Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Зупник, Теория Черна–Саймонса в гармоническом $SO(5)/U(2)$ -суперпространстве, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 2, 217–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:20:18

© 2008 г.

Б. М. Зупник*

ТЕОРИЯ ЧЕРНА–САЙМОНСА В ГАРМОНИЧЕСКОМ $SO(5)/U(2)$ -СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается суперпространство $D = 3$, $N = 5$ суперсимметрии с использованием $SO(5)/U(2)$ -гармонических координат. Три аналитических $N = 5$ калибровочных суперполя зависят от трех векторных и шести гармонических бозонных координат, а также от шести грассмановых координат. Разложение по грассмановым и гармоническим координатам этих суперполей порождает бесконечномерные супермультиплеты, включающие трехмерное калибровочное поле Черна–Саймонса и вспомогательные бозонные и фермионные поля, несущие $SO(5)$ -векторные индексы. Суперполевое действие этой теории инвариантно относительно $D = 3$, $N = 6$ конформной суперсимметрии, реализованной на $N = 5$ суперполях.

Ключевые слова: гармоническое суперпространство, расширенная суперсимметрия, теория Черна–Саймонса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Трехмерная калибровочная теория Черна–Саймонса [1], [2] представляет собой интересный пример топологической теории поля, которая тесно связана с трехмерной гравитацией, с двумерными конформными теориями и топологическими струнами [3], [4]. В трехмерном пространстве с координатами x^m действие Черна–Саймонса имеет вид

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \varepsilon^{mnr} \text{Tr} \left(A_m \left(\partial_n A_r + \frac{i}{3} [A_n, A_r] \right) \right), \quad (1.1)$$

где $m, n, r = 0, 1, 2$, ε^{mnr} – антисимметричный символ, $A_m(x)$ – неабелево калибровочное поле. Это действие соответствует классическому решению с нулевой напряженностью калибровочного поля. Неоднозначный функционал S_{CS} инвариантен только относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований, однако квантование константы k гарантирует однозначность величины $e^{iS_{CS}}$ в континуальном интеграле квантовой теории поля. Представим действие Черна–Саймонса как

*Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: zupnik@theor.jinr.ru

интеграл от дифференциальной формы:

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int \text{Tr} \left(A dA + \frac{2i}{3} A^3 \right), \quad (1.2)$$

где $A = dx^m A_m$, $d = dx^m \partial_m$. Из этого представления следует, что действие не зависит от метрики трехмерного пространства. Действие S_{CS} может также рассматриваться как дополнительное взаимодействие калибровочного поля A_m в обобщенной трехмерной теории Янга–Миллса–Черна–Саймонса. В этой обобщенной калибровочной теории S_{CS} играет роль топологического массового члена.

Суперсимметричные расширения $D = 3$ теории Черна–Саймонса обсуждались в работах [5]–[19]. Простейшая суперсимметричная теория Черна–Саймонса была построена в $D = 3$, $N = 1$ суперпространстве с вещественными координатами $z = (x^m, \theta^\alpha)$, где грассманова координата θ^α имеет спинорный индекс $\alpha = 1, 2$ группы $SL(2, R)$ [5], [6]. Суперполевое действие этой теории определено на спинорном калибровочном суперполе $A_\alpha(z)$, компоненты которого содержат векторное поле $A_m(x)$ и спинорное поле $\psi_\alpha(x)$ в присоединенном представлении калибровочной группы. Компонентное действие $N = 1$ теории Черна–Саймонса содержит член $\int d^3x \text{Tr} \psi^\alpha \psi_\alpha$ дополнительно к (1.1). Таким образом, в $N = 1$ теории Черна–Саймонса фермион ψ_α играет роль вспомогательного поля, хотя в обобщенной модели с добавлением суперсимметричного взаимодействия Янга–Миллса это поле может описывать физические степени свободы. Суперполевое действие $D = 3$, $N = 1$ теории Черна–Саймонса может быть интерпретировано как интеграл по суперпространству от дифференциальной суперформы Черна–Саймонса $dA + 2iA^3/3$ в рамках нашей теории интегрирования суперполевых интегральных форм [7]–[10].

Абелево действие $D = 3$, $N = 2$ теории Черна–Саймонса впервые было построено в $N = 1$ суперпространстве [5]. Соответствующее неабелево действие рассматривалось в $D = 3$, $N = 2$ суперпространстве с помощью эрмитова суперполя $V(x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha)$, где θ^α и $\bar{\theta}^\alpha$ – комплексно-сопряженные спинорные координаты [7], [11], [12]. В компонентном $N = 2$ лагранжиане к бозонному действию Черна–Саймонса добавляются билинейные члены с фермионными и скалярными полями без производных. Необычная дуальная форма $N = 2$ действия Черна–Саймонса содержит второе векторное поле вместо скалярного поля [12].

$D = 3$, $N = 3$ теория Черна–Саймонса впервые исследовалась методом гармонического суперпространства [13], [14]. Использование $SU(2)/U(1)$ -гармоник [20] в суперпространстве с тремя спинорными координатами θ_α^{ik} позволяет построить аналитическое суперпространство с двумя спинорными координатами θ_α^{++} , θ_α^0 , в котором можно также реализовать четвертую суперсимметрию. Векторный $N = 3, 4$ супермультиплет описывается аналитическим суперполем V^{++} размерности 0, а соответствующая суперполевая аналитическая напряженность $W^{++} = D^{++\alpha} D_\alpha^{++} V^{--}$ имеет размерность 1 и выражается через спинорные производные гармонической связности V^{--} . Суперполевое действие $N = 3$ теории Черна–Саймонса CS_3^3 удобно строить в полном $D = 3$, $N = 3$ суперпространстве по аналогии с действием $D = 4$, $N = 2$ теории Янга–Миллса в соответствующем гармоническом суперпространстве [15], [21]. Вариация действия CS_3^3 -теории может быть представлена в

$$\delta S_3^3 = \int d^3x du d^6\theta \operatorname{Tr}(\delta V^{++} V^{--}) = \int d^3x du d^{(-4)}\theta \operatorname{Tr}(\delta V^{++} W^{++}) = 0, \quad (1.3)$$

где мера $d^{(-4)}\theta$ содержит производные по четырем аналитическим грассмановым координатам. Отметим, что уравнения движения CS_3^3 -теории $W^{++} = 0$ ковариантны относительно четвертой суперсимметрии, хотя действие обладает только тремя суперсимметриями. Суперсимметричное действие $D = 3$, $N = 4$ теории Янга–Миллса также можно построить в $D = 3$, $N = 3$ суперпространстве, хотя существует альтернативный формализм в $N = 4$ суперпространстве [22]. Компонентная форма действия $N = 3$ теории Черна–Саймонса рассматривалась также в работах [16], [17].

Компонентное действие $D = 3$, $N = 8$ теории Янга–Миллса получается размерной редукцией $D = 4$, $N = 4$ теории Янга–Миллса. На массовой поверхности в этих теориях определено действие 16 суперзарядов. Суперполевая версия $D = 4$, $N = 3$ теории Янга–Миллса SYM_4^3 была построена в гармоническом $SU(3)/U(1) \times U(1)$ -суперпространстве [21], [23], вне массовой поверхности эта теория инвариантна только относительно 12 суперзарядов. Нетрудно построить размерную редукцию этой теории Янга–Миллса в соответствующее трехмерное суперпространство, однако неясно, можно ли в это суперпространство включить взаимодействие Черна–Саймонса. Следует сказать, что мера интегрирования в трехмерном варианте аналитического $SU(3)/U(1) \times U(1)$ -суперпространства имеет размерность 1.

В работе [24] предлагалось использовать $SO(5)/U(2)$ -гармоническое пространство для суперполевого описания $D = 3$, $N = 5$ теории Черна–Саймонса. Альтернативный формализм этой теории с использованием $SO(5)/U(1) \times U(1)$ -гармоник и дополнительных гармонических условий был рассмотрен в работе [25], где было показано, что действие этой модели инвариантно относительно $D = 3$, $N = 6$ суперконформной группы. Полезно подробно проанализировать основные положения суперполевого формализма $N = 6$ теории Черна–Саймонса на языке $SO(5)/U(2)$ -гармоник.

В разделе 2 рассматриваются $SO(5)/U(2)$ -гармоники и соответствующие гармонические производные. С помощью этих гармоник и десяти грассмановых координат полного $N = 5$ суперпространства определяются шесть грассмановых координат аналитического суперпространства. Координаты аналитического суперпространства считаются вещественными по отношению к специальному сопряжению. Три гармонические производные сохраняют условие грассмановой аналитичности в гармоническом суперпространстве. Мера интегрирования в аналитическом $N = 5$ суперпространстве имеет нулевую размерность по сравнению с размерностью 2 меры интегрирования в полном $D = 3$, $N = 5$ суперпространстве. Это свойство меры играет важную роль при построении суперполевого действия теории.

