Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Некоторые асимптотические формулы
для гауссовской меры Боголюбова, *ТМФ*, 2008, том 157,
номер 2, 286–308

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:32:26

© 2008 г.

В. Р. Фаталов*

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГАУССОВСКОЙ МЕРЫ БОГОЛЮБОВА

Рассмотрены вопросы интегрирования по мере Боголюбова в пространстве непрерывных функций. Получены асимптотические формулы для одного класса функциональных интегралов типа Лапласа, взятых по мере Боголюбова. Также доказаны родственные асимптотические результаты о больших отклонениях для меры Боголюбова. В качестве основного функционала взята L^p -норма. Установлена гёльдеровость порядка $\gamma < 1/2$ боголюбовских траекторий.

Ключевые слова: мера Боголюбова, метод Лапласа в банаховом пространстве.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В статьях [1]–[3] введена и изучена гауссовская мера Боголюбова, имеющая важное значение в теории статистического равновесия квантовых систем (см. [4]). *Гауссовский процесс Боголюбова* – это стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, с нулевым средним и ковариационной функцией

$$B(t-s) \equiv B(t, s) := \mathbf{E} \xi(t) \xi(s) = \frac{1}{2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \operatorname{ch} \left(\omega |t-s| - \frac{\beta\omega}{2} \right), \quad t, s \in [0, \beta]. \quad (1.1)$$

Здесь и ниже $\mathbf{E}$ – оператор математического ожидания, взятого относительно вероятности $\mathbf{P}$, $m > 0$ – масса частицы, $\beta > 0$ – обратная температура, $\omega > 0$ – собственная частота гармонического осциллятора [2].

Согласно общему результату из теории гауссовских процессов [5] процесс Боголюбова $\xi(t)$ имеет почти наверное (п.н.) непрерывные траектории на отрезке $[0, \beta]$. Более того, в силу теоремы Беляева [6] из разложения ковариационной функции $B(h)$ при $h \rightarrow 0$ следует, что траектории процесса $\xi(t)$ обладают свойством непрерывности по Гёльдеру порядка $\gamma < 1/2$ (см. также [5]). Напомним, что в работе [3] доказано, что боголюбовские траектории не обладают свойством непрерывности по Гёльдеру порядка $\gamma > 1/2$. Различные вопросы теории гауссовских процессов рассмотрены в книгах [5], [7]–[12].

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.
E-mail: vfatalov@nw.math.msu.ru

Используя формулу (1.1), легко находим, что $\mathbf{E}[\xi(\beta) - \xi(0)]^2 = 0$, следовательно, $\xi(0) = \xi(\beta)$ п.н. Учитывая вышеизложенное, заключаем, что траектории гауссовского процесса Боголюбова принадлежат п.н. пространству $C^0[0, \beta]$ непрерывных на отрезке $[0, \beta]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0) = x(\beta)$, с равномерной метрикой. Распределение μ_B процесса $\xi(t)$ в пространстве $C^0[0, \beta]$ называется *гауссовской мерой Боголюбова*.

Сведения о распределениях случайных процессов в функциональных пространствах имеются в книгах [7], [8]; теория гауссовских мер изложена в [7], [8], [10]–[12].

В статье [2] на основе метода работ [13] вычислены приближенно некоторые функциональные интегралы по мере Боголюбова. Приближенные формулы в [2] представляют собой квадратурные формулы, которые точны для функциональных многочленов. В дополнение к результатам работы [2] в настоящей статье мы получим асимптотические формулы для одного класса функциональных интегралов типа Лапласа, взятых по мере Боголюбова. Также мы докажем родственные асимптотические результаты о больших отклонениях для меры Боголюбова. Отметим, что в работах [14]–[18] описаны разнообразные важные задачи теории вероятностей и математической физики, связанные с вычислением асимптотик функциональных интегралов типа Лапласа и вероятностей больших отклонений.

Перейдем к точной формулировке полученных результатов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть задано число $0 < \alpha < 2$. Для $p > 0$ положим

$$q_0 = q_0(p, \alpha) = \frac{2 - \alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{m\omega^2} \beta^{(2-p)/p} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} > 0. \quad (1.2)$$

Справедливы следующие утверждения.

1. Предположим, что фиксировано число $0 < p < 2$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\int_{C^0[0, \beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x) = d_0 \exp \{ q_0 u^{2/(2-\alpha)} \} (1 + o(1)), \quad (1.3)$$

где

$$d_0 = d_0(p, \alpha) = \frac{2\sqrt{2-p} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\sqrt{2-\alpha} \operatorname{sh} \left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{2-p} \right)} > 0.$$

2. При $u \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \int_{C^0[0, \beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta x^2(t) dt \right)^{\alpha/2} \right\} d\mu_B(x) = \\ = \exp \left\{ \frac{2 - \alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{m\omega^2} \right)^{\alpha/(2-\alpha)} u^{2/(2-\alpha)} \right\} \frac{4 \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\beta\omega \sqrt{2-\alpha}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

3. Пусть фиксировано число $p > 2$ такое, что

$$p \neq 2 + \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2 \omega^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\int_{C^0[0,\beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x) = d_1 \exp \{ q_0 u^{2/(2-\alpha)} \} (1 + o(1)), \quad (1.5)$$

где

$$d_1 = d_1(p, \alpha) = \frac{2\sqrt{p-2} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\sqrt{2-\alpha} \left| \sin \left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{p-2} \right) \right|} > 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть фиксированы числа $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$, имеющие следующий вид:

$$p = \frac{2k_1 - 1}{2k_2 - 1}, \quad \alpha = \frac{2k_3 - 1}{2k_4 - 1}, \quad \text{где} \quad k_j = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (1.6)$$

