\alpha + 2\epsilon q_2^\alpha + \dot{\epsilon} q_1^\alpha, \\ q_3^\alpha &\rightarrow u^3 q_3^\alpha + 3u^2 \dot{u} q_2^\alpha + u \dot{u}^2 q_1^\alpha + u^2 \ddot{u} q_1^\alpha \rightarrow q_3^\alpha + 3\epsilon q_3^\alpha + 3\dot{\epsilon} q_2^\alpha + \ddot{\epsilon} q_1^\alpha, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (21)$$

или, что эквивалентно,

$$q_k^\alpha \equiv \partial_t^k q^\alpha \rightarrow q_k^\alpha + \sum_{l=0}^{k-1} C_k^{k-l-1} q_{k-l}^\alpha \partial_t^l \epsilon. \quad (22)$$

Инвариантность действия означает, что для любого $\epsilon = \epsilon(t)$

$$\begin{aligned} \epsilon L = & \epsilon \left\{ \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} + 2\ddot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^\alpha} + 3q_3^\alpha \frac{\partial}{\partial q_3^\alpha} + 4q_4^\alpha \frac{\partial}{\partial q_4^\alpha} + \dots \right\} L + \\ & + \dot{\epsilon} \left\{ \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} + 3\ddot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q_3^\alpha} + 6q_3^\alpha \frac{\partial}{\partial q_4^\alpha} + \dots \right\} L + \\ & + \ddot{\epsilon} \left\{ \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q_3^\alpha} + 4\ddot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q_4^\alpha} + \dots \right\} L + \\ & + (\partial_t^3 \epsilon) \left\{ \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q_4^\alpha} + \dots \right\} L + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} K_m \partial_t^m \epsilon = 0, \quad \text{т.е.} \quad K_m = \sum_{k \geq 1} C_{m+k}^{k-1} q_k^\alpha \frac{\partial L}{\partial q_{k+m}^\alpha} - L \delta_{m,0} = 0. \quad (24)$$

В этих формулах $C_{m+k}^{k-1} = \frac{(m+k)!}{(k-1)!(m+1)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Как следствие, обычный гамильтониан (7) тождественно равен нулю,

$$\begin{aligned} H = \sum_{i=0}^{N-1} \Pi_\alpha^i q_{i+1}^\alpha - L &= \sum_{k \geq 1} q_k^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_k^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_{k+1}^\alpha} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial q_{k+2}^\alpha} - \dots \right) - L = \\ &= K_0 - \sum_{k \geq 1} \left((k-1) q_k^\alpha \frac{\partial L}{\partial q_k^\alpha} + q_k^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial q_{k+1}^\alpha \partial q_l^\beta} q_{l+1}^\beta - \dots \right) = \\ &= K_0 - \frac{dK_1}{dt} + \sum_k \left(\frac{(k-1)(k-2)}{2} q_k^\alpha \frac{\partial L}{\partial q_k^\alpha} + \frac{(k-1)(k+2)}{2} q_k^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial q_{k+1}^\alpha \partial q_l^\beta} q_{l+1}^\beta + \right. \\ &\quad \left. + q_k^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial q_{k+2}^\alpha \partial q_l^\beta} q_{l+2}^\beta + q_k^\alpha \frac{\partial^3 L}{\partial q_{k+2}^\alpha \partial q_l^\beta \partial q_m^\gamma} q_{l+1}^\beta q_{m+1}^\gamma - \dots \right) = \\ &= K_0 - \frac{dK_1}{dt} + \frac{d^2 K_2}{dt^2} - \frac{d^3 K_3}{dt^3} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Как и во всякой калибровочно инвариантной теории, в уравнения Гамильтона входит не наивный гамильтониан, а связь Φ – генератор калибровочного преобразования [27]:

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial \Pi_\alpha}, \quad \dot{\Pi}_\alpha = -\frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha}. \quad (26)$$

В статье [41] разбирался специальный случай, в котором отсутствует зависимость от q_0^α и $N = 1$, и уже этот случай оказался неожиданно богатым и интересным.