В разделе 3 определяется группа аналитических калибровочных преобразований с использованием гармонического условия $U(2)$ -инвариантности суперполевых параметров этих преобразований. Основные калибровочные суперполя теории (препотенциалы) удовлетворяют условиям грассмановой аналитичности и гармонической $U(2)$ -ковариантности. Условия вещественности для калибровочной группы и

калибровочных суперполей включают специальное сопряжение аналитического суперпространства. Суперполевое действие теории строится в аналитическом $D = 3$, $N = 5$ суперпространстве [24], [25]. Одно из калибровочных суперполей может быть построено из двух других препотенциалов, в этом представлении действие теории содержит два независимых суперполя. Классические уравнения движения имеют только чисто калибровочные решения для препотенциалов по аналогии с $N = 1, 2, 3$ суперполевыми теориями Черна–Саймонса. Суперполевое действие теории инвариантно относительно преобразований $D = 3$, $N = 5$ суперконформной группы, реализованной на препотенциалах. Дополнительные преобразования шестой суперсимметрии определяются с помощью спинорной производной, сохраняющей грасманову аналитичность и $U(2)$ -ковариантность.

Компонентная структура $D = 3$, $N = 6$ теории Черна–Саймонса исследуется в разделе 4. Выбирается суперсимметричная калибровка $U(2)$ -ковариантных препотенциалов, аналогичная калибровкам типа Весса–Зумино в других суперполевыми теориях. Основное калибровочное суперполе в этой калибровке включает векторное поле A_m и фермионное поле ψ_α в $SO(5)$ -инвариантном секторе, а также бесконечное число фермионных и бозонных полей с $SO(5)$ -индексами в гармонических и грасмановых разложениях. Компонентный лагранжиан содержит член Черна–Саймонса для A_m , а также простые билинейные и трилинейные взаимодействия других бозонных и фермионных полей. Напряженность калибровочного поля и все другие поля исчезают на массовой поверхности, определяемой классическими уравнениями движения.

Другой вариант суперполевого действия для абелева $N = 5$ препотенциала с размерной константой связи обсуждается в разделе 5. Это действие порождает обычный лагранжиан Максвелла для векторного поля и другие взаимодействия физических и вспомогательных полей. В приложении рассматриваются $D = 3$, $N = 5$ суперконформные преобразования координат в полном и аналитическом суперпространствах. Определены также суперконформные преобразования меры интегрирования и гармонических производных в аналитическом суперпространстве.

Альтернативный формализм $D = 3$, $N = 6$ теории Черна–Саймонса на основе $SO(5)/U(1) \times U(1)$ -гармоник рассматривался в [25]. Этот формализм предусматривает введение дополнительных гармонических связей для параметров калибровочной группы и калибровочных суперполей, соответствующих $U(2)$ -ковариантности. В гармоническом $SO(5)/U(2)$ -суперпространстве $U(2)$ -ковариантность гарантирована. Другой вариант гармонического $SO(5)/U(1) \times U(1)$ -суперпространства без дополнительных гармонических связей рассматривался в [26]. Эта модель описывает взаимодействие супермультиплета Черна–Саймонса с необычными трехмерными материальными полями.

2. ГАРМОНИЧЕСКОЕ $SO(5)/U(2)$ -СУПЕРПРОСТРАНСТВО

Однородное пространство $SO(5)/U(2)$ параметризовано элементами гармонической (5×5) -матрицы

$$U_a^K = (U_a^{+i}, U_a^0, U_{ia}^-) = (U_a^{+1}, U_a^{+2}, U_a^0, U_{1a}^-, U_{2a}^-), \quad (2.1)$$

где $a = 1, \dots, 5$ – векторный индекс группы $SO(5)$, $i = 1, 2$ – спинорный индекс группы $SU(2)$, а $U(1)$ -заряды обозначены символами $+$, $-$, 0 . Основные соотношения для этих гармоник имеют вид

$$\begin{aligned} U_a^{+i} U_a^{+k} &= U_a^{+i} U_a^0 = 0, & U_{ia}^- U_{ka}^- &= U_{ia}^- U_a^0 = 0, \\ U_a^{+i} U_{ka}^- &= \delta_k^i, & U_a^0 U_a^0 &= 1, \\ U_a^{+i} U_{ib}^- + U_{ia}^- U_b^{+i} + U_a^0 U_b^0 &= \delta_{ab}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рассмотрим $SO(5)$ -инвариантные гармонические производные с ненулевыми $U(1)$ -зарядами

$$\begin{aligned} \partial^{+i} &= U_a^{+i} \frac{\partial}{\partial U_a^0} - U_a^0 \frac{\partial}{\partial U_{ia}^-}, & \partial^{+i} U_a^0 &= U_a^{+i}, & \partial^{+i} U_{ka}^- &= -\delta_k^i U_a^0, \\ \partial^{++} &= U_{ia}^+ \frac{\partial}{\partial U_{ia}^-}, & [\partial^{+i}, \partial^{+k}] &= \varepsilon^{ki} \partial^{++}, & \partial^{+i} \partial_i^+ &= \partial^{++}, \\ \partial_i^- &= U_{ia}^- \frac{\partial}{\partial U_a^0} - U_a^0 \frac{\partial}{\partial U_a^{+i}}, & \partial_i^- U_a^0 &= U_{ia}^-, & \partial_i^- U_a^{+k} &= -\delta_i^k U_a^0, \\ \partial^{--} &= U_a^{-i} \frac{\partial}{\partial U_a^{+i}}, & [\partial_i^-, \partial_k^-] &= \varepsilon_{ki} \partial^{--}, & \partial^{-k} \partial_k^- &= -\partial^{--}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где определены также некоторые соотношения между этими гармоническими производными. $U(1)$ -нейтральные гармонические производные образуют алгебру Ли $U(2)$

$$\partial_k^i = U_a^{+i} \frac{\partial}{\partial U_a^{+k}} - U_{ka}^- \frac{\partial}{\partial U_{ia}^-}, \quad [\partial^{+i}, \partial_k^-] = -\partial_k^i, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \partial^0 \equiv \partial_k^k &= U_a^{+k} \frac{\partial}{\partial U_a^{+k}} - U_{ka}^- \frac{\partial}{\partial U_{ka}^-}, & [\partial^{++}, \partial^{--}] &= \partial^0, \\ \partial_k^i U_a^{+l} &= \delta_k^l U_a^{+i}, & \partial_k^i U_{la}^- &= -\delta_l^i U_{ka}^-. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Операторы ∂^{+k} , ∂^{++} , ∂_k^- , ∂^{--} , ∂_k^i удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли $SO(5)$.

На этих гармониках определено обычное комплексное сопряжение

$$\overline{U_a^{+i}} = U_{ia}^-, \quad \overline{U_a^0} = U_a^0, \quad (2.6)$$

однако в гармоническом пространстве удобнее использовать специальное сопряжение

$$(U_a^{+i})^\sim = U_a^{+i}, \quad (U_{ia}^-)^\sim = U_{ia}^-, \quad (U_a^0)^\sim = U_a^0, \quad (2.7)$$

по отношению к которому все гармоники вещественны. На гармонических полиномах с комплексными коэффициентами $f(U)$ $\sim$ -сопряжение действует только на эти коэффициенты, например, $(z U_a^K)^\sim = \bar{z} U_a^K$, где $\bar{z}$ – комплексное сопряжение.

Специальное сопряжение действует на производные гармонических функций и позволяет определить соответствующее эрмитово сопряжение $\dagger$ гармонических операторов

$$\begin{aligned} (\partial^{+i} f)^\sim &= \partial^{+i} \tilde{f}, & (\partial^{+i})^\dagger &= -\partial^{+i}, & (\partial_i^- f)^\sim &= \partial_i^- \tilde{f}, & (\partial_i^-)^\dagger &= -\partial_i^-, \\ (\partial^{\pm\pm} f)^\sim &= \partial^{\pm\pm} \tilde{f}, & (\partial^{\pm\pm})^\dagger &= -\partial^{\pm\pm}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\partial_i^\pm f = [\partial_i^\pm, f]$, $\partial^{\pm\pm} f = [\partial^{\pm\pm}, f]$.

Гармонические функции на однородном шестимерном пространстве $SO(5)/U(2)$ удовлетворяют условиям $U(2)$ -инвариантности

$$\partial_k^i f(U) = 0. \quad (2.9)$$

Полное суперпространство $D = 3$, $N = 5$ суперсимметрии имеет спинорные СВ координаты θ_a^α , $\alpha = 1, 2$, $a = 1, 2, 3, 4, 5$, в дополнение к координатам x^m трехмерного пространства Минковского. На спинорных координатах действует группа $SL(2, R) \times SO(5)$. Суперконформные преобразования этих координат рассмотрены в приложении.