пусть при этом выполнено (1.4). Тогда при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \int_{C^0[0,\beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta x^p(t) dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x) = \\ = \frac{1}{2} \int_{C^0[0,\beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Далее асимптотика вероятности из правой части последнего равенства вычисляется при помощи теоремы 1. Пусть

$$\|x\|_p := \left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p > 0. \quad (1.8)$$

Как известно, при $p \geq 1$ функционал $\|x\|_p$ является нормой в банаховом пространстве $L^p[0, \beta]$ функций, p -я степень которых интегрируема на $[0, \beta]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ограничение $\alpha < 2$ в теореме 1 есть следствие известной теоремы Ландау–Маркуса–Шепша–Ферника об экспоненциальной интегрируемости квадрата нормы гауссовского случайного элемента, см. [8], [10]–[12], [15]. Согласно этой теореме, если $p \geq 1$, то $\mathbf{E} e^{u\|\xi\|_p^\alpha} < +\infty$ при $\alpha < 2$, $u > 0$ или при $\alpha = 2$, $u < c_p$; $\mathbf{E} e^{u\|\xi\|_p^\alpha} = +\infty$ при $\alpha > 2$, $u > 0$ или при $\alpha = 2$, $u \geq c_p$, где $c_p > 0$ – некоторое вполне конкретное число. Так, $c_2 = m\omega^2/2$, см. предложение 1 ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Значения чисел $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$ из теоремы 2 подобраны так, что для любого действительного числа r определены однозначно степени r^p , $r^{\alpha/p}$, принимающие действительные значения. При этом выполнены равенства

$$(-1)^p = -1, \quad \left(\int_0^\beta (-\xi(t))^p dt \right)^{\alpha/p} = - \left(\int_0^\beta \xi^p(t) dt \right)^{\alpha/p}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для чисел $p > 2$ вида

$$p = 2 + \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2 \omega^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

асимптотическое поведение вероятности из левой части формулы (1.5) нужно исследовать отдельно, возникает так называемый вырожденный случай (см. теорему 2.3 в работе [16]). Логарифмическая асимптотика имеет тот же вид: для чисел вида (1.9) и при $0 < \alpha < 2$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^{2/(2-\alpha)}} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} = q_0, \quad (1.10)$$

где q_0 задано в (1.2).

Для чисел $p > 2$ и $0 < \alpha < 2$, удовлетворяющих соотношениям (1.6) и (1.9), справедлива та же логарифмическая асимптотика:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^{2/(2-\alpha)}} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta \xi^p(t) dt \right)^{\alpha/p} \right\} = q_0. \quad (1.11)$$

В пограничном гильбертовом случае $\alpha = p = 2$ возможны точные вычисления.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (СЛУЧАЙ $\alpha = p = 2$). *Справедливы равенства*

$$\int_{C^0[0,\beta]} \exp \left\{ u \int_0^\beta x^2(t) dt \right\} d\mu_B(x) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\operatorname{sh} \left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{\omega^2 - \frac{2u}{m}} \right)}, \quad \text{если } u < \frac{m\omega^2}{2};$$

$$\mathbf{E} \exp \left\{ u \int_0^\beta \xi^2(t) dt \right\} \equiv \int_{C^0[0,\beta]} \exp \left\{ u \int_0^\beta x^2(t) dt \right\} d\mu_B(x) = +\infty, \quad \text{если } u \geq \frac{m\omega^2}{2}.$$

Первое равенство в предложении доказано в работе [2], второе равенство вытекает из упомянутой выше теоремы Ландау–Маркуса–Шеппа–Ферника.

Результаты о больших отклонениях для меры Боголюбова в L^p -норме (1.8) имеют следующий вид.

ТЕОРЕМА 3. 1. Пусть фиксировано число $0 < p < 2$. Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta |\xi(t)|^p dt > u^p \right\} &\equiv \mu_B \left\{ x: \int_0^\beta |x(t)|^p dt > u^p \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{m\omega^2}{2} \beta^{(p-2)/p} u^2 \right\} \frac{d_2}{u} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$d_2 = d_2(p) = \frac{\sqrt{2(2-p)} \beta^{(2-p)/2p} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\omega \sqrt{\pi m} \operatorname{sh} \left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{2-p} \right)} > 0. \quad (1.13)$$

2. При $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta \xi^2(t) dt > u^2 \right\} &\equiv \mu_B \left\{ x: \int_0^\beta x^2(t) dt > u^2 \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{m\omega^2}{2} u^2 \right\} \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{u\beta\omega^2 \sqrt{\pi m}} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.14)$$

3. Пусть фиксировано число $p > 2$ такое, что выполнено условие невырожденности (1.4). Тогда при $u \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_0^\beta |\xi(t)|^p dt > u^p \right\} &\equiv \mu_B \left\{ x: \int_0^\beta |x(t)|^p dt > u^p \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{m\omega^2}{2} \beta^{(p-2)/p} u^2 \right\} \frac{d_3}{u} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$d_3 = d_3(p) = \frac{\sqrt{2(p-2)} \beta^{(2-p)/2p} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\omega \sqrt{\pi m} \left| \sin \left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{p-2} \right) \right|} > 0. \quad (1.16)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть фиксировано число $p > 0$, имеющее вид, заданный в (1.6); пусть при этом выполнено условие (1.4). Тогда при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\mu_B \left\{ \int_0^\beta x^p(t) dt > u^p \right\} = \frac{1}{2} \mu_B \left\{ \int_0^\beta |x(t)|^p dt > u^p \right\} (1 + o(1)). \quad (1.17)$$