8. СЛУЧАЙ $N = 2$ И $N = 2$

Согласно (23) в этом случае лагранжиан L является функцией от $q_1, q_2, v_1 = \dot{q}_1, v_2 = \dot{q}_2$ и $z = v_1 a_2 - v_2 a_1 = v_1 \dot{v}_2 - v_2 \dot{v}_1$ и имеет определенную степень однородности:

$$3z \left. \frac{\partial L}{\partial z} \right|_{v_{1,2}} + v_1 \left. \frac{\partial L}{\partial v_1} \right|_{v_{2,z}} + v_2 \left. \frac{\partial L}{\partial v_2} \right|_{v_{1,z}} = L. \quad (27)$$

Импульсы задаются формулами

$$\begin{aligned} \Pi_1^0 &= \left. \frac{\partial L}{\partial v_1} \right|_{v_{2,a_{1,2}}} - \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial a_1} \right|_{v_{1,2,a_2}} = \left. \frac{\partial L}{\partial v_1} \right|_{v_{2,z}} + a_2 \left. \frac{\partial L}{\partial z} \right|_{v_{1,2}} + \frac{d}{dt} \left(v_2 \left. \frac{\partial L}{\partial z} \right|_{v_{1,2}} \right) = \\ &= \left. \frac{\partial L}{\partial v_1} \right|_{v_{2,z}} + 2a_2 \left. \frac{\partial L}{\partial z} \right|_{v_{1,2}} + v_2 \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial z} \right|_{v_{1,2}} = \\ &= \left. \frac{\partial L}{\partial v_1} \right|_{v_{2,z}} + 2a_2 \left. \frac{\partial L}{\partial z} \right|_{v_{1,2}} + v_2 \left(v_1 \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial q_1} + a_1 \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial v_1} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right), \quad (28) \\ \Pi_2^0 &= \left. \frac{\partial L}{\partial v_2} \right|_{v_{1,a_{1,2}}} - \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial a_2} \right|_{v_{1,2,a_1}}, \\ \Pi_1^1 &= \left. \frac{\partial L}{\partial a_1} \right|_{v_{1,2,a_2}}, \quad \Pi_1^2 = \left. \frac{\partial L}{\partial a_2} \right|_{v_{1,2,a_1}}. \end{aligned}$$

Не только в этом примере, но и всегда репараметризационная инвариантность равносильна условию однородности функции, зависящей от специфических комбинаций исходных переменных,

$$z_{ij} = \dot{q}_i \ddot{q}_j - \ddot{q}_i \dot{q}_j \sim \partial_t \left(\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_j} \right), \quad z_{ij;kl} \sim \partial_t \left(\frac{\dot{z}_{ij}}{\dot{z}_{kl}} \right), \quad z_{ij;kl|\dot{z}'_{j'};k'l'} \sim \partial_t \left(\frac{\dot{z}_{ij;kl}}{\dot{z}'_{j'};k'l'} \right) \quad (29)$$

и т.д., которые являются “элементарными мономами”, однородно преобразующимися под действием репараметризаций времени. Разумеется, эти величины играют существенную роль в дальнейшем развитии теории (см., например, [43]).

Благодарности. Я признателен за многочисленные обсуждения Валерию Долотину и другим участникам его семинаров в ИТЭФ. Я благодарен за гостеприимство под эгидой JSPS Университету г. Осаки, где этот текст был окончательно доработан. Моя работа частично поддерживается Российским Агентством по ядерной энергии (совместный грант 06-01-92059-CE), NWO (проекты № 047.011.2004.026 и ANR-05-BLAN-0029-01), INTAS (грант № 05-1000008-7865), РФФИ (грант № 07-02-00645) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8004.2006.2).