$SO(5)/U(2)$ -гармоники позволяют построить проекции спинорных координат и частных спинорных производных

$$\begin{aligned} \theta^{+i\alpha} &= U_a^{+i} \theta_a^\alpha, & \theta^{0\alpha} &= U_a^0 \theta_a^\alpha, & \theta_i^{-\alpha} &= U_{ia}^- \theta_a^\alpha, \\ \partial_{i\alpha}^- &= \frac{\partial}{\partial \theta^{+i\alpha}}, & \partial_\alpha^0 &= \frac{\partial}{\partial \theta^{0\alpha}}, & \partial_\alpha^{+i} &= \frac{\partial}{\partial \theta_i^{-\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Аналитические координаты (АВ-представление) в полном гармоническом суперпространстве используют эти проекции десяти спинорных координат $\theta^{+i\alpha}$, $\theta^{0\alpha}$, $\theta_i^{-\alpha}$ и следующее представление для векторной координаты:

$$x_A^m \equiv y^m = x^m + i(\theta^{+k} \gamma^m \theta_k^-) = x^m + i(\theta_a \gamma^m \theta_b) U_a^{+k} U_{kb}^-. \quad (2.11)$$

Аналитические координаты вещественны по отношению к специальному сопряжению:

$$\begin{aligned} (\theta^{+i\alpha})^\sim &= \theta^{+i\alpha}, & (\theta^{0\alpha})^\sim &= \theta^{0\alpha}, & (\theta_i^{-\alpha})^\sim &= \theta_i^{-\alpha}, & (y^m)^\sim &= y^m, \\ (\Phi\Lambda)^\sim &= \Lambda^\sim \Phi^\sim, & (z\Lambda)^\sim &= \bar{z}\Lambda^\sim, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где определено также действие $\sim$ -сопряжения на произвольных суперполях Φ , Λ (z , $\bar{z}$ – сопряженные комплексные числа).

Определим гармонические производные в АВ-представлении:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{+k} &= \partial^{+k} - i(\theta^{+k} \gamma^m \theta^0) \partial_m + \theta^{+k\alpha} \partial_\alpha^0 - \theta^{0\alpha} \partial_\alpha^{+k}, \\ \mathcal{D}^{++} &= \partial^{++} + i(\theta^{+k} \gamma^m \theta_k^+) \partial_m + \theta_k^{+\alpha} \partial_\alpha^{+k}, \\ \mathcal{D}_k^- &= \partial_k^- + i(\theta_k^- \gamma^m \theta^0) \partial_m + \theta_k^{-\alpha} \partial_\alpha^0 - \theta^{0\alpha} \partial_{k\alpha}^-, \\ \mathcal{D}^{--} &= \partial^{--} - i(\theta_k^- \gamma^m \theta^{-k}) \partial_m + \theta^{-k\alpha} \partial_{k\alpha}^-, \\ \mathcal{D}_l^k &= \partial_l^k + \theta^{+k\alpha} \partial_{l\alpha}^- - \theta_l^{-\alpha} \partial_\alpha^{-k}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Эти операторы коммутируют с генераторами $N = 5$ суперсимметрии.

$U(2)$ -оператор $\mathcal{D}_l^k$ действует ковариантно в гармоническом суперпространстве:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_l^k \theta^{+i\alpha} &= \delta_l^i \theta^{+k\alpha}, & \mathcal{D}_l^k \theta_i^{-\alpha} &= -\delta_i^k \theta_l^{-\alpha}, \\ [\mathcal{D}_l^k, \mathcal{D}^{+i}] &= \delta_l^i \mathcal{D}^{+k}, & [\mathcal{D}_l^k, \mathcal{D}^{++}] &= \delta_l^k \mathcal{D}^{++}, & [\mathcal{D}_l^k, \mathcal{D}_i^-] &= -\delta_i^k \mathcal{D}_l^-. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Нетрудно получить коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}^{+k}, \mathcal{D}^{+l}] &= -\varepsilon^{kl} \mathcal{D}^{++}, & \mathcal{D}^{+k} \mathcal{D}_k^+ &= \mathcal{D}^{++}, \\ [\mathcal{D}_k^-, \mathcal{D}_l^-] &= -\varepsilon_{kl} \mathcal{D}^{--}, & \mathcal{D}^{-k} \mathcal{D}_k^- &= -\mathcal{D}^{--}, \\ [\mathcal{D}_l^-, \mathcal{D}^{+k}] &= \mathcal{D}_l^k = \widehat{\mathcal{D}}_l^k + \frac{1}{2} \delta_l^k \mathcal{D}^0, & [\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^{--}] &= \mathcal{D}^0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}_k^k$ и $\widehat{\mathcal{D}}_l^k$ – генераторы подгрупп $U(1)$ и $SU(2)$.

Соотношения между гармоническими и спинорными производными имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}^{+i}, D_\alpha^0] &= D_\alpha^{+i}, & [\mathcal{D}^{+i}, D_{k\alpha}^-] &= -\delta_k^i D_\alpha^0, \\ [\mathcal{D}^{++}, D_\alpha^0] &= 0, & [\mathcal{D}^{++}, D_{k\alpha}^-] &= D_{k\alpha}^+, \\ [\mathcal{D}_i^-, D_\alpha^{+k}] &= -\delta_i^k D_\alpha^0, & [\mathcal{D}_i^-, D_\alpha^0] &= D_{i\alpha}^-, \\ [\mathcal{D}^{--}, D_\alpha^{+k}] &= D_\alpha^{-k}, & [\mathcal{D}^{--}, D_\alpha^0] &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} D_\alpha^{+i} &= \partial_\alpha^{+i}, & D_{i\alpha}^- &= \partial_{i\alpha}^- + 2i\theta_i^{-\beta} \partial_{\alpha\beta}, \\ D_\alpha^0 &= \partial_\alpha^0 + i\theta^{0\beta} \partial_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Координаты аналитического суперпространства $\zeta = (y^m, \theta^{+i\alpha}, \theta^{0\alpha}, U_a^K)$ имеют грассманову размерность 6 и размерность четного пространства $3 + 6$. Функции $\Phi(\zeta)$ в этом суперпространстве удовлетворяют условию грассмановой аналитичности

$$D_\alpha^{+k} \Phi = 0. \quad (2.18)$$

В дополнение к этому условию аналитические суперполя в гармоническом $SO(5)/U(2)$ -суперпространстве обладают также $U(2)$ -ковариантностью. Для $U(2)$ -скалярных суперполей это дополнительное условие принимает вид

$$\mathcal{D}_l^k \Lambda(\zeta) = 0. \quad (2.19)$$

Для $SU(2)$ спинорного суперполя с $U(1)$ -зарядом q условия $U(2)$ -ковариантности имеют вид

$$\mathcal{D}^0 \Phi_k^{(q)} = q \Phi_k^{(q)}, \quad [\widehat{\mathcal{D}}_j^i, \Phi_k^{(q)}] = -\delta_k^i \Phi_j^{(q)} + \frac{1}{2} \delta_j^i \Phi_k^{(q)}. \quad (2.20)$$

Мера интегрирования в аналитическом суперпространстве $d\mu^{(-4)}$ имеет размерность 0,

$$d\mu^{(-4)} = dU d^3 x_A (\partial_\alpha^0)^2 (\partial_{i\alpha}^-)^4 = dU d^3 x_A d\theta^{(-4)}, \quad (2.21)$$

и является чисто мнимой по отношению к $\sim$ -сопряжению:

$$(d\mu^{(-4)})^\sim = -d\mu^{(-4)}. \quad (2.22)$$

Интегралы по грассмановым и гармоническим переменным имеют простые свойства

$$\begin{aligned} \int d\theta^{(-4)} (\theta^0)^2 \Theta^{(+4)} &= 1, & \int dU &= 1, \\ \int dU U_a^0 U_b^0 &= \frac{1}{5} \delta_{ab}, & \int dU U_a^{+k} U_{lb}^- &= \frac{1}{5} \delta_l^k \delta_{ab}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где комбинации спинорных координат $(\theta^0)^2$ и $\Theta^{(+4)}$ определены в приложении.

3. КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ЧЕРНА–САЙМОНСА В ГАРМОНИЧЕСКОМ $SO(5)/U(2)$ -СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Суперполевое действие. Гармонические производные D^{+k} , $\mathcal{D}^{++}$ совместно со спинорными производными D_α^{+k} определяют CR-структуру гармонического $SO(5)/U(2)$ -суперпространства. Эта $U(2)$ -ковариантная CR-структура инвариантна относительно $N = 5$ суперсимметрии. В суперполеовой калибровочной теории CR-структура должна сохраняться.

Калибровочные суперполя (препотенциалы) $V^{+k}(\zeta)$ и $V^{++}(\zeta)$ в гармоническом $SO(5)/U(2)$ -суперпространстве удовлетворяют следующим условиям грасмановой аналитичности и $U(2)$ -ковариантности:

$$D_\alpha^{+k}V^{+k} = D_\alpha^{+k}V^{++} = 0, \quad \mathcal{D}_j^i V^{+k} = \delta_j^i V^{+i}, \quad \mathcal{D}_j^i V^{++} = \delta_j^i V^{++}. \quad (3.1)$$

В калибровочной группе $SU(n)$ эти матричные суперполя антиэрмитовы:

$$(V^{+k})^\dagger = -V^{+k}, \quad (V^{++})^\dagger = -V^{++}, \quad (3.2)$$

где операция $\dagger$ включает транспонирование и $\sim$ -сопряжение.