Ясно, что асимптотику вероятности из правой части формулы (1.17) можно вычислить, применяя теорему 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Здесь также для чисел $p > 2$ вида (1.9) возникает вырожденный случай (см. п. 3 леммы 8 ниже), поэтому для указанных значений p асимптотическое поведение вероятности из левой части формулы (1.15) нужно исследовать отдельно. Логарифмическая асимптотика имеет тот же вид: для чисел p вида (1.9)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mu_B \left\{ \int_0^\beta |x(t)|^p dt > u^p \right\} = -\frac{m\omega^2}{2} \beta^{(p-2)/p}. \quad (1.18)$$

Для чисел $p > 2$, удовлетворяющих соотношениям (1.6) и (1.9), справедлива та же логарифмическая асимптотика:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mu_B \left\{ \int_0^\beta x^p(t) dt > u^p \right\} = -\frac{m\omega^2}{2} \beta^{(p-2)/p}. \quad (1.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Согласно общему свойству гауссовских процессов с нулевым средним процесс $-\xi(t)$, $t \in [0, \beta]$, также представляет собой процесс Боголюбова. Поэтому в условиях теорем 2 и 4 выполнены соответственно равенства

$$\begin{aligned} \int_{C^0[0, \beta]} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta x^p(t) dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x) &= \\ &= \int_{C^0[0, \beta]} \exp \left\{ -u \left(\int_0^\beta x^p(t) dt \right)^{\alpha/p} \right\} d\mu_B(x), \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\mu_B \left\{ \int_0^\beta x^p(t) dt > u^p \right\} = \mu_B \left\{ \int_0^\beta x^p(t) dt < -u^p \right\}. \quad (1.21)$$

Следовательно, к выражениям из правых частей равенств (1.20) и (1.21) применимы, соответственно, формулы (1.7) и (1.17).

Аналоги теорем 1 и 3 для винеровской меры доказаны в работах [19], [20] (см. также [21]). Отметим, что аналоги теорем 1–4 можно доказать и в случае, когда вместо L^p -нормы взят другой достаточно гладкий интегральный функционал (см. теоремы 5–7 ниже).

В заключение этого раздела опишем интересную связь между мерами Винера и Боголюбова. Сделать это удобно в терминах теории случайных процессов. Пусть $w(t)$, $t \geq 0$, обозначает винеровский процесс, или броуновское движение, $w(0) = 0$ п.н. Напомним, что винеровский процесс $w(t)$ – это п.н. непрерывный гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $\mathbf{E} w(t)w(s) = \min(t, s)$ (см., например, [10], [22], [23]). Исходя из процесса Боголюбова $\xi(t)$ определим случайный процесс

$$\eta(t) = \sqrt{m} (\xi(t) - \xi(0)) + \sqrt{m} \omega \int_0^t \xi(s) ds, \quad t \in [0, \beta]. \quad (1.22)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [3]. *Распределение процесса $\eta(t)$, $t \in [0, \beta]$, совпадает с распределением винеровского процесса $w(t)$, $t \in [0, \beta]$.*

Предложение 2 фактически доказано в статье [3], где оно, однако, не сформулировано в явном виде. Доказательство предложения 2 простое. В самом деле, п.н. непрерывный случайный процесс $\eta(t)$ представляет собой результат линейного преобразования (1.22) над гауссовским процессом $\xi(t)$, следовательно, процесс $\eta(t)$ является гауссовским. Из формулы (1.22) получаем, что $\mathbf{E} \eta(t) = 0$, $t \in [0, \beta]$. Несложный подсчет с использованием соотношений (1.1) и (1.22) показывает, что $\mathbf{E} \eta(t)\eta(s) = \min(t, s)$ для всех $t, s \in [0, \beta]$. Таким образом, ковариационная функция гауссовского процесса $\eta(t)$ совпадает с ковариационной функцией винеровского процесса $w(t)$. Отсюда, очевидно, вытекает утверждение предложения 2.

Отметим, что из предложения 2 и теоремы 3.5 книги [10] непосредственно следует теорема 3 статьи [3].

2. МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ ГАУССОВСКИХ МЕР В СЛУЧАЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В работах [18], [19], [24] был построен эффективный метод Лапласа, предназначенный для вычисления точных асимптотик функциональных интегралов типа Лапласа и вероятностей больших отклонений в случае общих гауссовских мер в банаховом пространстве. Сформулируем результат, лежащий в основе метода Лапласа для гауссовских интегралов в банаховом пространстве.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – действительное сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{E}$ – борелевская σ -алгебра в E , E^* – сопряженное к E пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – линейная форма, устанавливающая двойственность между E и E^* . Пусть P_A – гауссовская мера, определенная на $\mathcal{E}$ и имеющая нулевое среднее значение и инъективный ковариационный оператор $A: E^* \rightarrow E$. Напомним, что ковариационный оператор A является симметричным, т.е. $\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle$ для всех $x, y \in E^*$, положительным, т.е. $\langle Ay, y \rangle \geq 0$ для всех $y \in E^*$, и ядерным [12]. Инъективность оператора A означает, что $\langle Ay, y \rangle > 0$ для всех $0 \neq y \in E^*$.

Обозначим первую и вторую производные по Фреше функционала $S: E \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x через $S'(x)$ и $S''(x)$, необходимые определения можно найти в книгах [25], [26]. Мы будем предполагать, что производные $S'(x)$ и $S''(x)$ можно рассматривать как ограниченные линейные операторы из E в $\mathbb{R}$ и из E в E^* соответственно, при этом будем использовать обозначения

$$S'(x)[h] = \langle h, S'(x) \rangle, \quad S''(x)[h, v] = \langle h, S''(x)v \rangle, \quad h, v \in E.$$

Обозначим также $\text{Dom } T$ область определения оператора T , $\text{Ran } T$ – область значений оператора T , $\text{Ker } T := \{x \in E: Tx = 0\}$ – ядро оператора T , заданного на E ; пусть I – тождественный оператор в E . Через T^{-1} будем обозначать обратный оператор к оператору T . Везде ниже произведение операторов означает их композицию. Операторная норма обозначается также через $\|\cdot\|$.

