Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров, Адельные фейнмановские амплитуды в низших порядках теории возмущений, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 1, 95–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf628>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:11:14

АДЕЛЬНЫЕ ФЕЙНМАНОВСКИЕ АМПЛИТУДЫ В НИЗШИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Сформулированы условия сходимости адельных фейнмановских амплитуд и доказано, что при достаточно больших значениях размерности пространства существует непустая область в пространстве степеней пропагаторов, в которой адельная амплитуда корректно определена. Исследуется аналитическое продолжение по степени пропагатора некоторых амплитуд φ^4 -теории в третьем и четвертом порядках теории возмущений. Показано, что эти амплитуды не могут быть продолжены во всю комплексную плоскость (при условии справедливости гипотезы Римана о нулях дзета-функции), а интересные с физической точки зрения значения степени пропагатора могут лежать на границе области аналитичности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десять лет в математической физике стали рассматриваться различные p -адические и адельные аналоги моделей теории поля и статистической физики [1–4]. Ультраметричность p -адического расстояния приводит к замечательным упрощениям, что позволяет иногда давать более глубокое и детальное описание соответствующих моделей. Существует гипотеза о том, что евклидовы и p -адические модели поля могут синтезироваться в модели на группе аделей [5, 6]. Строгий анализ адельной формулы Фройнда–Виттена для четырехточечной амплитуды Венициано был проведен в работах Владимирова [7]. К адельной гипотезе подводит также тот факт, что формальное описание скейлинг-инвариантных полей в евклидовом пространстве схоже с описанием полей в p -адическом пространстве [2]. Поэтому интересно попытаться изучить (хотя бы в первых порядках теории возмущений) фейнмановские амплитуды на группе аделей.

Напомним некоторые определения и результаты статьи [8], которые мы будем использовать.

Пусть $\mathbb{R}^d$ – d -мерное вещественное пространство с обычной евклидовой нормой $\|\cdot\|_\infty$, а Q_p^d – d -мерное p -адическое пространство с нормой

$$\|x_p\|_p = \max_{i=1,\dots,d} \|x_p^i\|_p, \quad x_p = (x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(d)}) \in Q_p^d, \quad p = 2, 3, \dots,$$

*Казанский государственный университет, Казань, Россия. E-mail: Moukadas.Missarov@ksu.ru

где $\|\cdot\|_p$ в правой части равенства обозначает p -адическую норму на Q_p , компоненты вектора x_p являются p -адическими числами. Пусть $Z_p^d = \{x_p \in Q_p^d : \|x_p\|_p \leq 1\}$.

Будем называть d -мерной группой аделей A^d ограниченное прямое произведение аддитивных групп $\mathbb{R}^d$, Q_p^d , $p = 2, 3, 5, \dots$, по отношению к аддитивным группам Z_p^d , $p = 2, 3, 5, \dots$. Другими словами, A^d есть множество всех последовательностей вида $x = (x_\infty, x_2, x_3, \dots, x_p, \dots)$, где $x_\infty \in \mathbb{R}^d$, $x_p \in Q_p^d$, $p = 2, 3, 5, \dots$, и $x_p \in Z_p^d$ для всех p , кроме конечного их числа. Множество таких последовательностей образует группу относительно покомпонентного сложения. Последовательность аделей $x^{(n)} = (x_\infty^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}, \dots)$ сходится к аделю $x = (x_\infty, x_2, \dots, x_p, \dots)$, если она сходится к x покомпонентно и существует такое N , что $x_p - x_p^{(n)} \in Z_p^d$ при $n \geq N$. Полученная топологическая группа A^d локально-компактна.

Одномерную группу аделей A^1 называют еще кольцом аделей, поскольку в этом случае существует операция покомпонентного умножения аделей. Аддитивную группу этого кольца называют группой аделей.

Группа A^d обладает инвариантной мерой, которую мы обозначим dx . Нормируем эту меру условием $\text{mes } \Omega^d = 1$, где

$$\Omega^d = \{x \in A^d : 0 \leq x_\infty^1 < 1, \dots, 0 \leq x_\infty^d < 1, \|x_p\|_p \leq 1, p = 2, 3, 5, \dots\}.$$

Пространство Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ задает пространство основных функций на $\mathbb{R}^d$. Пространства $D(Q_p^d)$ (пространства комплекснозначных локально-постоянных функций с соответствующей топологией сходимости [3, 9]), $p = 2, 3, \dots$, являются пространствами основных функций на Q_p^d .

Напомним определение пространства основных функций на группе аделей A^d [9]. Назовем элементарной функцией $h(x)$, $x \in A^d$, функцию, представимую в виде бесконечного произведения

$$h(x) = h_\infty(x_\infty) h_2(x_2) \dots h_p(x_p) \dots, \quad (1)$$

где $h_\infty \in S(\mathbb{R}^d)$, $h_p(x_p) \in D(Q_p^d)$, $p = 2, 3, 5, \dots$, и $h_p(x_p) = \chi_p(x_p)$ для всех p , кроме конечного их числа. Здесь $\chi_p(x_p)$ — характеристическая функция шара Z_p^d . Пространство основных функций $S(A^d)$ на A^d , называемое пространством Шварца–Брюа, определяется как пространство всех конечных линейных комбинаций элементарных функций. Последовательность основных функций $h_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если существует такое представление

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^m h_{k,\infty}^{(n)} h_{k,2}^{(n)} \dots h_{k,p}^{(n)} \dots,$$

где m не зависит от n , и существует такое N , что $h_{k,p}^{(n)} = \chi_p$ для всех $p > N$ и всех n и $h_{k,\infty}^{(n)} \rightarrow 0$ в топологии $S(\mathbb{R}^d)$, $h_{k,p}^{(n)} \rightarrow 0$ в топологии $D(Q_p^d)$ для $p \leq N$.