Аналитические суперполевые параметры калибровочной группы $SU(n)$ удовлетворяют условиям обобщенной CR-аналитичности

$$D_\alpha^{+k}\Lambda = \mathcal{D}_j^i \Lambda = 0 \quad (3.3)$$

и антиэрмитовости $\Lambda^\dagger = -\Lambda$. Можно использовать разложение этих суперполевых параметров и препотенциалов по генераторам присоединенного представления калибровочной группы T_A , например

$$V^{+k} = V_A^{+k} T_A, \quad [T_A, T_B] = if_{ABC} T_C, \quad \text{Tr}(T_A T_B) = \delta_{AB}, \quad (3.4)$$

где f_{ABC} – структурные константы группы.

Мы рассматриваем эти препотенциалы как связности в калибровочно-ковариантных гармонических производных:

$$\begin{aligned} \nabla^{+i} &= \mathcal{D}^{+i} + V^{+i}, & \nabla^{++} &= \mathcal{D}^{++} + V^{++}, \\ \delta_\Lambda V^{+i} &= \mathcal{D}^{+i} \Lambda + [\Lambda, V^{+i}], & \delta_\Lambda V^{++} &= \mathcal{D}^{++} \Lambda + [\Lambda, V^{++}], \\ D_\alpha^{+k} \delta_\Lambda V^{+k} &= D_\alpha^{+k} \delta_\Lambda V^{++} = 0, & \mathcal{D}_j^i \delta_\Lambda V^{+k} &= \delta_j^k \delta_\Lambda V^{+i}, & \mathcal{D}_j^i \delta_\Lambda V^{++} &= \delta_j^i \delta_\Lambda V^{++}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где определены инфинитезимальные калибровочные преобразования калибровочных суперполей. Эти ковариантные производные коммутируют со спинорными производными D_α^{+k} и сохраняют CR-структуру в гармоническом суперпространстве.

Вне массовой поверхности можно построить три аналитические суперполевые напряженности

$$\begin{aligned} F^{++} &= \nabla^{++} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ki} [\nabla^{+i}, \nabla^{+k}] = V^{++} - \mathcal{D}^{+k} V_k^{++} - V^{+k} V_k^{++}, \\ F^{(+3)k} &= [\nabla^{++}, \nabla^{+k}] = \mathcal{D}^{++} V^{+k} - \mathcal{D}^{+k} V^{++} + [V^{++}, V^{+k}], \\ \delta_\Lambda F^{++} &= [\Lambda, F^{++}], & \delta_\Lambda F^{(+3)k} &= [\Lambda, F^{(+3)k}]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Суперполевое действие в аналитическом $SO(5)/U(2)$ -суперпространстве определяется на трех препотенциалах V^{+k} и V^{++} по аналогии с немассовым действием SYM_4^3 -теории [21]

$$S_1 = \frac{ik}{12\pi} \int d\mu^{(-4)} \text{Tr}(V^{+j} \mathcal{D}^{++} V_j^+ + 2V^{++} \mathcal{D}_j^+ V^{+j} + (V^{++})^2 + V^{++} [V_j^+, V^{+j}]), \quad (3.7)$$

где k – константа связи, а выбор численного множителя гарантирует правильную нормировку действия векторного поля. Это действие инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований препотенциалов (3.5). Идея построения суперполевого действия в гармоническом $SO(5)/U(2)$ -суперпространстве предложена в [24], хотя детально конструкция суперполевого действия Черна–Саймонса в этой работе не обсуждалась. Эквивалентное суперполевое действие в альтернативном гармоническом формализме рассмотрено в [25].

Действие S_1 порождает суперполевые уравнения движения, которые означают тривиальность суперполевых напряженностей теории:

$$\begin{aligned} F_k^{(+3)} &= \mathcal{D}^{++} V_k^+ - \mathcal{D}_k^+ V^{++} + [V^{++}, V_k^+] = 0, \\ F^{++} &= V^{++} - \mathcal{D}^{+k} V_k^+ - V^{+k} V_k^+ = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эти классические суперполевые уравнения имеют только чисто калибровочное решение для препотенциалов

$$V^{+k} = e^{-\Lambda} \mathcal{D}^{+k} e^{\Lambda}, \quad V^{++} = e^{-\Lambda} \mathcal{D}^{++} e^{\Lambda}, \quad (3.9)$$

где Λ – произвольное аналитическое суперполе. Для доказательства мы исследуем в разделе 4 соответствующие классические решения компонентных полевых уравнений движения теории. Отметим, что формально подобные аналитические суперполевые уравнения SYM_4^3 -теории имеют нетривиальные решения для калибровочных суперполей [21]. Главная причина различий в характере решений этих двух теорий связана с различными грассмановыми размерностями соответствующих аналитических суперпространств.

Запишем действие (3.7) в эквивалентном виде через препотенциалы и аналитические напряженности (3.6):

$$S'_1 = \frac{ik}{12\pi} \int d\mu^{(-4)} \text{Tr}(V^{+k} F_k^{(+3)} + V^{++} F^{++} + V^{++} V^{+k} V_k^+) = \int d\mu^{(-4)} L^{+4}, \quad (3.10)$$

где $L^{(+4)}$ – суперполевая плотность действия. Рассмотрим составное суперполе

$$\widehat{V}^{++} = \mathcal{D}^{+k} V_k^+ + V^{+k} V_k^+, \quad \delta_{\Lambda} \widehat{V}^{++} = \mathcal{D}^{++} \Lambda + [\Lambda, \widehat{V}^{++}], \quad (3.11)$$

построенное из двух других суперполей. С помощью замены $V^{++} \rightarrow \widehat{V}^{++}$ мы можем на основе действия S_1 построить альтернативное действие на двух независимых препотенциалах

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{ik}{12\pi} \int d\mu^{(-4)} \text{Tr}(V^{+j} \mathcal{D}^{++} V_j^+ - (\widehat{V}^{++})^2) = \\ &= \frac{ik}{12\pi} \int d\mu^{(-4)} \text{Tr}(V^{+j} \mathcal{D}^{++} V_j^+ - (\mathcal{D}^{+j} V_j^+ + V^{+j} V_j^+)^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Это действие соответствует уравнению движения с гармоническими производными второго порядка

$$\widehat{F}_k^{(+3)} = \mathcal{D}^{++}V_k^+ - \mathcal{D}_k^+\widehat{V}^{++} + [\widehat{V}^{++}, V_k^+] = 0, \quad (3.13)$$

которое эквивалентно уравнениям (3.8).

3.2. Суперконформная инвариантность действия. Суперконформные SC_3^5 -преобразования аналитических координат и гармонических производных рассмотрены в приложении. Использование этих преобразований позволяет, в частности, проверить суперконформную инвариантность меры интегрирования $d\mu^{(-4)}$ в аналитическом $SO(5)/U(2)$ -суперпространстве (П.16).

Суперконформные SC_3^5 -преобразования ковариантных гармонических производных определяются по аналогии с формулами (П.18):

$$\delta_{sc}\nabla^{+k} = -\lambda^{+l}\mathcal{D}_l^k, \quad \delta_{sc}\nabla^{++} = \lambda^{++}\mathcal{D}_k^k - \lambda_l^+\nabla^{+l}, \quad (3.14)$$

где λ_k^+ , λ^{++} – суперполевые параметры (П.13). Соответствующие преобразования аналитических препотенциалов имеют вид

$$\delta_{sc}V^{+k} = 0, \quad \delta_{sc}V^{++} = -\lambda_k^+V^{+k}. \quad (3.15)$$

Аналитические суперполевые напряженности (3.6) преобразуются ковариантно в суперконформной группе:

$$\delta_{sc}F^{(+3)k} = \lambda^{+k}F^{++}, \quad \delta_{sc}F^{++} = 0. \quad (3.16)$$

Действие теории (3.10) инвариантно относительно SC_3^5 -преобразований:

$$\delta_{sc}S'_1 = \frac{ik}{12\pi} \int d\mu^{(-4)} \text{Tr}(V^{+k}\lambda_k^+F^{++} - \lambda_k^+V^{+k}F^{++} - \lambda_l^+V^{+l}V^{+k}V_k^+) = 0, \quad (3.17)$$

где использовано тождество

$$\text{Tr}(V^{+l}V^{+k}V_k^+) = if_{ABC}V_A^{+l}V_B^{+k}V_{kC}^+ = 0.$$

На аналитических $N = 5$ суперполях можно определить преобразование шестой суперсимметрии

$$\delta_6V^{++} = \epsilon_6^\alpha D_\alpha^0V^{++}, \quad \delta_6V^{+k} = \epsilon_6^\alpha D_\alpha^0V^{+k}, \quad (3.18)$$

$$\delta_6\mathcal{D}^{+k}V^{+l} = \epsilon_6^\alpha D_\alpha^0\mathcal{D}^{+k}V^{+l}, \quad \delta_6\mathcal{D}^{++}V^{+l} = \epsilon_6^\alpha D_\alpha^0\mathcal{D}^{++}V^{+l}, \quad (3.19)$$