Пусть $(H_A, \|\cdot\|_A)$ обозначает гильбертово пространство, ассоциированное с ковариационным оператором A , т.е. пополнение области значений $\text{Ran } A$ оператора A относительно предгильбертовой нормы $\|Ay\|_A := \sqrt{\langle Ay, y \rangle}$, $y \in E^*$, см. [12]. Скалярное произведение в H_A будем записывать в виде $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

2.1. Точные асимптотики для гауссовских интегралов типа Лапласа.

Приведем теорему, с помощью которой можно вычислять точные асимптотики средних из формул (1.3) и (1.7). Предположим, что выполнены следующие условия.

D1. Пусть f и F – непрерывные действительные функционалы, заданные на E , такие, что для некоторых постоянных $b_1 > 0$, $b_2 \geq 0$, $0 \leq b_3 < (2\|A\|)^{-1}$, $b_4 \geq 0$ справедливы неравенства

$$|f(x)| \leq b_1 e^{b_2 \|x\|^2}, \quad F(x) \geq -b_3 \|x\|^2 - b_4, \quad x \in E.$$

D2. Функционал $\Lambda(x) := F(x) + \langle x, A^{-1}x \rangle/2$ достигает минимума на $\text{Dom } A^{-1}$ в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$. Предположим, что $\inf_{x \in H_A} [F(x) + \|x\|_A^2/2]$ также достигается только в точках $x^1, x^2, \dots, x^m$.

D3. В пространстве E существуют такие окрестности U_i точек x^i , что функционал F трижды дифференцируем по Фреше в точках множеств U_i , при этом $f(x^i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

D4. Для всех $i = 1, 2, \dots, m$ собственные значения γ_{ik} , $k = 1, 2, \dots$, ядерного оператора $AF''(x^i): E \rightarrow E$ таковы, что

$$\det R_i := \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \gamma_{ik}), \quad R_i = I + AF''(x^i): E \rightarrow E,$$

конечен и не равен нулю.

Сведения о детерминантах, связанных с ядерными операторами в гильбертовом и банаховом пространствах имеются в книгах [15], [27]–[29].

ТЕОРЕМА 5. Пусть P_A – гауссовская мера в E с нулевым средним и инъективным ковариационным оператором A . Пусть выполнены условия **D1**–**D4**. Тогда $\det R_i > 0$, имеют место равенства

$$x^i = -AF'(x^i), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

и при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\int_E f(x) e^{-u^2 F(x)} dP_A(ux) = e^{-u^2 \Lambda(x^1)} \sum_{i=1}^m f(x^i) \det^{-1/2} R_i (1 + o(1)). \quad (2.1)$$

Теорема 5 представляет собой банаховозначный вариант известного результата Эллиса и Розен [16] об асимптотическом разложении гауссовского интеграла типа Лапласа в гильбертовом пространстве (см. также [18]).

Отметим, что условие **D3**, использующееся в теореме 5, является значительно более слабым, чем соответствующее условие из [16] о бесконечной дифференцируемости по Фреше функционалов f и F на всем пространстве. Ограничение на F , содержащееся в условии **D1**, обеспечивает конечность интеграла в левой части формулы (2.1) – это следует из упомянутой выше теоремы Ландау–Маркуса–Шеппа–Ферника. Примеры применения теоремы 5 для функционала $F(x) = (\int_0^1 |x(t)|^p dt)^{\alpha/p}$ при $p > 0$, $0 < \alpha < 2$ в случае винеровского процесса и броуновского моста даны в работе [20].

2.2. Точные асимптотики больших уклонений для гауссовских мер.

Приведем теперь результат, на основе которого выводятся утверждения теорем 3 и 4. Здесь мы рассмотрим более простой случай, когда E представляет собой сепарабельное гильбертово пространство H с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Предположим, что выполнены следующие условия.

C1. Борелевское множество D замкнуто и может быть представлено в виде $D = \{x \in H : Q(x) \geq 0\}$, где $Q(x)$ – непрерывный действительный функционал такой, что либо D , либо множество $H \setminus D$ представимо в виде конечного объединения непересекающихся выпуклых множеств из H . Пусть D имеет непустую внутренность и не содержит нулевого элемента из H .

C2. Квадратичная форма $\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума на $D \cap \text{Dom } A^{-1}$ в конечном числе точек $x^1, x^2, \dots, x^m$ из границы множества D . Предположим, что $\inf_{x \in D \cap H_A} \|x\|_A^2$ также достигается только в точках $x^1, x^2, \dots, x^m$.