Определим модуль аделя $x \in A^d$ как

$$|x| = \|x_\infty\|_\infty \prod_{p=2,3,\dots} \|x_p\|_p.$$

Как легко следует из леммы Бореля–Кантелли, модуль $|x|$ определен для почти всех $x \in A^d$ при $d > 1$ [8].

Чтобы избежать трудностей, связанных с определением модуля в одномерном случае, в работах [10, 11] было введено семейство обобщенных функций на пространстве Шварца–Брюа $S(A^d)$

$$g(x; \alpha, d) = c(\alpha; d)|x|^\alpha,$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ и

$$\begin{aligned} c(\alpha; d) &= c_\infty(\alpha; d) \prod_p c_p(\alpha; d), \\ (c_p(\alpha; d))^{-1} &= \int_{\|x_p\|_p \leq 1} dx_p = \frac{1 - p^{-d}}{1 - p^{-(\alpha+d)}}, \\ c_\infty(\alpha; d) &= \frac{\pi^{-d/2} \Gamma(d/2)}{\pi^{(\alpha+d)/2} \Gamma((\alpha+d)/2)}, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера. Заметим, что

$$c(\alpha; d) = \frac{\pi^{-d/2} \Gamma(d/2) \prod_p (1 - p^{-d})^{-1}}{\pi^{-(\alpha+d)/2} \Gamma((\alpha+d)/2) \prod_p (1 - p^{-(\alpha+d)})^{-1}} = \frac{\pi^{d/2} \Gamma(d/2) \zeta(d)}{\pi^{(\alpha+d)/2} \Gamma((\alpha+d)/2) \zeta(\alpha+d)},$$

где $\zeta(d)$ – дзета-функция Римана.

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} \zeta_p(s) &= \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad p = 2, 3, 5, \dots, \\ \zeta_\infty(s) &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \\ \Lambda(s) &= \zeta_\infty(s) \prod_p \zeta_p(s) \end{aligned}$$

(в статье [8] использовались другие обозначения). Символ $\prod_p \zeta_p$ обозначает бесконечное произведение ζ_p по всем простым p , символ $\prod_{p=2}^\infty \zeta_p$ – произведение

$$\prod_{p=2}^\infty \zeta_p = \zeta_\infty \prod_p \zeta_p.$$

Действие обобщенной функции $g(a; \alpha, d)$ на элементарную функцию $h = \prod_{p=2}^\infty h_p$ определим как

$$(g(a; \alpha, d), h(a)) = \prod_{p=2}^\infty \frac{\zeta_p(d)}{\zeta_p(\alpha+d)} \int_{Q_p^d} \|x_p\|_p^\alpha h_p(x_p) dx_p, \quad (2)$$

где $Q_\infty^d \equiv \mathbb{R}^d$. Начиная с некоторого p

$$h_p(x_p) = \chi_p(x_p), \quad \int_{\|x_p\| \leq 1} \|x_p\|_p^\alpha dx_p = \frac{\zeta_p(d)}{\zeta_p(\alpha + d)},$$

и поэтому в бесконечном произведении (2) почти все сомножители равны единице.

Заметим, что все компоненты бесконечного произведения (2) являются целыми функциями от α при любых d , и, таким образом, обобщенная функция $g(\cdot; \alpha, d)$ является целой функцией от α .

Можно показать [10, 11], что при $2d > \alpha > d$ гауссовское случайное поле с бинарной корреляционной функцией

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = g(x - y; \alpha - 2d, d) \quad (3)$$

является трансляционно-инвариантным и скейлинг-инвариантным (с параметром α) обобщенным случайным полем на группе аделей A^d . Скейлинг-преобразование $S_\lambda(\alpha)$ с параметром α определяется формулой

$$S_\lambda(\alpha) \varphi(x) = |\lambda|^{d-\alpha/2} \varphi(\lambda x),$$

где λ принадлежит группе аделей (обратимых элементов кольца A^1),

$$\lambda x \equiv (\lambda_\infty x_\infty, \lambda_2 x_2, \dots), \quad \lambda_p x_p = (\lambda_p x_p^1, \dots, \lambda_p x_p^d).$$

В гиббсовской форме гауссовское поле с бинарной корреляционной функцией (3) задается гамильтонианом

$$H_0(\varphi) = \frac{1}{2} \int \frac{\Lambda(2d - \alpha) \Lambda(\alpha)}{\Lambda^2(d)} g(x - y; -\alpha, d) \varphi(x) \varphi(y) dx dy.$$

По аналогии с евклидовой и p -адическими моделями естественно искать негауссовские скейлинг-инвариантные поля как возмущение гауссовского поля φ^4 -взаимодействием:

$$H(\varphi) = H_0(\varphi) + \int \varphi^4(x) dx. \quad (4)$$

Первым шагом в реализации этой программы является исследование фейнмановских диаграмм φ^4 -теории.

В случае, если $\alpha = 2 + d$, $d = 4 - \varepsilon$, диаграммы теории с гамильтонианом (4) вплоть до третьего порядка теории возмущений изучались в работе [8] (см. также [11]). Была изучена структура полюсов этих диаграмм и доказана их перенормируемость. Исследование аналитических свойств аделевых амплитуд сводится к исследованию бесконечного произведения евклидовой и всех p -адических фейнмановских амплитуд. При этом было обнаружено замечательное свойство, состоящее в том, что все полюсы евклидовой амплитуды, кроме основного полюса $\varepsilon = 0$, являются нулями (того же порядка)

бесконечного произведения p -адических амплитуд, и поэтому в адельной амплитуде эти значения не являются полюсами.