где ϵ_6^α – соответствующие нечетные параметры. Это преобразование сохраняет грасманову аналитичность и $U(2)$ -ковариантность:

$$\{D_\alpha^0, D_\beta^{+k}\} = 0, \quad [\mathcal{D}_l^k, D_\alpha^0] = 0, \quad [\mathcal{D}^{+k}, D_\alpha^0] = D_\alpha^{+k}, \quad [\mathcal{D}^{++}, D_\alpha^0] = 0. \quad (3.20)$$

Действие теории инвариантно относительно этой шестой суперсимметрии:

$$\delta_6S'_1 = \int d\mu^{(-4)} \epsilon_6^\alpha D_\alpha^0L^{(+4)} = 0. \quad (3.21)$$

Таким образом, мы можем говорить о $N = 6$ теории Черна–Саймонса в $N = 5$ суперпространстве.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПОНЕНТНОЙ СТРУКТУРЫ ДЕЙСТВИЯ

Гармоническое разложение суперполевого калибровочного параметра в группе $U(1)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \Lambda_0 + \Lambda_1 + O(U^2), & \mathcal{D}_k^i \Lambda &= 0, \\ \Lambda_0 &= ia + \theta^{0\alpha} \beta_\alpha + (\theta^0)^2 d, \\ \Lambda_1 &= ia_b U_b^0 + \theta^{0\alpha} U_b^0 \beta_\alpha^b + \theta^{+k\alpha} U_{kb}^- \rho_\alpha^b + (\theta^0)^2 U_a^0 d^a + (\theta^{+k} \theta^0) U_{kb}^- f^b + \\ &\quad + (\theta^{+k} \gamma^m \theta^0) U_{kb}^- g_m^b + i(\theta^0)^2 \theta^{+k\alpha} U_{kb}^- \pi_\alpha^b,\end{aligned}\tag{4.1}$$

где все локальные параметры $a(y), a^b(y), \beta_\alpha(y), \beta_\alpha^b(y), \dots$ выбраны вещественными, чтобы обеспечить выполнение условия $\Lambda^\sim = -\Lambda$. В группе $SU(n)$ соответствующие локальные параметры будут эрмитовыми матрицами с нулевым следом. В любом порядке p разложения по гармоникам мы используем также условия $U(2)$ -инвариантности $\mathcal{D}_l^k \Lambda_p = 0$. Локальные параметры в Λ_0 $SO(5)$ -инвариантны, а Λ_p содержат параметры с тензорными $SO(5)$ -индексами.

Мы будем исследовать компонентное разложение действия S_2 , зависящего только от двух препотенциалов V^{+k} . В произвольной калибровке эти суперполя можно разложить по степеням гармоник

$$V^{+k} = V_0^{+k} + V_1^{+k} + O(U^2),\tag{4.2}$$

где каждый член разлагается по грассмановым координатам $\theta^{0\alpha}, \theta^{+k\alpha}$ и соответствующим степеням гармоник с учетом условий $U(2)$ -ковариантности $\mathcal{D}_j^i V^{+k} = \delta_j^i V^{+k}$. Отсутствующие члены содержат бесконечное число полей с тензорными индексами группы $SO(5)$. Отметим, что преобразования $N = 5$ суперсимметрии связывают между собой гармонические члены V_p^{+k} с различными степенями гармоник. Суперсимметричную WZ-калибровку каждого гармонического члена в разложении V^{+k} можно получить с учетом преобразований $\delta V_p^{+k} = \mathcal{D}^{+k} \Lambda_p$, например преобразование

$$\delta V_0^{+k} = \mathcal{D}^{+k} \Lambda_0 = \theta^{+k\alpha} \beta_\alpha + (\theta^{+k} \gamma^m \theta^0) \partial_m a + \frac{i}{2} \theta^{+k\gamma} (\theta^0)^2 \partial_{\gamma\alpha} \beta^\alpha + 2(\theta^{+k} \theta^0) d\tag{4.3}$$

приводит к выбору калибровки

$$V_0^{+k} = (\theta^{+k} \gamma^m \theta^0) A_m + i(\theta^0)^2 \theta^{+k\alpha} \psi_\alpha.\tag{4.4}$$

WZ-калибровка линейного по гармоникам члена содержит поля с векторным $SO(5)$ -индексом

$$\begin{aligned}V_1^{+k} &= (\theta^0)^2 U_a^{+k} B_a + (\theta^{+l} \gamma^m \theta_l^+) U_a^{-k} C_m^a + \\ &\quad + i\theta^{+l(\alpha} \theta_l^{+\beta} \theta^{0\gamma)} U_a^{-k} \Psi_{(\alpha\beta\gamma)}^a + i\theta^{+l\alpha} \theta_l^{+\beta} \theta_\beta^0 U_a^{-k} \xi_\alpha^a + i\theta^{+k\beta} \theta_\beta^{+l} \theta^{0\alpha} U_{la}^- \lambda_\alpha^a + \\ &\quad + i(\theta^{+k} \theta^{+l}) (\theta^0)^2 U_{la}^- R_a + i(\theta^{+l} \gamma^m \theta_l^+) (\theta^0)^2 U_a^{-k} G_m^a.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Отметим, что в этом разложении появилось фермионное поле $\Psi_{(\alpha\beta\gamma)}^a$ с тремя спинорными индексами.

В нулевом порядке по гармоникам суперполевое действие (3.12) содержит член

$$S_0 = \frac{ik}{12\pi} \int d\mu^{(-4)} \text{Tr}(V_0^{+j} \mathcal{D}^{++} V_{0j}^+ - (\mathcal{D}^{+j} V_{0j}^+ + V_0^{+j} V_{0j}^+)^2), \quad (4.6)$$

где выбрана калибровка (4.4). Соответствующий компонентный лагранжиан получается интегрированием по гармоникам и спинорным координатам

$$L_0 = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \varepsilon^{mnr} \text{Tr} \left(A_m \left(\partial_n A_r + \frac{i}{3} [A_n, A_r] \right) + i\psi^\alpha \psi_\alpha \right). \quad (4.7)$$

В дополнение к стандартному члену Черна–Саймонса этот лагранжиан содержит билинейное взаимодействие вспомогательного фермионного поля.

Билинейные и трилинейные члены взаимодействия вспомогательных полей с произвольным числом $SO(5)$ -индексов также могут быть получены из суперполевого действия (3.12) в WZ-калибровке, хотя эти вычисления достаточно громоздки. На массовой поверхности все вспомогательные поля равны нулю, а калибровочное поле A_m имеет нулевую напряженность.

5. АЛЬТЕРНАТИВНОЕ СУПЕРПОЛЕВОЕ ДЕЙСТВИЕ $N = 5$ ТЕОРИИ

В трехмерных суперсимметриях с $N = 1, 2, 3$ немассовые векторные мультиплеты могут использоваться одновременно для построения действий суперсимметричных теорий Черна–Саймонса и Янга–Миллса. Размерная редукция $D = 4$, $N = 3$ суперполевой калибровочной теории [21] в трехмерное пространство порождает соответствующую суперсимметричную $D = 3$, $N = 6$ теорию Янга–Миллса SYM_3^6 с группой автоморфизмов $U(3)$, которая нарушает суперконформную инвариантность. Уравнения движения этой теории обладают дополнительной суперсимметрией [27]. После исключения бесконечного числа вспомогательных полей в SYM_3^6 -теории остаются трехмерное векторное поле, семь скалярных полей и восемь двухкомпонентных спинорных полей, которые образуют мультиплет физических полей $D = 3$, $N = 8$ суперсимметрии. Мы не знаем, как построить действие Черна–Саймонса на гармонических суперполях SYM_3^6 -теории.

Рассмотрим абелево калибровочное суперполе в $D = 3$, $N = 5$ суперсимметрии

$$\delta_\Lambda V^{+i} = \mathcal{D}^{+i} \Lambda. \quad (5.1)$$

Кроме абелевого действия Черна–Саймонса (3.12) мы можем также построить альтернативное суперполевое действие калибровочного $U(1)$ -суперполя

$$S_E = \frac{1}{12g^2} \int d\mu^{(-4)} (D^{0\alpha} D_\alpha^0 V^{+k}) (\mathcal{D}^{++} V_k^+ - \mathcal{D}_k^+ \mathcal{D}^{+l} V_l^+), \quad (5.2)$$

где g – константа связи размерности $1/2$. Это действие инвариантно относительно калибровочных преобразований (5.1):

$$\delta_\Lambda S_E \sim \int d\mu^{(-4)} (D^{0\alpha} D_\alpha^0 \mathcal{D}^{+k} \Lambda) (\mathcal{D}^{++} V_k^+ - \mathcal{D}_k^+ \mathcal{D}^{+l} V_l^+) = 0, \quad (5.3)$$

где использованы соотношения $D^{0\alpha} D_\alpha^0 \mathcal{D}^{+k} \Lambda = \mathcal{D}^{+k} D^{0\alpha} D_\alpha^0 \Lambda$, $\mathcal{D}^{++} = \mathcal{D}^{+k} \mathcal{D}_k^+$ и интегрирование по частям. Взаимодействие S_E не обладает дополнительной шестой суперсимметрией (3.19), а также нарушает конформную инвариантность.