C3. В гильбертовом пространстве H существуют такие окрестности U_i точек x^i , что функционал Q трижды дифференцируем по Фреше в точках множеств U_i , причем $\langle x^i, Q'(x^i) \rangle \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

C4. Для всех $i = 1, 2, \dots, m$ собственные значения γ_{ik} , $k = 1, 2, \dots$, ядерного оператора $AQ''(x^i): H \rightarrow H$ таковы, что не равен нулю

$$\det R_i := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_i \gamma_{ik}), \quad (2.2)$$

где $R_i = I - \lambda_i AQ''(x^i): H \rightarrow H$ и

$$\lambda_i = \frac{\langle x^1, A^{-1}x^1 \rangle}{\langle x^i, Q'(x^i) \rangle} > 0. \quad (2.3)$$

Из условия **C4** вытекает, что операторы R_i являются инъективными, $\text{Ker } R_i = \{0\}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, согласно альтернативе Фредгольма [30]

$\text{Ran } R_i = H$, и существует обратный оператор R_i^{-1} , определенный на всем H . В частности, $x^i \in \text{Dom } R_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть P_A – гауссовская мера в гильбертовом пространстве H , имеющая нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор A . Пусть выполнены условия **C1–C4**. Тогда имеют место равенства

$$x^i = \lambda_i A Q'(x^i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.4)$$

и при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$P_A(uD) = \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \langle x^1, A^{-1} x^1 \rangle \right\} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^m |\det R_i \langle R_i^{-1} x^i, A^{-1} x^i \rangle|^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (2.5)$$

Теорема 6 доказана в работе [24], банаховозначный вариант изложен в статьях [18], [19]. Условия **C2–C4** в теореме 6 записаны в несколько иной форме, более точной, чем соответствующие условия в работах [18], [19], [24].

Существует несколько модификаций теоремы 6, в которых используются иные условия. Приведем две такие модификации, довольно часто применяющиеся на практике. Напомним, что функционал действия гауссовской меры P_A в пространстве H определяется следующим образом (см. [8], [18], [31]):

$$I_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|x\|_A^2, & \text{если } x \in H_A, \\ +\infty, & \text{если } x \in H \setminus H_A. \end{cases}$$

Введем следующее условие.

C1. Борелевское множество D замкнуто в H и может быть представлено в виде $D = \{x \in H: Q(x) \geq 0\}$, где $Q(x)$ – непрерывный действительный функционал. Пусть D имеет непустую внутренность $\text{Int } D = \{x \in H: Q(x) > 0\}$ и не содержит нулевого элемента из H . Предположим, что выполнено равенство

$$\inf_{x \in \text{Int } D} I_A(x) = \inf_{x \in D} I_A(x).$$

Первая модификация теоремы 6, связанная с освобождением от требования выпуклости в условии **C1**, имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 6'. Пусть P_A – гауссовская мера в гильбертовом пространстве H , имеющая нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор A . Пусть выполнены условия **C1**, **C2–C4**. Тогда имеют место равенства (2.4) и справедливо асимптотическое соотношение (2.5).

Сформулируем еще одну модификацию теоремы 6, связанную с вырождением (обращением в нуль) $\det R_i$, заданного в (2.2). В этом случае асимптотика, стоящая в правой части формулы (2.5), заменяется на иное выражение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть P_A – гауссовская мера в гильбертовом пространстве H , имеющая нулевое среднее и инъективный ковариационный оператор A . Пусть выполнены условия **C1–C3** и следующее условие.

С4. Для каждого $i = 1, 2, \dots, t$ ядро оператора $R_i = I - \lambda_i A Q''(x^i)$ представляет собой одномерное подпространство в H , натянутое на вектор $e_i \in H$, причем $\|e_i\| = 1$, $\langle e_i, x^i \rangle \neq 0$ и $\langle e_i, A^{-1}x^i \rangle \neq 0$.

Тогда имеют место равенства (2.4) и при $u \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое соотношение

$$P_A(uD) = \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \langle x^1, A^{-1}x^1 \rangle \right\} \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^m |\langle e_i, x^i \rangle \langle e_i, A^{-1}x^i \rangle \det R_{i0}|^{-1/2} (1 + o(1)). \quad (2.6)$$

Здесь

$$\det R_{i0} := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_i \gamma_{ik}), \quad (2.7)$$

где γ_{ik} , $k = 1, 2, \dots$, – собственные значения ядерного оператора $AQ''(x^i): H \rightarrow H$ такие, что $\gamma_{ik} \neq 1/\lambda_i$.

3. ВЫБОР ГИЛЬБЕРТОВА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

Мы докажем теоремы 1 и 2, применяя теорему 5, доказательство теорем 3 и 4 проведем при помощи теорем 6, 6', 7. Нам удобнее сначала доказать теоремы 3 и 4.

Возьмем в качестве гильбертова пространства H обычное гильбертово пространство $L^2 \equiv L^2[0, \beta]$ действительных измеримых функций на $[0, \beta]$, квадрат которых интегрируем, со скалярным произведением и нормой, имеющими следующий вид:

$$\langle x, y \rangle = \int_0^\beta x(t)y(t) dt, \quad \|x\| = \left(\int_0^\beta x^2(t) dt \right)^{1/2}, \quad x, y \in L^2.$$

Мы будем полагать, что гауссовская мера Боголюбова μ_B задана в пространстве L^2 , имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C^0[0, \beta]$.

Как известно (см., например, [10], [17]), в этом случае мера μ_B имеет нулевое среднее и ковариационный оператор $A_B: L^2 \rightarrow L^2$ интегрального типа:

$$A_B x(t) = \int_0^\beta B(t, s)x(s) ds = \frac{1}{2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \int_0^\beta \operatorname{ch} \left(\omega|t-s| - \frac{\beta\omega}{2} \right) x(s) ds, \quad x \in L^2. \quad (3.1)$$

Пусть $C^2[0, \beta]$ – множество дважды дифференцируемых на $[0, \beta]$ функций $x(t)$.

ЛЕММА 1. Область значений ковариационного оператора A_B , определенного в формуле (3.1), имеет вид

$$\operatorname{Ran} A_B = \{x \in C^2[0, \beta]: x(0) = x(\beta), x'(0) = x'(\beta)\}. \quad (3.2)$$

Обратный оператор задается формулой

$$[A_B^{-1}y](t) = -my''(t) + m\omega^2 y(t), \quad y \in \operatorname{Ran} A_B, \quad t \in [0, \beta]. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения леммы получаются в результате двукратного дифференцирования по t равенства $y(t) = A_B x(t)$, (см., например, справочник [32]).