В разделе 1 мы исследуем произвольные адельные фейнмановские амплитуды как обобщенные функции на пространстве Шварца–Брюа и формулируем условия сходимости соответствующих фейнмановских интегралов. Показано, что при достаточно больших d существует непустая область в пространстве степеней пропагаторов, в которой адельная амплитуда корректно определена. Для амплитуд φ^4 -теории область сходимости непуста и в случае равных степеней пропагаторов при условии, что соответствующая диаграмма не содержит двухвосток. В разделе 2 мы исследуем аналитическое продолжение по степени пропагатора некоторых амплитуд φ^4 -теории в третьем и четвертом порядках теории возмущений. Показано, что эти амплитуды не могут быть продолжены во всю комплексную плоскость (при условии справедливости гипотезы Римана о нулях дзета-функции). Более того, интересные с физической точки зрения значения степени пропагатора могут лежать на границе области аналитичности.

2. СХОДИМОСТЬ ФЕЙНМАНОВСКИХ АДЕЛЬНЫХ АМПЛИТУД

В дальнейшем, чтобы избежать громоздких нормирующих множителей в гауссовском корреляторе, мы будем предполагать, что $d > 1$, и рассматривать фейнмановские амплитуды φ^4 -теории с пропагатором $|x - y|^{\alpha - 2d}$.

Пусть $G = (V, L)$ – связный фейнмановский граф, $L(G)$ – множество ребер, $V(G)$ – множество вершин графа. Последнее делится на две части: множество внутренних вершин V_{int} и множество внешних вершин графа V_{ext} . Обозначим через $i(l)$ и $f(l)$ начало и конец ребра l , $l \in L(G)$. Подграф H называется регулярным, если он содержит все ребра l исходного графа такие, что $i(l)$ и $f(l)$ принадлежат $V(H)$. Подграф H графа G называется остовным, если $V(H) = V(G)$. Пусть H – остовный подграф графа G , каждая компонента связности которого представляет собой регулярный подграф. Будем употреблять обозначение G/H для фактор-графа графа G по подграфу H . Обозначим через $\widehat{G/H}$ граф, получающийся из графа G/H отождествлением всех его внешних вершин.

Для того чтобы определить адельную фейнмановскую амплитуду как обобщенную функцию на пространстве Шварца–Брюа, рассмотрим обобщенную адельную амплитуду вида

$$F_G(\underline{\alpha})(x_v, v \in V_{\text{ext}}) = \int_{(A^d)^{V_{\text{int}}}} \prod_{l \in L(G)} |x_{i(l)} - x_{f(l)}|^{\alpha_l - 2d} \prod_{v \in V_{\text{int}}} dx_v,$$

где $\underline{\alpha} = (\alpha_l, l \in L(G))$ – вектор комплексных параметров. Действие адельной амплитуды $F_G(\underline{\alpha})$ на основную функцию h из пространства Шварца–Брюа на $(A^d)^{V_{\text{ext}}}$ задается формулой

$$(F_G(\underline{\alpha}), h) = \int_{(A^d)^{V_{\text{ext}}}} F_G(\underline{\alpha})(x_v, v \in V_{\text{ext}}) h(x_v, v \in V_{\text{ext}}) \prod_{v \in V_{\text{ext}}} dx_v. \quad (5)$$

Пусть

$$f_{G,p}(\underline{\alpha}) = \int_{(Q_p^d)^V} \prod_{l \in L(G)} \|x_{i(l),p} - x_{f(l),p}\|^{\alpha_l - 2d} \prod_{v \in V_{\text{int}}} dx_{v,p} \prod_{v \in V_{\text{ext}}} \chi_p(x_{v,p}) dx_{v,p},$$

где $p = 2, 3, \dots, \infty$ (при $p = \infty$ под функцией $\chi_p(x_p)$ будем понимать плотность стандартного гауссовского распределения). Исследование вопроса о сходимости интеграла $(F_G(\underline{\alpha}), h)$ сводится к вопросу о сходимости интегралов $f_{G,p}(\underline{\alpha})$ для $p = 2, 3, \dots, \infty$ и бесконечного произведения

$$f_G(\underline{\alpha}) = \prod_p f_{G,p}(\underline{\alpha}).$$

Индекс связного графа G [12, 13] выражается через переменные α_l формулой

$$\text{Ind}(G) = - \sum_{l \in L(G)} \alpha_l + d(2|L(G)| - |V(G)| + 1).$$

Напомним, что нетривиальный связный подграф H графа G называется *отделимым*, если любой путь из вершины $v \in V(H)$ в вершину $v' \in V(G) \setminus V(H)$ проходит через фиксированную вершину $v_0 \in V(H)$, причем все вершины подграфа H , за исключением, может быть, вершины v_0 , являются внутренними вершинами графа G .

ТЕОРЕМА 1. *Интеграл (5) сходится, если*

$$\text{Re Ind}(H) < -1 \tag{6}$$

для всех нетривиальных регулярных связных подграфов H графа G и

$$\text{Re Ind}(\widehat{G/H}) > 1 \tag{7}$$

для всех собственных подграфов H графа G таких, что каждая компонента связности графа H является регулярным подграфом графа G , и граф $\widehat{G/H}$ не содержит петель. Для любого графа G , не содержащего отделимых подграфов, при достаточно большом d существует непустая область в пространстве параметров $\underline{\alpha}$, для которой интеграл (5) сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств (6), (7) следует положительность ультрафиолетовых и отрицательность инфракрасных индексов подграфов, что, как известно (см. [12–14]), является достаточным условием сходимости интегралов $f_{G,p}$ в вещественном и p -адических случаях. Для p -адического интеграла $f_{G,p}(\underline{\alpha})$ справедлива формула [15]

$$f_{G,p}(\underline{\alpha}) = \sum_H t_{H,p}^{(1)}(\underline{\alpha}) t_{\widehat{G/H},p}^{(2)}(\underline{\alpha}), \tag{8}$$