Список литературы

- [1] E. Fradkin, A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **261**:1 (1985), 1–27; E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **268**:2 (1986), 253–294; W. Siegel, *Introduction to String Field Theory*, Adv. Ser. Math. Phys., **8**, World Scientific, Teaneck, NJ, 1988.
- [2] M. Reuter, F. Saueressig, *Functional renormalization group equations, asymptotic safety and quantum Einstein gravity*, [arXiv: 0708.1317](#).
- [3] A. Garrett Lisi, *An exeptionally simple theory of everything*, [arXiv: 0711.0770](#).
- [4] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *Phys. Lett. B*, **429**:3–4 (1998), 263–272; [arXiv: hep-ph/9803315](#); *Phys. Today*, **55**:2 (2002), 35–40; G. Landsberg, *Collider searches for extra dimensions*, [arXiv: hep-ex/0412028](#); A. Mironov, A. Morozov, T. Tomaras, *Can Centauros or Chirons be the first observations of evaporating mini black holes?*, [arXiv: hep-ph/0311318](#); *Facta Univ. Ser. Phys. Chem. Tech.*, **4** (2006), 381–404; [arXiv: 0710.3395](#); I. Ya. Aref’eva, I. V. Volovich, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, **5**:4 (2008), 641–651; [arXiv: 0710.2696](#).
- [5] B. Kosyakov, *Introduction to the Classical Theory of Particles and Fields*, Springer, Berlin, 2007; D. V. Gal’tsov, *Phys. Rev. D*, **66**:2 (2002), 025016; [arXiv: hep-th/0112110](#); P. O. Kazinski, S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, *Phys. Rev. D*, **66**:2 (2002), 025017; [arXiv: hep-th/0201046](#); Yu. Yaremko, *SIGMA*, **1** (2005), 012; [arXiv: math-ph/0511075](#); П. Казинский, *Эффективная динамика сингулярных источников в классической теории поля*, дисс. ... канд. ф.-м. наук, Томский гос. ун-т, Томск, 2007; A. Mironov, A. Morozov, *On the problem of radiation friction beyond 4 and 6 dimensions*, [arXiv: 0710.5676](#); *Письма в ЖЭТФ*, **85**:1 (2007), 9–14; [arXiv: hep-ph/0612074](#); *ТМФ*, **156**:2 (2008), 282–291; [arXiv: hep-th/0703097](#); D. Galakhov, *Письма в ЖЭТФ*, **87**:8 (2008), 522–527; [arXiv: 0710.5688](#).
- [6] A. Slavnov, *Nucl. Phys. B*, **97**:1 (1975), 155–164; A. B. Pimenov, E. S. Shevtsova, A. A. Soloshenko, K. V. Stepanyantz, *Higher derivative regularization and quantum corrections in $N = 1$ supersymmetric theories*, [arXiv: 0712.1721](#).
- [7] R. Woodard, *Phys. Rev. A*, **62**:5 (2000), 052105; [arXiv: hep-th/0006207](#).
- [8] K. Bering, *A note on non-locality and Ostrogradski’s construction*, [arXiv: hep-th/0007192](#).
- [9] R. Miron, D. Hrimiue, H. Shimada, S. V. Sabau, *The Geometry of Hamilton and Lagrange Spaces*, Fund. Theories Phys., **118**, Kluwer, Dordrecht, 2001.
- [10] S. Hawking, T. Hertog, *Phys. Rev. D*, **65**:10 (2002), 103515; [arXiv: hep-th/0107088](#).
- [11] T.-C. Cheng, P.-M. Ho, M.-C. Yeh, *Phys. Rev. D*, **66**:8 (2002), 085015; [arXiv: hep-th/0206077](#).
- [12] J. Gomis, K. Kamimura, T. Ramirez, *Nucl. Phys. B*, **696**:1–2 (2004), 263–291; [arXiv: hep-th/0311184](#).
- [13] A. Smilga, *Phys. Lett. B*, **632**:2–3 (2006), 433–438; [arXiv: hep-th/0503213](#); *6D superconformal theory as the theory of everything*, [arXiv: hep-th/0509022](#).
- [14] M. S. Plyushchay, *EJTP*, **3**:10 (2006), 17–31; [arXiv: math-ph/0604022](#).
- [15] I. Cortese, J. A. Garcia, *Phys. Lett. A*, **358**:5–6 (2006), 327–333; [arXiv: hep-th/0605156](#); *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **4**:5 (2007), 789–805; [arXiv: hep-th/0703205](#).
- [16] S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, *JHEP*, **1** (2007), 047; [arXiv: hep-th/0612086](#).
- [17] K. Bolonek, P. Kosiński, *J. Phys. A*, **40**:38 (2007), 11561–11567; [arXiv: quant-ph/0612091](#).
- [18] C. S. Acatrinei, *J. Phys. A*, **40**:43 (2007), F929–F933; [arXiv: 0708.4351](#).
- [19] K. Andrzejewski, J. Gonera, P. Maslanka, *A note on the Hamiltonian formalism for higher-derivative theories*, [arXiv: 0710.2976](#).
- [20] М. В. Остроградский, *Полн. собр. трудов*. Т. 2, Изд-во АН УССР, Киев, 1961, 139–233.
- [21] E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. With an Introduction to the Problem of Three Bodies*, Cambridge University Press, New York, 1988.