ЛЕММА 2. Собственные числа $\{\nu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ковариационного оператора A_B имеют следующий вид:

$$\nu_n = \frac{1}{m(\omega^2 + (2\pi\beta^{-1}n)^2)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.4)$$

или соответствуют L^2 -нормированные собственные функции

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{1}{\beta}} \begin{cases} \sqrt{2} \sin \frac{2\pi n t}{\beta}, & \text{если } n < 0, \\ 1, & \text{если } n = 0, \\ \sqrt{2} \cos \frac{2\pi n t}{\beta}, & \text{если } n > 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу на собственные числа для ядерного оператора A_B :

$$A_B \varphi = \nu \varphi, \quad \varphi \in L^2. \quad (3.6)$$

Поскольку оператор A_B является инъективным и положительным, в уравнении (3.6) параметр $\nu > 0$. Согласно соотношениям (3.2), (3.3) уравнение (3.6) равносильно следующей краевой задаче на собственные числа:

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + \left(\frac{1}{m\nu} - \omega^2 \right) \varphi(t) &= 0, \quad t \in [0, \beta], \\ \varphi(0) &= \varphi(\beta), \quad \varphi'(0) = \varphi'(\beta). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя справочник [33], заключаем, что решениями задачи (3.7) являются собственные числа (3.4) и собственные функции (3.5). Лемма доказана.

Отметим, что утверждение леммы 2 получено иным способом в статье [1], пояснения см. в [2].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Мы докажем теорему 3, применяя теоремы 6, 6' и 7, в которых будем полагать $H = L^2$, $P_A = \mu_B$, $A = A_B$. Пусть фиксировано число $p > 0$. До определенного момента доказательство всех трех пунктов теоремы 3 проводится единым образом.

4.1. Выбор основного функционала. Возьмем в качестве функционала Q , участвующего в формулировках теорем 6, 6', 7 (см. формулу (2.4)), следующий функционал:

$$G(x) := \int_0^\beta |x(t)|^p dt - 1, \quad x \in L^2. \quad (4.1)$$

Обозначим через $\mathcal{X}$ множество функций из $C^0[0, \beta]$, имеющих конечное число нулей. Очевидно, множество $\mathcal{X}$ плотно в $C^0[0, \beta]$, а следовательно, и в L^2 . Отметим, что $0 \notin \mathcal{X}$ (здесь функция, тождественно равная нулю на $[0, \beta]$, также обозначена через 0).

Ниже мы используем определение производной по Фреше, данное в [25], где допущается, что рассматриваемый оператор определен лишь на некотором всюду плотном подмножестве банахова пространства; кроме того, мы полагаем, что он может принимать значения, равные $\pm\infty$ (см. определение 1 в [26]).

ЛЕММА 3. 1. *Функционал G трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in \mathcal{X}$ и имеет производные*

$$G'(x) = p|x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \quad (4.2)$$

$$G''(x) = p(p-1)|x(t)|^{p-2}, \quad (4.3)$$

$$G'''(x)[h, g, v] = \int_0^\beta p(p-1)(p-2)|x(t)|^{p-3} \operatorname{sign} x(t) h(t) g(t) v(t) dt, \quad h, g, v \in L^2.$$

2. *Функционал G является выпуклым функционалом¹⁾ при $p \geq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 леммы получаем, применяя известные формулы для первых трех производных интегрального функционала (4.1) [26], [34]. Утверждение 2 леммы следует из выпуклости вниз функции $|x|^p$ при $p \geq 1$ и $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что функционал (4.1) не является выпуклым вверх функционалом при $0 < p < 1$.

4.2. Решение экстремальной задачи. Положим

$$D = \{x \in L^2: G(x) \geq 0\}. \quad (4.4)$$

В силу п. 2 леммы 3 множество $L^2 \setminus D$ является выпуклым при $p \geq 1$. Очевидно, что множество (4.4) имеет непустую внутренность и не содержит нулевого элемента. Таким образом, множество (4.4) удовлетворяет условию **C1** при $p \geq 1$. Можно показать, что при $0 < p < 1$ множество (4.4) удовлетворяет условию **C1**.

Решим экстремальную задачу на минимум $\langle x, A_B^{-1}x \rangle$ из условия **C2** для множества D , определенного в (4.4), и ковариационного оператора A_B , заданного в (3.1). Для $p > 0$ определим постоянную функцию

$$x_0(t) = \beta^{-1/p}, \quad t \in [0, \beta]. \quad (4.5)$$

ЛЕММА 4. *Пусть $p > 0$ фиксировано. Тогда минимум в экстремальной задаче*

$$\langle x, A_B^{-1}x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in D \cap \operatorname{Dom} A_B^{-1}, \quad (4.6)$$

равен $m\omega^2\beta^{(p-2)/p}$ и достигается на двух функциях $x_0(t)$ и $-x_0(t)$, лежащих на границе ∂D . Минимум $\inf_{x \in D \cap H_{A_B}} \|x\|_{A_B}^2$ также достигается только в двух точках x_0 и $-x_0$.

¹⁾Напомним, что определение и некоторые свойства выпуклых множеств и выпуклых функционалов в банаховом пространстве имеются в книгах [25], [26]. Выпуклые вниз функции часто называют просто выпуклыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что минимум в задаче (4.6) достигим. В силу леммы 2 максимальное собственное значение оператора A_B равно $\nu_0 = 1/m\omega^2$. Следовательно, минимальное собственное значение оператора A_B^{-1} равно $m\omega^2$. Таким образом, согласно известному вариационному описанию собственных значений компактного симметричного оператора [35], [36] справедлива оценка $\langle x, A_B^{-1}x \rangle \geq m\omega^2 \|x\|^2$, $x \in L^2$. Из этой оценки и первой теоремы Вейерштрасса (см. теорему 9.2 и замечание 9.1 в [25]) следует, что минимум в задаче (4.6) достигается.