где суммирование ведется по всем остовным подграфам H графа G , каждая компонента связности которых представляет собой регулярный подграф, и граф $\widehat{G/H}$ не содержит петель,

$$t_{H,p}^{(1)}(\underline{\alpha}) = \int \prod_{l \in L(G)} \|x_{i(l),p} - x_{f(l),p}\|_p^{\alpha_l - 2d} \prod_{v \in V(G)} \chi(x_{v,p}) dx_{v,p}, \quad (9)$$

$$t_{H,p}^{(2)}(\underline{\alpha}) = \int \prod_{l \in L(G)} \|x_{i(l),p} - x_{f(l),p}\|_p^{\alpha_l - 2d} \times \\ \times (1 - \chi_p(x_{i(l),p} - x_{f(l),p})) \prod_{v \in V(G) \setminus \{v_0\}} dx_{v,p}, \quad (10)$$

где v_0 – любая вершина из множества $V(H)$, значение интеграла (10) не зависит от ее выбора. Для интегралов (9), (10) существуют явные формулы (см. [2, 11, 15]). Из этих явных формул можно получить следующие представления:

$$t_{H,p}^{(1)}(\underline{\alpha}) = \frac{1 + Q_H^{(1)}(p^{-d}; p^{\text{Ind}(H')}, H' \in \mathcal{H}_1(H) \setminus \{G\})}{\prod_{H' \in \mathcal{H}_1(H)} (1 - p^{\text{Ind}(H')})},$$

где $\mathcal{H}_1(H)$ – совокупность нетривиальных регулярных связных подграфов графа H , $Q_H^{(1)}(x; y_{H'}, H' \in \mathcal{H}_1(H))$ – полином от переменной x и переменных $y_{H'}$ с нулевым свободным членом;

$$t_{H,p}^{(2)} = 1, \quad \text{если} \quad V(H) = 1, \quad |L(H)| = \emptyset, \\ t_{H,p}^{(2)}(\underline{\alpha}) = \frac{Q_H^{(2)}(p^{-d}; p^{-\text{Ind}(H/H')}, H' \in \mathcal{H}_2(H))}{\prod_{H' \in \mathcal{H}_2(H)} (1 - p^{-\text{Ind}(H/H')})}, \quad (11)$$

где $\mathcal{H}_2(H)$ – совокупность остовных подграфов графа H , каждая компонента связности которых является регулярным подграфом этого графа, $Q_H^{(2)}(x; y_{H'}, H' \in \mathcal{H}_2(H))$ – полином с нулевым свободным членом. Заметим, что для любого подграфа H' графа $\widehat{G/H}$, каждая компонента связности которого является регулярным подграфом, мы можем написать, что

$$(\widehat{G/H})/H' = \widehat{G/H''}, \quad (12)$$

где H'' – подграф графа G , каждая компонента связности которого есть регулярный подграф. В силу (11) и (12) мы получаем представление

$$f_{G,p}(\underline{\alpha}) = \frac{1 + Q_G(p^{-d}; p^{\text{Ind}(H)}, H \in \mathcal{H}_1(G); p^{-\text{Ind}(\widehat{G/H'})}, H' \in \mathcal{H}'_2(G))}{\prod_{H \in \mathcal{H}_1(G)} (1 - p^{\text{Ind}(H')}) \prod_{H \in \mathcal{H}'_2(G)} (1 - p^{-\text{Ind}(\widehat{G/H})})},$$

где $\mathcal{H}'_2(G) = \{H : H \in \mathcal{H}_2(G), \widehat{G/H} \text{ не содержит петель}\}$, $Q_G(x; y_H, H \in \mathcal{H}_1(G); z_{H'}, H' \in \mathcal{H}'_2(G))$ – полином с нулевым свободным членом. Из неравенств (6), (7) следует, что бесконечное произведение, задающее $f_G(\underline{\alpha})$, сходится.

Докажем теперь, что для любого графа G , не содержащего отделимых подграфов, при достаточно большом d существует непустая область в пространстве параметров $\underline{\alpha}$,

для которой выполнены неравенства (6), (7). В работе [16] было доказано, что для любой размерности d , в том числе и для $d = 1$, существует непустая область в пространстве параметров $\underline{\alpha}$, в которой левые части неравенств (6) отрицательны, а левые части неравенств (7) положительны. Сами неравенства (6) и (7) переписываются в виде

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} \sum_{l \in L(H)} \frac{\alpha_l}{d} + 2|L(H)| - |V(H)| + 1 &< -\frac{1}{d}, \\ -\operatorname{Re} \sum_{l \in L(\widehat{G/H})} \frac{\alpha_l}{d} + 2|L(\widehat{G/H})| - |V(\widehat{G/H})| + 1 &< -\frac{1}{d}. \end{aligned}$$

Поскольку число подграфов графа G конечно, то отсюда следует утверждение теоремы.

Определим $F_G(\varepsilon)$, $\varepsilon \in C$, как $F_G(\underline{\alpha}(\varepsilon))$, где $\underline{\alpha}(\varepsilon) = (3d/2 + \varepsilon, \dots, 3d/2 + \varepsilon)$. Такому выбору $\underline{\alpha}$ отвечает адельная фейнмановская амплитуда с пропагатором $|x - y|^{-d/2+\varepsilon}$. Аналогичные обозначения $f_G(\varepsilon)$, $f_{G,p}(\varepsilon)$ будем использовать для интегралов $f_G(\underline{\alpha}(\varepsilon))$, $f_{G,p}(\underline{\alpha}(\varepsilon))$.