- [22] A. Pais, G. Uhlenbeck, *Phys. Rev.*, **79** (1950), 145–165.
- [23] П. Дирак, *Лекции по квантовой механике*, РХД, Ижевск, 1999.
- [24] A. Slavov, *Nucl. Phys. B*, **31**:2 (1971), 301–315.
- [25] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1978.
- [26] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия: Методы и приложения. Т. 2. Геометрия и топология многообразий*, УРСС, М., 2001.
- [27] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, М., 1986.
- [28] D. Eliezer, R. Woodard, *Nucl. Phys. B*, **325**:2 (1989), 389–469.
- [29] M. Plyushchay, *Modern Phys. Lett. A*, **4**:9 (1989), 837–847.
- [30] J. M. Pons, *Lett. Math. Phys.*, **17**:3 (1989), 181–189.
- [31] J. Z. Simon, *Phys. Rev. D*, **41**:12 (1990), 3720–3733.
- [32] M. Kreuzer, *Classical Quantum Gravity*, **7**:8 (1990), 1303–1317.
- [33] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [34] J. Govaerts, M. S. Rashid, *The Hamiltonian formulation of higher order dynamical systems*, [arXiv: hep-th/9403009](#).
- [35] J. Llosa, J. Vives, *J. Math. Phys.*, **35**:6 (1994), 2856–2877.
- [36] H.-J. Schmidt, *Phys. Rev. D*, **49**:12 (1994), 6354–6366; Erratum, **54** (1996), 7906; [arXiv: gr-qc/9404038](#).
- [37] T. Nakamura, S. Hamamoto, *Progr. Theoret. Phys.*, **95**:3 (1996), 469–484; [arXiv: hep-th/9511219](#).
- [38] А. Ю. Морозов, *УФН*, **150** (1986), 337–416; А. Горodenцев, А. Лосев, *Лекции на школах в Домбае и Дубне*, 2004; D. Krotov, A. Losev, A. Gorodentsev, *Quantum field theory as effective BV theory from Chern–Simons*, [arXiv: hep-th/0603201](#); P. Mnev, *Notes on simplicial BF theory*, [arXiv: hep-th/0610326](#).
- [39] V. Dolotin, A. Morozov, Sh. Shakirov, *Phys. Lett. B*, **651**:1 (2007), 71–73; [arXiv: 0704.2884](#); В. В. Долотин, А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров, *ТМФ*, **156**:1 (2008), 3–37; [arXiv: 0704.2609](#).
- [40] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, MA, 1994; V. Dolotin, A. Morozov, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Scientific, Hackensack, NJ, 2007; [arXiv: hep-th/0609022](#).
- [41] D. Fairlie, J. Govaerts, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **373**:1 (1992), 214–232; [arXiv: hep-th/9110022](#).
- [42] В. Долотин, А. Стояновский, *Выступления на семинарах ИТЭФ*, 2006–2007.
- [43] П. Дунин-Барковский, А. Слепцов, *ТМФ*, **158**:1 (2009), 72–97; [arXiv: 0801.4293](#).
- [44] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. I. Механика*, Наука, М., 1957.
- [45] А. Морозов, *УФН*, **164**:1 (1994), 3–62; [arXiv: hep-th/9303139](#); *Matrix models as integrable systems*, [arXiv: hep-th/9502091](#).

Поступила в редакцию 4.02.2008