Решая экстремальную задачу (4.6) методом множителей Лагранжа [26], убеждаемся, что точка, доставляющая минимум в задаче (4.6), принадлежит границе, и для нее выполнено соотношение $x = \lambda A_B G'(x)$ (ср. с (2.4)). Таким образом, уравнение для экстремальной функции $x(t)$ согласно соотношениям (3.1) и (4.2) является нелинейным интегральным уравнением Хаммерштейна и имеет вид

$$x(t) = \frac{\lambda p}{2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \int_0^\beta \operatorname{ch} \left(\omega|t-s| - \frac{\beta\omega}{2} \right) |x(s)|^{p-1} \operatorname{sign} x(s) ds, \quad t \in [0, \beta], \quad (4.7)$$

где $\lambda > 0$ – множитель Лагранжа, при этом выполнено условие связи

$$\int_0^\beta |x(t)|^p dt = 1. \quad (4.8)$$

Поскольку $x \in \operatorname{Ran} A_B$, заключаем, учитывая (3.2), (3.3), что экстремальная функция дважды дифференцируема на $[0, \beta]$. Используя формулу (3.3) для обратного оператора, убеждаемся, что интегральное уравнение (4.7) эквивалентно следующей нелинейной краевой задаче:

$$\begin{aligned} x''(t) &= \omega^2 x(t) - \frac{\lambda p}{m} |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \quad t \in [0, \beta], \\ x(0) &= x(\beta), \quad x'(0) = x'(\beta). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Мы будем искать **положительное** решение задачи (4.9) с условием (4.8), т.е. будем полагать, что $x(t) > 0$, $t \in [0, \beta]$. Можно показать, что знакопеременные решения задачи (4.8), (4.9) не доставляют минимума в экстремальной задаче (4.6).

Для положительного $x(t)$ уравнение в (4.9) и условие (4.8) принимают вид

$$x''(t) = \omega^2 x(t) - \frac{\lambda p}{m} x^{p-1}(t), \quad t \in [0, \beta], \quad (4.10)$$

$$\int_0^\beta x^p(t) dt = 1. \quad (4.11)$$

Записывая уравнение (4.10) в виде $d(x'(t))^2 = \omega^2 dx^2(t) - (2\lambda/m) dx^p(t)$, приходим к следующему факту: если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (4.10), то эта функция удовлетворяет также уравнению

$$(x'(t))^2 = \omega^2 x^2(t) - \frac{2\lambda}{m} x^p(t) + C, \quad t \in [0, \beta],$$

при некоторой константе C . Учитывая это, несложно показать, что для заданного значения $\lambda > 0$ задача (4.9) имеет единственное положительное решение

$x_0(t) \equiv h > 0$, которое является постоянной функцией. Используя условие связи (4.11), получаем $h = \beta^{-1/p}$, следовательно, найденная положительная функция имеет вид (4.5). Подставляя функцию (4.5) в уравнение (4.10), получаем значение множителя Лагранжа

$$\lambda_0 = \frac{m\omega^2}{p} \beta^{(p-2)/p}. \quad (4.12)$$

Учитывая вышеизложенное, приходим к выводу, что единственная положительная функция x_0 , доставляющая минимум в задаче (4.6), имеет вид (4.5). Ясно, что в силу формулы (4.11) $x_0(t)$ принадлежит границе множества D . Очевидно, что отрицательная функция $-x_0(t)$ также доставляет минимум в задаче (4.6).

Используя формулы (3.3), (4.5), найдем минимальное значение $\langle x, A_B^{-1}x \rangle$:

$$\langle x_0, A_B^{-1}x_0 \rangle = m\omega^2 \int_0^\beta x_0^2(t) dt = m\omega^2 \beta^{(p-2)/p}. \quad (4.13)$$

Рассматривая гильбертово пространство $(H_{A_B}, \|\cdot\|_{A_B})$, ассоциированное с ковариационным оператором A_B , можно доказать, что $\inf_{x \in D \cap H_{A_B}} \|x\|_{A_B}^2$ также достигается только в двух точках x_0 и $-x_0$. Лемма доказана.

Отметим, что при $p = 2$ утверждение леммы 4 согласуется с леммой 2: функция (4.5) при $p = 2$ совпадает с собственной функцией $\varphi_0(t)$ из формулы (3.5), а минимальное значение $m\omega^2$ совпадает с $1/\nu_0$.

4.3. Исследование спектра интегрального оператора $A_B G''(x_0)$. Из лемм 3, 4 следует, что при $p \geq 1$ гауссовская мера Боголюбова μ_B и множество (4.4) удовлетворяют условиям **C1–C3** с $m = 2$, $x^1 = x_0$ и $x^2 = -x_0$. При $0 < p < 1$ для меры μ_B и множества (4.4) выполнены условия $\widetilde{\mathbf{C1}}$, **C2**, **C3** также с $m = 2$, $x^1 = x_0$ и $x^2 = -x_0$. В обоих случаях в силу соотношений (4.2), (4.12) для чисел λ_i из формулы (2.3) справедливы равенства $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$. Согласно формуле (4.3) имеет место равенство $G''(x_0) = G''(-x_0)$, поэтому достаточно исследовать спектр интегрального оператора $A_B G''(x_0): L^2 \rightarrow L^2$. Этот оператор является ядерным как композиция ядерного оператора A_B и ограниченного оператора $G''(x_0)$ [37]. В силу формул (4.3) и (4.5) выполнено равенство