ТЕОРЕМА 2. *Если связный граф G φ^4 -теории, имеющий не менее двух внешних вершин, не содержит собственных двухвосток, то для достаточно больших значений d существует непустая область значений параметра ε , для которой интеграл $(F_G(\varepsilon), h)$ сходится для любой функции h из пространства Шварца–Брюа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что индекс произвольного фейнмановского графа G' с пропагатором $|x - y|^{-d/2+\varepsilon}$ имеет вид

$$\operatorname{Ind}(G') = -|L(G')|\varepsilon + d \left(1 - |V(G')| + \frac{n(G') - |E(G')|}{4} \right), \quad (13)$$

где $n(G')$ – сумма степеней всех вершин графа G' (степенью вершины v мы называем количество внутренних и внешних ребер, инцидентных вершине v), $E(G')$ – множество внешних ребер графа G' . Если H – граф φ^4 -теории, то формула (13) принимает вид

$$\operatorname{Ind}(H) = -|L(H)|\varepsilon + d \left(1 - \frac{|E(H)|}{4} \right).$$

Условие (6) переписывается как

$$\operatorname{Re} \varepsilon > \frac{1 + d(1 - |E(H)|/4)}{|L(H)|}. \quad (14)$$

Если исходный граф не является двухвосткой, то при $\operatorname{Re} \varepsilon > 1/2$ неравенство (6) имеет место для любого его регулярного подграфа H , поскольку $1 - |E(H)|/4 \leq 0$, и либо $|L(H)| > 1$, либо $|L(H)| = 1$ и $E(H) = 6$. Если же исходный граф – двухвостка, то неравенство (6) имеет место при $\operatorname{Re} \varepsilon > \max\{1/2, (1 + d/2)/|L(G)|\}$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\widehat{G'}) &= \text{Ind}(G') + d(|V_{\text{ext}}(G')| - 1) = \\ &= -|L(G')|_\varepsilon + d \left(\frac{n(G') - |E(G')|}{4} + |V_{\text{ext}}(G')| - |V(G')| \right). \end{aligned}$$

Если $G' = G/H$, граф G удовлетворяет условиям теоремы, а H – его собственный подграф такой, что каждая компонента связности графа H является регулярным подграфом графа G (эти условия мы будем предполагать выполненными в дальнейшем), то

$$\frac{n(G') - |E(G')|}{4} + |V_{\text{ext}}(G')| - |V(G')| = \frac{|L(G')|}{2} - |V_{\text{int}}(G')| > 0,$$

так как степень каждой внутренней вершины графа G' не меньше четырех. Таким образом, для любого графа G' можно подобрать такое $d_1(G, G')$, что

$$\frac{d(n(G') - |E(G')|/4 + |V_{\text{ext}}(G')| - |V(G')|) - 1}{|L(G')|} > \frac{1}{2}$$

при $d > d_1(G, G')$. Отсюда следует, что если граф G не является двухвосткой, то при $d > \max_{G'} d_1(G, G')$ существует непустой интервал значений ε , для которого выполнены условия (6) и (7).

Если граф G является двухвосткой, то для фактор-графа $G' = G/H$ имеет место альтернатива: либо $|V_{\text{ext}}(G')| = 2$, и тогда

$$\frac{n(G')}{4} - |V(G')| + |V_{\text{ext}}(G')| - \frac{|E(G')|}{4} \geq \frac{3}{2},$$

либо $|V_{\text{ext}}(G')| = 1$, и тогда

$$\frac{n(G')}{4} - |V(G')| + |V_{\text{ext}}(G')| - \frac{|E(G')|}{4} \geq \frac{1}{2}, \quad |L(G')| < |L(G)|.$$

В обоих случаях можно подобрать такое $d_2(G, G')$, что при $d > d_2(G, G')$

$$\frac{d(n(G') - |E(G')|/4 + |V_{\text{ext}}(G')| - |V(G')|) - 1}{|L(G')|} > \max \left\{ \frac{1 + d/2}{|L(G)|}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Теорема доказана.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АДЕЛЬНЫХ АМПЛИТУД φ^4 -ТЕОРИИ В НИЗШИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В этом разделе мы изучим аналитические свойства некоторых амплитуд φ^4 -теории, возникающих в третьем и четвертом порядках теории возмущений. Действие произвольной фейнмановской амплитуды $F_G(\varepsilon)$ на основную функцию h , $h \in S(A^d)$, может быть представлено в виде

$$(F_G(\varepsilon), h) = m_G(\varepsilon)f_G(\varepsilon),$$

где $m_G(\varepsilon)$ – мероморфная функция от ε . Область аналитичности амплитуды F_G совпадает с областью аналитичности интеграла $f_G(\varepsilon)$, аналитические свойства которого мы и будем обсуждать ниже.