В компонентах действия (5.2) содержится лагранжиан трехмерной электродинамики, а также кинетический член фермионного поля ψ^α . В секторе $SO(5)$ -векторных полей (4.5) действие S_E порождает билинейные члены взаимодействия бозонных и фермионных полей. По сравнению с суперсимметричными $N = 1, 2, 4, 6$ обобщениями электродинамики действие (5.2) содержит необычное взаимодействие поля $\Psi_a^{\alpha\beta\gamma}$ спиральности $3/2$. В отличие от моделей супергравитации, здесь это поле появляется без дополнительной локальной суперсимметрии. Уравнение движения для действия S_E имеет нетривиальные решения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках $D = 3$, $N = 5$ суперсимметрии мы использовали гармонические координаты, описывающие $SO(5)/U(2)$ -пространство. Детально исследована геометрия калибровочной теории в аналитическом $SO(5)/U(2)$ -суперпространстве, основанная на грассмановой аналитичности и $U(2)$ -ковариантности калибровочных суперполей. Калибровочные преобразования суперполевых препотенциалов теории сохраняют CR-структуру спинорных и гармонических ковариантных производных по аналогии с другими примерами калибровочных теорий в гармонических суперпространствах. Построены эквивалентные представления суперполевого действия калибровочной теории с тремя или двумя независимыми суперполями. Показано, что эти суперполевые действия инвариантны относительно $N = 5$ конформной суперсимметрии и дополнительной шестой суперсимметрии. Исследована суперсимметричная WZ-калибровка суперполевых препотенциалов теории, в которой определено бесконечное число полевых компонент, включая векторное калибровочное поле, а также вспомогательные бозонные и фермионные поля. Суперполевые уравнения движения теории имеют только чисто калибровочное решение. Компонентные уравнения движения дают тривиальные (нулевые) решения для напряженности векторного поля и всех остальных вспомогательных полей в супермультиплете Черна–Саймонса. Суперполевая формулировка может быть полезна при изучении квантовых свойств $N = 6$ теории Черна–Саймонса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Суперконформные преобразования

П.1. Суперконформные СВ-преобразования. Мы используем вещественное симметричное представление $D = 3$ гамма-матриц

$$\begin{aligned} (\gamma_m)^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\alpha\rho} (\gamma_m)_\rho^\beta = (\gamma_m)^{\beta\alpha}, & (\gamma^m)_{\alpha\beta} (\gamma_m)^{\rho\gamma} &= \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\gamma + \delta_\beta^\rho \delta_\alpha^\gamma, \\ (\gamma_m \gamma_n)_\alpha^\beta &= (\gamma_m)_\alpha^\rho (\gamma_n)_\rho^\beta = -(\gamma_m)_{\alpha\rho} (\gamma_n)^{\rho\beta} = -\eta_{mn} \delta_\alpha^\beta + \varepsilon_{mnp} (\gamma^p)_\alpha^\beta, & (\text{П.1}) \\ (\gamma_m \gamma_n \gamma_r)_\alpha^\beta &= -\varepsilon_{mnr} \delta_\alpha^\beta - \eta_{mn} (\gamma_r)_\alpha^\beta - \eta_{nr} (\gamma_m)_\alpha^\beta + \eta_{mr} (\gamma_n)_\alpha^\beta, \end{aligned}$$

где $\eta_{mn} = \text{diag}(1, -1, -1)$ – метрика Минковского, ε_{mnp} – антисимметричный символ в трехмерном пространстве. Спинорные $SL(2, R)$ -индексы опускаются и поднимаются с помощью антисимметричного символа

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (\text{П.2})$$

В работе используются следующие обозначения для скалярных и векторных комбинаций двух спиноров:

$$(\psi\xi) = \psi^\alpha \xi_\alpha, \quad (\psi\gamma_m \xi) = \psi^\alpha (\gamma_m)_{\alpha\beta} \xi^\beta. \quad (\text{П.3})$$

Справедливо биспинорное представление трехмерных координат и производных

$$x^{\alpha\beta} = (\gamma_m)^{\alpha\beta} x^m, \quad \partial_{\alpha\beta} = (\gamma^m)_{\alpha\beta} \partial_m \quad (\text{П.4})$$

и соответствующие выражения для $N = 5$ спинорных производных

$$D_{a\alpha} = \partial_{a\alpha} + i\theta_a^\beta \partial_{\alpha\beta}, \quad \partial_{a\alpha} \theta_b^\beta = \delta_{ab} \delta_\alpha^\beta. \quad (\text{П.5})$$

В полном суперпространстве с СВ-координатами $z = (x^m, \theta_a^\alpha)$ определены следующие $N = 5$ суперконформные преобразования (SC_3^5 -преобразования):

$$\begin{aligned} \delta_{sc} x^{\alpha\beta} &= c^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} a_\gamma^\alpha x^{\gamma\beta} + \frac{1}{2} a_\gamma^\beta x^{\alpha\gamma} + l x^{\alpha\beta} - i\epsilon_b^\alpha \theta_b^\beta - i\epsilon_b^\beta \theta_b^\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} x^{\alpha\gamma} k_{\gamma\rho} x^{\rho\beta} - \frac{1}{2} \theta_a^\alpha \theta_a^\gamma \theta_b^\rho \theta_b^\beta k_{\gamma\rho} - \\ &- \frac{i}{2} \eta_{a\gamma} \theta_a^\alpha x^{\gamma\beta} - \frac{i}{2} \eta_{a\gamma} \theta_a^\beta x^{\gamma\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{a\rho} \theta_a^\alpha \theta_b^\rho \theta_b^\beta + \frac{1}{2} \eta_{a\rho} \theta_a^\beta \theta_b^\rho \theta_b^\alpha, \\ \delta_{sc} \theta_a^\alpha &= \frac{1}{2} a_\beta^\alpha \theta_a^\beta + \frac{1}{2} l \theta_a^\alpha - \omega_{ab} \theta_b^\alpha + \frac{1}{2} x^{\alpha\beta} \theta_a^\gamma k_{\beta\gamma} + \frac{i}{2} \theta_b^\alpha \theta_b^\beta \theta_a^\gamma k_{\beta\gamma} + \epsilon_a^\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} x^{\alpha\beta} \eta_{a\beta} - i\theta_b^\alpha \theta_a^\gamma \eta_{b\gamma} + \frac{i}{2} \theta_b^\alpha \theta_b^\beta \eta_{a\beta}, \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

где $c^{\alpha\beta} = c^m (\gamma_m)^{\alpha\beta}$, $k^{\alpha\beta} = k^m (\gamma_m)^{\alpha\beta}$, $a_\alpha^\beta = a^m (\gamma_m)_{\alpha}^\beta$ и l – параметры $D = 3$ конформной группы, ω_{ab} – $SO(5)$ -параметры, а грассмановы параметры ϵ_a^α и η_a^α соответствуют преобразованиям Q -суперсимметрии и S -суперсимметрии.

Генераторы $N = 5$ суперконформной группы SC_3^5 в СВ-представлении имеют вид

$$\begin{aligned} P_m &= \partial_m, \quad Q_\alpha^a = \partial_\alpha^a - i\theta_a^{\alpha\beta} (\gamma^m)_{\alpha\beta} \partial_m, \quad T_{ab} = \theta_b^\alpha \partial_{a\alpha} - \theta_a^\alpha \partial_{b\alpha}, \\ L_m &= \varepsilon_{mnp} x^p \partial^n + \frac{1}{2} \theta_a^\alpha (\gamma_m)_{\alpha}^\beta \partial_\beta^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{mnp} L^{np}, \quad D = x^m \partial_m + \frac{1}{2} \theta_a^\alpha \partial_\alpha^a, \\ K_m &= x_m x^n \partial_n - \frac{1}{2} x^2 \partial_m - \frac{1}{4} (\theta_a \gamma_m \theta_b) (\theta_a \gamma^n \theta_b) \partial_n + \\ &+ \frac{1}{2} x_m \theta_a^\alpha \partial_\alpha^a - \frac{1}{2} x^n \varepsilon_{mnp} (\gamma^p)_{\gamma}^\alpha \theta_a^\gamma \partial_\alpha^a + \frac{i}{2} (\theta_b \gamma_m \theta_a) \theta_b^\alpha \partial_\alpha^a, \\ S_\alpha^a &= \frac{i}{2} \theta_{a\alpha} x^m \partial_m - \frac{i}{2} \theta_a^\beta \varepsilon^{mnp} (\gamma_p)_{\beta\alpha} x_n \partial_m + \frac{1}{2} \theta_{b\alpha} \theta_a^\beta (\gamma^m)_{\beta\gamma} \theta_b^\rho \partial_m - \\ &- \frac{1}{2} x^m (\gamma_m)_{\alpha}^\beta \partial_{a\beta} - i\theta_{b\alpha} \theta_a^\beta \partial_{a\beta} + \frac{i}{2} \theta_{b\alpha} \theta_b^\beta \partial_{a\beta}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Локальные (активные) преобразования суперполей определяются этими генераторами:

$$\bar{\delta}_{\text{sc}}\Phi = \delta_{\text{sc}}\Phi - \left(c^m P_m + a^m L_m + \frac{1}{2}\omega_{ab}T_{ab} + k^m K_m + lD + \epsilon_a^\alpha Q_{\alpha\alpha} + \eta_a^\alpha S_{\alpha\alpha} \right)\Phi, \quad (\text{П.8})$$

где $\delta_{\text{sc}}\Phi$ – координатные (пассивные) суперконформные преобразования.