Первый пример фейнмановского интеграла $f_G(\varepsilon)$, который не представляется в виде конечного произведения дзета-функций, задается графом $G = G_1$, изображенным слева на рисунке. Явные формулы для этого интеграла и вопрос о перенормируемости соответствующей фейнмановской амплитуды в точке $\varepsilon = 0$ обсуждались в работах [8, 11]. Явная формула для $f_{G_1}(\varepsilon)$ имеет вид

$$f_{G_1}(\varepsilon) = \prod_p \frac{(1 - p^{-d})(1 - 2p^{-d} + p^{-d/2-\varepsilon} + p^{-d-2\varepsilon} - 2p^{-d/2-3\varepsilon} + p^{-3d/2-3\varepsilon})}{(1 - p^{-4\varepsilon})(1 - p^{-d/2-\varepsilon})(1 - p^{-2\varepsilon})}.$$

При $\varepsilon > 1/2$ и $d \geq 2$ интеграл f_{G_1} сходится и представляется в виде

$$\zeta(4\varepsilon)\zeta\left(\frac{d}{2} + \varepsilon\right)\zeta(2\varepsilon)\zeta^{-1}(d) \prod_{p=2} T_{G_1,p}(\varepsilon),$$

где

$$T_{G_1,p}(\varepsilon) = 1 - 2p^{-d} + p^{-d/2-\varepsilon} + p^{-d-2\varepsilon} - 2p^{-d/2-3\varepsilon} + p^{-3d/2-3\varepsilon}.$$

Второй пример фейнмановского интеграла, который мы будем рассматривать, задается графом G_2 , изображенным справа на рисунке. Как следует из доказательства теоремы 2, неравенство (6) для графа G_2 эквивалентно неравенству

$$\varepsilon > \max\left\{\frac{1}{7} + \frac{d}{14}, \frac{1}{2}\right\}, \quad (15)$$

и несложно показать, что неравенство (7) эквивалентно неравенству

$$\varepsilon < \frac{3d/2 - 1}{7}. \quad (16)$$

Система неравенств (15), (16) имеет решение при $d > 3$. Легко видеть, что

$$f_{G_2,p}(\varepsilon) = f_{G_2,p}^1(\varepsilon) + f_{G_2,p}^2(\varepsilon) + 2f_{G_2,p}^3(\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} f_{G_2,p}^1(\varepsilon) &= \int \prod_{l \in L(G_2)} \|x_{i(l)} - x_{f(l)}\|_p^{-d/2+\varepsilon} \prod_{v \in V(G_2)} \chi_p(x_v) dx_v, \\ f_{G_2,p}^2(\varepsilon) &= \int \|x_2 - x_4\|_p^{-d/2+\varepsilon} \|x_2\|_p^{-3(d/2+\varepsilon)} \|x_4\|_p^{-3(d/2+\varepsilon)} (1 - \chi_p(x_2)) dx_2 \times \\ &\quad \times (1 - \chi_p(x_4)) dx_4, \\ f_{G_2,p}^3(\varepsilon) &= \int \|x_1 - x_2\|_p^{-d/2+\varepsilon} \|x_2 - x_3\|_p^{-d+2\varepsilon} \prod_{i=1}^3 \chi_p(x_i) dx_i \times \\ &\quad \times \int \|x_4\|_p^{-4(d/2+\varepsilon)} (1 - \chi_p(x_4)) dx_4, \end{aligned}$$

x_i , $i = 1, \dots, 4$, — переменная, соответствующая вершине i . Используя технику вычисления p -адических фейнмановских интегралов, разработанную в работах [2, 11], можно показать, что

$$\begin{aligned} f_{G_2,p}^1(\varepsilon) &= \zeta_p \left(-\frac{d}{2} + 7\varepsilon \right) \left\{ (1 - p^{-d}) (1 - 2p^{-d})^2 + \right. \\ &\quad + (1 - p^{-d})^2 (1 - 2p^{-d}) \left[3\gamma_p \left(\frac{d}{2} + \varepsilon \right) + 2\gamma_p(2\varepsilon) + 2\gamma_p(4\varepsilon) \right] + \\ &\quad + (1 - p^{-d})^3 \left[2\gamma_p \left(\frac{d}{2} + 3\varepsilon \right) \left(\gamma_p \left(\frac{d}{2} + \varepsilon \right) + \gamma_p(2\varepsilon) + \gamma_p(d) \right) + \right. \\ &\quad + 2\gamma_p(4\varepsilon) \left(2\gamma_p \left(\frac{d}{2} + \varepsilon \right) + \gamma_p(2\varepsilon) \right) \left. \right] + \\ &\quad + (1 - p^{-d})^3 \left[\gamma_p^2(2\varepsilon) + \gamma_p^2 \left(\frac{d}{2} + \varepsilon \right) + \gamma_p \left(\frac{d}{2} + \varepsilon \right) \gamma_p(d) \right] \left. \right\}, \\ f_{G_2,p}^2(\varepsilon) &= (1 - p^{-d}) \gamma_p \left(\frac{3d}{2} - 7\varepsilon \right) \left\{ 1 - 2p^{-d} + \right. \\ &\quad + (1 - p^{-d}) \gamma_p \left(\frac{d}{2} + \varepsilon \right) + 2(1 - p^{-d}) \gamma_p(d - 4\varepsilon) \left. \right\}, \\ f_{G_2,p}^3(\varepsilon) &= (1 - p^{-d})^3 \gamma_p(d - 4\varepsilon) \zeta_p \left(\frac{d}{2} + \varepsilon \right) \zeta_p(2\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\gamma_p(s) = p^{-s}/(1 - p^{-s}) = -\zeta_p(-s)$. Анализируя эти формулы, можно показать, что справедливо представление

$$f_{G_2,p}(\varepsilon) = T_{G_2,p}(\varepsilon)\zeta_p\left(-\frac{d}{2} + 7\varepsilon\right)\zeta_p(2\varepsilon)\zeta_p(4\varepsilon) \times \\ \times \zeta_p(d - 4\varepsilon)\zeta_p\left(\frac{d}{2} + \varepsilon\right)\zeta_p\left(\frac{3}{2d} - \varepsilon\right)\zeta_p\left(\frac{d}{2} + 3\varepsilon\right),$$

где $T_{G_2,p}(\varepsilon) = 1 + p^{-2\varepsilon} + 2p^{-4\varepsilon} + Q_2(p; d, \varepsilon)$, Q_2 – конечная линейная комбинация членов вида $p^{\beta(k,l)}$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta(k, l) = -dk/2 + l\varepsilon$, причем в области $0 < \operatorname{Re} \varepsilon < 3d/14 - 1/7$ при $d > 3$ для всех $\beta(k, l)$ справедливо неравенство $\operatorname{Re} \beta(k, l) < -1$. Следовательно, при $3d/14 - 1/7 > \operatorname{Re} \varepsilon > 1/2$, $d > 3$, интеграл $f_{G_2}(\varepsilon)$ сходится и представляется в виде

$$f_{G_2}(\varepsilon) = \zeta\left(-\frac{d}{2} + 7\varepsilon\right)\zeta(2\varepsilon)\zeta(4\varepsilon)\zeta(d - 4\varepsilon) \times \\ \times \zeta\left(\frac{d}{2} + \varepsilon\right)\zeta\left(\frac{3}{2d} - \varepsilon\right)\zeta\left(\frac{d}{2} + 3\varepsilon\right) \prod_p T_{G_2,p}(\varepsilon).$$

Таким образом, вопрос об аналитичности адельного фейнмановского интеграла $f_{G_i}(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, сводится к вопросу об аналитичности бесконечного произведения $\prod_p T_{G_i,p}(\varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $P(x) = 1 + b_1x + \dots + b_nx^n$ и ряд $\sum_p |Q(p; \varepsilon)|$ сходится при $0 < \operatorname{Re} \varepsilon < \varepsilon'$, $\varepsilon' > 1$. Тогда бесконечное произведение $\prod_p (P(p^{-\varepsilon}) + Q(p, \varepsilon))$ сходится при $1 < \operatorname{Re} \varepsilon < \varepsilon'$ и представимо в виде

$$\prod_{k=1}^N \zeta(k\varepsilon)^{-a_k} A_N(\varepsilon),$$

где a_k – целые числа, задаваемые формулами

$$a_k = \frac{1}{k} \sum_{l: l|k} \mu(l) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{-k/l} \right), \quad (17)$$

λ_i , $i = 1, \dots, n$ – корни полинома $P(x)$, $\mu(n)$ – функция Мёбиуса, а $A_N(\varepsilon)$ – аналитическая функция в области $1/(N+1) < \operatorname{Re} \varepsilon < \varepsilon'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что полином $P(x)$ может быть представлен в виде

$$P(x) = (1-x)^{a_1} (1-x^2)^{a_2} \dots (1-x^N)^{a_N} (1+x^{N+1}g(x)), \quad (18)$$

где a_k находятся по формулам (17), а $g(x)$ – функция, аналитическая в круге $|x| < 1$.

Действительно, для любого ряда $1 + b_mx^m + b_{m+1}x^{m+1} + \dots$ с целыми коэффициентами b_i справедливо представление

$$1 + b_mx^m + b_{m+1}x^{m+1} + \dots = (1-x)^{-b_m} (1 + c_{m+1}x^{m+1} + \dots),$$

где c_i , $i = m + 1, m + 2, \dots$, также являются целыми коэффициентами. Отсюда следует справедливость разложения вида (18). Вычислим коэффициенты a_k . Пользуясь представлением

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i^{-1} x),$$

прологарифмируем обе части равенства (18). Получаем

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{-k} \right) = -\sum_{l=1}^N a_l \sum_{i_l=1}^{\infty} \frac{x^{l i_l}}{i_l} + \log(1 + x^{N+1} g(x)).$$

Приравнявая коэффициенты при степенях x^k , $k = 1, \dots, N$, получаем, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^{-k} = \sum_{l: l|k} a_l l. \quad (19)$$

Используя формулу обращения Мёбиуса (см., например, [17]), получаем соотношение (17).

Таким образом, мы можем написать, что

$$P(p^{-\varepsilon}) + Q(p, \varepsilon) = (1 - p^{\varepsilon})^{a_1} \dots (1 - p^{\varepsilon})^{a_N} A_N(p, \varepsilon),$$

где

$$A_N(p, \varepsilon) = 1 + p^{-(N+1)\varepsilon} g(p^{-\varepsilon}) + Q(p, \varepsilon)(1 - p^{-\varepsilon})^{-a_1} \dots (1 - p^{-N\varepsilon})^{-a_N}.$$

При $\operatorname{Re} \varepsilon > 1/(N+1)$, $p \geq 2$

$$|(1 - p^{-\varepsilon})^{-a_1} \dots (1 - p^{-N\varepsilon})^{-a_N}| < C_1, \quad |g(p^{-\varepsilon})| < C_2.$$

Отсюда следует сходимость бесконечного произведения

$$A_N(\varepsilon) = \prod_p A_N(p, \varepsilon)$$

в полосе $1/(N+1) < \operatorname{Re} \varepsilon < \varepsilon'$. Теорема доказана.

Пусть $\varepsilon = -d/6 + \delta/3$. Тогда

$$T_{G_1, p}(\varepsilon) = 1 - 2p^{-\delta} + Q_1(p; d, \delta),$$

где $Q_1(p; d, \delta) = -2p^{-d} + p^{-d/3 - \delta/3} + p^{-2(d+\delta)/3} + p^{-d-\delta}$. Если $d \geq 3$, то из теоремы 3 следует представление

$$\prod_p T_{G_1, p}(\varepsilon) = \prod_{k=1}^N \zeta(k\delta)^{-a_k^{(1)}} A_N^{(1)}(\delta),$$

где

$$a_k^{(1)} = \frac{1}{k} \sum_{l: l|k} \mu(l) 2^{k/l},$$

а функция $A_N^{(1)}(\delta)$ аналитична при $\delta > 1/(N+1)$. Заметим, что $a_k^{(1)} > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Поскольку $\zeta(k\delta)$ имеет полюс при $\delta = 1/k$, точка $\varepsilon = -d/6$ является точкой накопления нулей бесконечного произведения $\prod_p T_{G_1,p}(\varepsilon)$ (а следовательно, и интеграла $f_{G_1}(\varepsilon)$). Кажется правдоподобным предположение о том, что вся прямая $\operatorname{Re} \varepsilon = -d/6$ является границей области аналитичности функции $\prod_p T_{G_1,p}(\varepsilon)$ (а также всей адельной амплитуды F_{G_1}). Заметим, что физически интересная точка $\varepsilon = 0$, отвечающая в евклидовых и p -адических теориях бифуркационному значению параметра скейлингового преобразования $\alpha = 3/2d$, является полюсом этой адельной амплитуды [8].