Нетрудно получить (анти)коммутиационные соотношения супералгебры Ли SC_3^5 :

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \varepsilon_{mnp}L^p, & [L_m, P_n] &= \varepsilon_{mnp}P^p, & [L_m, K_n] &= \varepsilon_{mnp}K^p, \\ [L_m, D] &= 0, & [L_m, Q_\alpha^a] &= -\frac{1}{2}(\gamma_m)^\beta_\alpha Q_\beta^a, & [L_m, S_\alpha^a] &= -\frac{1}{2}(\gamma_m)^\beta_\alpha S_\beta^a, \\ [P_m, Q_\alpha^a] &= 0, & [P_m, D] &= P_m, & [P_m, K_n] &= \varepsilon_{mnp}L^p + \eta_{mn}D, \\ [P_m, S_\alpha^a] &= -\frac{1}{2}(\gamma_m)^\beta_\alpha Q_\beta^a, & [Q_\alpha^a, D] &= \frac{1}{2}Q_\alpha^a, & [K_m, Q_\alpha^a] &= \frac{1}{2}(\gamma_m)_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}, \\ \{Q_{a\alpha}, S_{b\beta}\} &= -\frac{i}{2}\delta_{ab}(\gamma_m)_{\alpha\beta}L_m - i\delta_{ab}\varepsilon_{\alpha\beta}D - i\varepsilon_{\alpha\beta}T_{ab}, \\ \{Q_\alpha^a, Q_\beta^b\} &= -2i\delta^{ab}(\gamma^m)_{\alpha\beta}P_m, & \{S_\alpha^a, S_\beta^b\} &= -i\delta^{ab}(\gamma^m)_{\alpha\beta}K_m, & [S_\alpha^a, K_m] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

П.2. SC_3^5 -преобразования в аналитических координатах. Суперконформные $N = 5$ преобразования аналитических координат имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_{\text{sc}}x_A^{\alpha\beta} &= \delta_{\text{sc}}y^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta} + L_\gamma^\alpha y^{\gamma\beta} + L_\gamma^\beta y^{\alpha\gamma} + \frac{1}{2}y^{\alpha\gamma}k_{\gamma\rho}y^{\beta\rho} + 2ly^{\alpha\beta} + \\ &+ i\omega_{ab}U_a^0U_{kb}^-\theta^{+k\alpha}\theta^{0\beta} + i\omega_{ab}U_a^0U_{kb}^-\theta^{+k\beta}\theta^{0\alpha} - i\epsilon^{0\alpha}\theta^{0\beta} - \\ &- i\epsilon^{0\beta}\theta^{0\alpha} - 2i\epsilon_k^{-\alpha}\theta^{+k\beta} - 2i\epsilon_k^{-\beta}\theta^{+k\alpha} + \frac{i}{2}y^{\alpha\gamma}\theta^{0\beta}\eta_\gamma^0 + \\ &+ \frac{i}{2}y^{\beta\gamma}\theta^{0\alpha}\eta_\gamma^0 + iy^{\alpha\gamma}\theta^{+k\beta}\eta_{k\gamma}^- + iy^{\beta\gamma}\theta^{+k\alpha}\eta_{k\gamma}^-, \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{sc}}\theta^{0\alpha} &= \frac{1}{2}a_\beta^\alpha\theta^{0\beta} + l\theta^{0\alpha} + \frac{1}{2}y^{\alpha\beta}\theta^{0\gamma}k_{\beta\gamma} - \omega_{ab}U_a^0U_{kb}^-\theta^{+k\alpha} + \\ &+ \epsilon^{0\alpha} + \frac{1}{2}y^{\alpha\beta}\eta_\beta^0 + \frac{i}{4}(\theta^0)^2\eta^{0\alpha} - i\theta^{+k\alpha}\theta^{0\beta}\eta_{k\beta}^-, \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{sc}}\theta^{+k\alpha} &= \frac{1}{2}a_\beta^\alpha\theta^{+k\beta} + l\theta^{+k\alpha} + \frac{1}{2}y^{\alpha\beta}\theta^{+k\gamma}k_{\beta\gamma} + \frac{i}{4}(\theta^0)^2\theta^{+k\beta}k_\beta^\alpha - \\ &- \omega_{ab}U_a^{+k}U_{lb}^-\theta^{+l\alpha} + \epsilon^{+k\alpha} + \frac{1}{2}y^{\alpha\beta}\eta_\beta^{+k} - \\ &- i\theta^{+l\alpha}\theta^{+k\beta}\eta_{l\beta}^- + \frac{i}{2}\eta_l^{-\alpha}(\theta^{+k}\theta^{+l}) + \frac{i}{4}(\theta^0)^2\eta^{+k\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

где введены следующие обозначения:

$$\epsilon^{0\alpha} = U_a^0\epsilon_a^\alpha, \quad \epsilon_k^{\pm\alpha} = U_{ka}^\pm\epsilon_a^\alpha, \quad \eta^{0\alpha} = U_a^0\eta_a^\alpha, \quad \eta_k^{\pm\alpha} = U_{ka}^\pm\eta_a^\alpha.$$

Запишем также суперконформные преобразования гармоник

$$\delta_{\text{sc}} U_a^{+k} = \lambda^{+k} U_a^0 - \lambda^{++} U_a^{-k}, \quad \delta_{\text{sc}} U_a^0 = -\lambda^{+k} U_{ka}^-, \quad \delta_{\text{sc}} U_a^{-k} = 0, \\ \lambda^{+k} = i k_{\alpha\beta} \theta^{+k\alpha} \theta^{0\beta} + U_a^{+k} U_b^0 \omega_{ab} + i(\theta^{+k\alpha} U_a^0 - \theta^{0\alpha} U_a^{+k}) \eta_{a\alpha}, \quad (\text{П.13})$$

$$\lambda^{++} = \frac{i}{2} k_{\alpha\beta} (\theta^{+l\alpha} \theta_l^{+\beta}) + \frac{1}{2} U_a^{+k} U_{kb}^+ \omega_{ab} + i \theta^{+k\alpha} U_{ka}^+ \eta_{a\alpha} = \frac{1}{2} \mathcal{D}_k^+ \lambda^{+k}, \\ \mathcal{D}^{+i} \lambda^{+k} = \varepsilon^{ik} \lambda^{++}, \quad \mathcal{D}^{+i} \lambda^{++} = 0, \quad \mathcal{D}_l^i \lambda^{+k} = \delta_l^k \lambda^{+i}, \quad \mathcal{D}_l^i \lambda^{++} = \delta_l^i \lambda^{++}. \quad (\text{П.14})$$

Нетрудно получить выражения для генераторов SC_3^5 в аналитическом суперпространстве, например генератор специальных конформных преобразований имеет вид

$$K_m^A = y_m y^n \partial_n - \frac{1}{2} y^2 \partial_m + \frac{1}{2} y^n \theta^{0\beta} (\gamma_m)_{\beta\rho} (\gamma_n)^{\rho\alpha} \partial_\alpha^0 + \frac{1}{2} y^n \theta^{+k\beta} (\gamma_m)_{\beta\rho} (\gamma_n)^{\rho\alpha} \partial_{k\alpha}^- + \\ + \frac{i}{4} (\theta^0)^2 \theta^{+k\beta} (\gamma_m)_\beta^\alpha \partial_{k\alpha}^- - i(\theta^{+k} \gamma_m \theta^0) \partial_k^- + \frac{i}{2} (\theta^{+l} \gamma_m \theta_l^+) \partial^{--}. \quad (\text{П.15})$$

П.3. SC_3^5 -преобразования аналитической меры. Аналитическая мера интегрирования (2.21) инвариантна относительно преобразований SC_3^5 :

$$\delta_{\text{sc}} d\mu^{-4} = d\mu^{-4} \left(\partial_m \delta_{\text{sc}} y^m + \frac{\partial}{\partial U_a^0} \delta_{\text{sc}} U_a^0 + \frac{\partial}{\partial U_a^{+k}} \delta_{\text{sc}} U_a^{+k} - \partial_\alpha^0 \delta_{\text{sc}} \theta^{0\alpha} - \partial_{k\alpha}^- \delta_{\text{sc}} \theta^{+k\alpha} \right) = 0. \quad (\text{П.16})$$

Здесь использованы формулы

$$\partial_m \delta_{\text{sc}} y^m = 3k_m y^m + 6l + \frac{3i}{2} \theta^{0\alpha} \eta_\alpha^0 + 3i \theta^{+k\alpha} \eta_{k\alpha}^-, \\ \frac{\partial}{\partial U_a^0} \delta_{\text{sc}} U_a^0 + \frac{\partial}{\partial U_a^{+k}} \delta_{\text{sc}} U_a^{+k} = -2\omega_{ab} U_a^{+k} U_{kb}^- - 2i \theta^{0\alpha} \eta_\alpha^0 - 2i \theta^{+k\alpha} \eta_{k\alpha}^-, \quad (\text{П.17}) \\ -\partial_\alpha^0 \delta_{\text{sc}} \theta^{0\alpha} - \partial_{k\alpha}^- \delta_{\text{sc}} \theta^{+k\alpha} = -6l - 3y^m k_m + 2\omega_{ab} U_a^{+k} U_{kb}^- + \frac{i}{2} \theta^{0\alpha} \eta_\alpha^0 - i \theta^{+k\alpha} \eta_{k\alpha}^-,$$

полученные дифференцированием инфинитезимальных преобразований аналитических координат.