Рассмотрим теперь произведение $\prod_p T_{G_2,p}(\varepsilon)$. Пусть $\varepsilon = \delta/2$. Если $d > 3$, то

$$\prod_p T_{G_2,p}(\varepsilon) = \prod_{k=1}^N \zeta(k\delta)^{-a_k^{(2)}} A_N^{(2)}(\delta),$$

где

$$a_k^{(2)} = \frac{1}{k} \sum_{l: l|k} \mu(l) \left(\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \right)^{k/l} + \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \right)^{k/l} \right),$$

а $A_N^{(2)}(\delta)$ аналитична при $1/(N+1) < \operatorname{Re} \delta < (3d/2 - 1)/14$. Из (19) следует

$$\sum_{l: l|k} a_l^{(2)} l = \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \right)^k + \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \right)^k.$$

Заметим, что $(-1 + i\sqrt{7})/2 = 2e^{i\varphi}$, где $0 < \varphi < \pi$. Так как в последовательности $\lambda_1^{-k} + \lambda_2^{-k} = 2^{k/2+1} \cos(k\varphi)$, $k = 1, 2, \dots$, имеется бесконечное число сколь угодно больших по модулю положительных и отрицательных членов, то в последовательности $a_k^{(2)}$ также имеется бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов. Отсюда, в частности, следует, что точка $\varepsilon = 0$ является точкой накопления нулей функции $f_{G_2}(\varepsilon)$, расположенных на луче $\operatorname{Im} \varepsilon = 0$, $\operatorname{Re} \varepsilon > 0$.

Как известно из теории дзета-функции Римана [17, гл. IX], для любой сколь угодно малой окрестности любой точки на мнимой оси можно подобрать такое k_0 , что функция $\zeta(k\delta)$ имеет нуль в этой окрестности при $k > k_0$. Если справедлива гипотеза Римана о нулях дзета-функции, то вещественные части нулей функции $\zeta(k\delta)$ равны $1/(2k)$, следовательно, все эти нули различны. Таким образом, в силу бесконечности числа отрицательных членов последовательности $a_k^{(2)}$, при условии справедливости гипотезы Римана, в окрестности любой точки на мнимой оси имеется бесконечно много нулей произведения $\prod_p T_{G_2,p}(\varepsilon)$. В этом случае прямая $\operatorname{Re} \varepsilon = 0$ является естественной границей области аналитичности функции $f_{G_2}(\varepsilon)$ и всей адельной амплитуды F_{G_2} .

Приведенные примеры показывают, что в отличие от обычных (евклидовых) и p -адических фейнмановских амплитуд адельные амплитуды могут не иметь аналитического

продолжения по степени пропагатора во всю комплексную плоскость. Более того, интересные с физической точки зрения значения степени пропагатора (например, $\varepsilon = 0$) могут лежать на границе области аналитичности. Возникает нетривиальный вопрос о том, как понимать процедуру перенормировки таких амплитуд.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 97-01-00375 и № 99-01-00467).

Список литературы

- [1] *И. В. Волович.* ТМФ. 1987. Т. 71. С. 337–340.
- [2] *E. Yu. Lerner, M. D. Missarov.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 35–48.
- [3] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов.* *p*-Адитивский анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [4] *L. Brekke, P. G. O. Freund.* Phys. Rep. 1993. V. 233. № 1. P. 2–66.
- [5] *Yu. I. Manin.* Reflections on Arithmetical Physics. In: Conformal Invariance and String Theory. Eds. P. Dita, V. Gergescu. Boston: Academic Press, 1989. P. 293–303.
- [6] *P. G. O. Freund, E. Witten.* Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 191–194.
- [7] *В. С. Владимиров.* УМН. 1993. Т. 48. № 6. С. 3–38.
- [8] *M. D. Missarov.* Phys. Lett. B. 1991. V. 272. P. 36–38.
- [9] *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро.* Теория представлений и автоморфные функции. Обобщенные функции. Вып. 6. М.: Наука, 1966.
- [10] *M. D. Missarov.* Ann. Inst. H. Poincaré. 1989. V. 49. P. 357–367.
- [11] *M. D. Missarov.* Renormalization group and renormalization theory in *p*-adic and adelic scalar models. In: Dynamical Systems and Statistical Mechanics. Adv. Sov. Math. V. 3. Ed. Ya. G. Sinai. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. P. 143–161.
- [12] *О. И. Завьялов.* Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.
- [13] *В. А. Смирнов.* Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [14] *Э. Ю. Лернер.* ТМФ. 1995. Т. 102. № 3. С. 367–377.
- [15] *Э. Ю. Лернер.* ТМФ. 1995. Т. 104. № 3. С. 371–392.
- [16] *E. R. Speer.* Ann. Inst. H. Poincaré. 1973. V. 23. P. 1–21.
- [17] *Е. К. Титчмарш.* Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.

Поступила в редакцию 6.XII.1999 г.