П.4. SC_3^5 -преобразования гармонических производных. Суперконформные преобразования гармонических производных порождаются SC_3^5 -преобразованиями аналитических координат

$$\delta_{\text{sc}} \mathcal{D}^{+k} = -\lambda^{+l} \mathcal{D}_l^k, \quad \delta_{\text{sc}} \mathcal{D}^{++} = \lambda^{++} \mathcal{D}_k^k - \lambda_l^+ \mathcal{D}^{+l}, \quad (\text{П.18})$$

$$\delta_{\text{sc}} \mathcal{D}_k^- = (\mathcal{D}_k^- \lambda^{+l}) \mathcal{D}_l^- + (\mathcal{D}_k^- \lambda^{++} - \lambda_k^+) \mathcal{D}^{--}, \\ \delta_{\text{sc}} \mathcal{D}^{--} = (\mathcal{D}^{--} \lambda^{+l}) \mathcal{D}_l^- + (\mathcal{D}^{--} \lambda^{++}) \mathcal{D}^{--}, \quad \delta_{\text{sc}} \mathcal{D}_l^k = 0, \quad (\text{П.19})$$

где суперполевые параметры $\lambda^{+l}, \lambda^{++}$ определены в преобразованиях (П.13).

П.5. Алгебра спинорных координат. Мы рассматриваем следующие независимые комбинации грассмановых координат $\theta^{+k\alpha}$:

$$\begin{aligned}(\theta^{+k}\theta^{+l}) &= \theta^{+k\alpha}\theta^{+l}_{\alpha} = (\theta^{+l}\theta^{+k}), & (\theta^{+\alpha}\theta^{+\beta}) &= \theta^{+k\alpha}\theta^{+\beta}_k = (\theta^{+\beta}\theta^{+\alpha}), \\ \Theta^{+3l\alpha} &= \frac{1}{3}(\theta^{+k}\theta^{+l})\theta^{+\alpha}_k = -\frac{1}{3}\theta^{+l}_{\beta}(\theta^{+\alpha}\theta^{+\beta}), \\ \Theta^{(+4)} &= \frac{1}{3}(\theta^{+k}\theta^{+l})(\theta^{+}_k\theta^{+}_l) = (\theta^{+1})^2(\theta^{+2})^2 = -\frac{1}{3}(\theta^{+\alpha}\theta^{+\beta})(\theta^{+}_{\alpha}\theta^{+}_{\beta}).\end{aligned}\quad (\text{П.20})$$

При введении нейтральной спинорной координаты возникают также следующие комбинации:

$$\begin{aligned}(\theta^0)^2 &= \theta^{0\alpha}\theta^0_{\alpha}, & (\theta^{+i}\theta^0) &= \theta^{+i\alpha}\theta^0_{\alpha}, & (\theta^{+i}\gamma^m\theta^0) &= -(\theta^0\gamma^m\theta^{+i}), \\ \Theta^{+i\alpha} &= (\theta^0)^2\theta^{+i\alpha}, & \Theta^{++ik\alpha} &= (\theta^{+i}\theta^{+k})\theta^{0\alpha}, \\ \Theta^{++\alpha} &= \theta^{+k\alpha}\theta^{+\beta}_k\theta^0_{\beta}, & \Theta^{++(\alpha\beta\gamma)} &= (\theta^{+(\alpha}\theta^{+\beta)}\theta^{0\gamma}),\end{aligned}\quad (\text{П.21})$$

где последняя величина полностью симметрична по спинорным индексам. Специальное сопряжение грассмановых полиномов определяется формулами (2.12):

$$\begin{aligned}(\theta^{+k}\theta^{+k})^{\sim} &= -(\theta^{+k}\theta^{+l}), & (\theta^{+\alpha}\theta^{+\beta})^{\sim} &= -(\theta^{+\alpha}\theta^{+\beta}), & [(\theta^0)^2]^{\sim} &= -(\theta^0)^2, \\ (\theta^{+i}\theta^0)^{\sim} &= -(\theta^{+i}\theta^0), & (\theta^{+i}\gamma^m\theta^0)^{\sim} &= -(\theta^{+i}\gamma^m\theta^0), & (\Theta^{(+4)})^{\sim} &= \Theta^{(+4)}, \\ (\Theta^{+i\alpha})^{\sim} &= -\Theta^{+i\alpha}, & (\Theta^{++\alpha})^{\sim} &= -\Theta^{++\alpha}, & (\Theta^{++(\alpha\beta\gamma)})^{\sim} &= \Theta^{++(\alpha\beta\gamma)}.\end{aligned}\quad (\text{П.22})$$

Благодарности. Автор выражает признательность Е. А. Иванову и П. С. Хау за интересные обсуждения. Эта работа была частично поддержана РФФИ (грант № 08-02-90490-Укр, 06-02-16684), ННИО (грант № 436 RUS 113/669-3), ИНТАС (грант № 05-10000008-7928), а также программой Гейзенберг–Ландау.

Список литературы

- [1] A. Schwarz, *Lett. Math. Phys.*, **2**:3 (1978), 247–252.
- [2] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Ann. Phys.*, **140**:2 (1982), 372–411.
- [3] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **311**:1 (1988), 46–78.
- [4] E. Witten, “Chern–Simons gauge theory as a string theory”, *The Floer Memorial Volume*, Progr. Math., **133**, Birkhäuser, Basel, 1995, 637–678; [arXiv: hep-th/9207094](#).
- [5] W. Siegel, *Nucl. Phys. B*, **156**:1 (1979), 135–143.
- [6] J. Schonfeld, *Nucl. Phys. B*, **185**:1 (1981), 157–171.
- [7] Б. М. Зупник, Д. Г. Пак, *ТМФ*, **77**:1 (1988), 97–106.
- [8] B. M. Zupnik, D. G. Pak, *Classical Quantum Gravity*, **6**:5 (1989), 723–729.
- [9] Б. М. Зупник, *ТМФ*, **89**:2 (1991), 253–262.
- [10] B. M. Zupnik, *Phys. Lett. B*, **254**:1–2 (1991), 127–131.
- [11] E. A. Ivanov, *Phys. Lett. B*, **268**:2 (1991), 203–208.
- [12] H. Nishino, S. J. Gates Jr., *Internat. J. Modern Phys.*, **8**:19 (1993), 3371–3421.
- [13] Б. М. Зупник, Д. В. Хецелиус, *ЯФ*, **47**:8 (1988), 1147–1156.
- [14] B. M. Zupnik, “Harmonic superspaces for three-dimensional theories”, *Supersymmetries and Quantum Symmetries*, Lect. Notes in Phys., **524**, eds. J. Wess, E. Ivanov, Springer, Berlin, 1999, 116–123; [arXiv: hep-th/9804167](#).
- [15] B. M. Zupnik, *Phys. Lett. B*, **183**:2 (1987), 175–176.
- [16] H.-C. Kao, K. Lee, *Phys. Rev. D*, **46**:10 (1992), 4691–4697.

- [17] H.-C. Kao, *Phys. Rev. D*, **50**:4 (1994), 2881–2892.
- [18] P. A. Grassi, G. Policastro, *Super-Chern–Simons theory as superstring theory*, [arXiv: hep-th/0412272](#).
- [19] J. H. Schwarz, *JHEP*, **11** (2004), 078; [arXiv: hep-th/0411077](#).
- [20] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, *Classical Quantum Gravity*, **1**:5 (1984), 469–498.
- [21] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, *Harmonic Superspace*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [22] B. M. Zupnik, *Nucl. Phys. B*, **554**:1–2 (1999), 365–390; **644**:1–2 (2002), 405–406, Erratum; [arXiv: hep-th/9902038](#).
- [23] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, *Classical Quantum Gravity*, **2**:2 (1985), 155–166.
- [24] P. S. Howe, M. I. Leeming, *Classical Quantum Gravity*, **11**:12 (1994), 2843–2852; [arXiv: hep-th/9408062](#).
- [25] B. M. Zupnik, *Phys. Lett. B*, **660**:3 (2008), 254–259; [arXiv: 0711.4680](#).
- [26] B. M. Zupnik, *Gauge model in $D = 3$, $N = 5$ harmonic superspace*, [arXiv: 0708.3951](#).
- [27] Б. М. Зупник, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 269–283; [arXiv: hep-th/0308204](#).

Поступила в редакцию 29.01.2008