$$G''(x_0) = p(p-1)\beta^{(2-p)/p}. \quad (4.14)$$

ЛЕММА 5. Пусть $p > 0$ фиксировано. Тогда собственные числа $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ядерного интегрального оператора $A_B G''(x_0)$ имеют следующий вид:

$$\gamma_n = \frac{p(p-1)\beta^{(2-p)/p}}{m(\omega^2 + (2\pi\beta^{-1}n)^2)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу на собственные числа для ядерного оператора $A_B G''(x_0)$:

$$A_B G''(x_0)z = \gamma z, \quad z \in L^2. \quad (4.16)$$

Эта задача согласно формуле (4.14) принимает следующий вид:

$$p(p-1)\beta^{(2-p)/p} A_B z = \gamma z, \quad z \in L^2, \quad (4.17)$$

и, по существу, совпадает с уже решенной задачей (3.6). Сопоставляя (3.6) и (4.17), заключаем, что собственные числа задачи (4.17) записываются в виде (4.15). Лемма доказана.

Отметим, что в леммах 4 и 5 мы не налагали никаких дополнительных ограничений на число $p > 0$.

Определим оператор $R = I - \lambda_0 A_B G''(x_0): L^2 \rightarrow L^2$; этот оператор в рассматриваемой нами ситуации, очевидно, играет роль оператора R_1 из условия С4.

4.4. Вычисление ядра оператора R . При проверке выполнения условия С4 важное значение имеет следующее утверждение.

ЛЕММА 6. 1. Пусть фиксировано число $p > 0$ такое, что выполнено условие невырожденности (1.4). Тогда оператор R невырожден, т.е. $\text{Ker } R = \{0\}$.

2. При $p = 2$ ядро оператора R представляет собой одномерное подпространство в L^2 , натянутое на вектор φ_0 из формулы (3.5), при этом $\varphi_0 \equiv x_0$.

3. Пусть число $p > 2$ таково, что не выполнено (1.4), т.е. $p = 2 + \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2 \omega^2}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда ядро оператора R представляет собой двумерное подпространство в L^2 , натянутое на векторы φ_n и φ_{-n} , заданные в формуле (3.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем число $p > 0$ и для $y \in L^2$ решим уравнение $[I - \lambda_0 A_B G''(x_0)]y = 0$. Согласно формулам (4.12) и (4.14) это уравнение равносильно уравнению

$$m\omega^2(p-1)A_B y = y, \quad y \in L^2. \quad (4.18)$$

При $p = 1$ данное уравнение, очевидно, имеет единственное решение $y = 0$. Пусть $p \neq 1$. Сопоставляя задачу (3.6) и уравнение (4.18), заключаем, что ядро оператора R является вырожденным тогда и только тогда, когда число $p > 0$ удовлетворяет равенству $[m\omega^2(p-1)]^{-1} = \nu_n$ при некотором $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где ν_n определено в формуле (3.4). Отсюда и из леммы 2 вытекают утверждения леммы.

4.5. Вычисление $\det R$. Нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 7. 1. Пусть фиксированы комплексные числа a и b , $b \neq \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{k+b}\right) \left(1 - \frac{a}{k-b}\right) = \frac{b\pi}{\sin \pi b} \begin{cases} \frac{\sin[(a+b)\pi]}{(a+b)\pi}, & \text{если } a+b \neq 0, \\ 1, & \text{если } a+b = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

2. Пусть фиксированы действительные числа $c > 0$ и d . Тогда

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{d}{k^2 + c^2}\right) = \frac{c}{\text{sh } \pi c} \begin{cases} \frac{\sin(\pi \sqrt{d-c^2})}{\sqrt{d-c^2}}, & \text{если } d \neq c^2, \\ \pi, & \text{если } d = c^2. \end{cases} \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (4.19) приведена в справочнике [38] (см. п. 6.2.1, № 12); опечатка, допущенная в [38], нами исправлена. Отметим, что соотношение при $a+b=0$ в формуле (4.19) получается в результате предельного перехода

$a + b \rightarrow 0$. Положив в формуле (4.19) $a = -ic + \sqrt{d - c^2}$, $b = ic$, где $i = \sqrt{-1}$, получаем после несложных вычислений соотношения (4.20). Отметим, что формула (4.20) при $d < c^2$ получена иным способом в статье [2].

ЛЕММА 8. 1. Пусть фиксировано число $0 < p < 2$. Тогда справедливо равенство

$$\det R \equiv \det[I - \lambda_0 A_B G''(x_0)] = \frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\beta\omega}{2}\sqrt{2-p}\right)}{\operatorname{sh}^2\frac{\beta\omega}{2}}. \quad (4.21)$$

2. При $p = 2$ для чисел γ_k , заданных в (4.15), и $\lambda_0 = m\omega^2/2$ выполнено равенство

$$\det R_0 := \prod_{\substack{-\infty < k < +\infty, \\ k \neq 0}} (1 - \lambda_0 \gamma_k) = \frac{\beta^2 \omega^2}{4 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta\omega}{2}}. \quad (4.22)$$

3. Пусть фиксировано число $p > 2$. Тогда справедливо равенство

$$\det R = -\frac{\sin^2\left(\frac{\beta\omega}{2}\sqrt{p-2}\right)}{\operatorname{sh}^2\frac{\beta\omega}{2}}. \quad (4.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $p > 0$, $p \neq 2$, согласно формулам (4.12) и (4.15) получаем соотношения

$$\det R \equiv \prod_{k=-\infty}^{\infty} (1 - \lambda_0 \gamma_k) = (2-p) \left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(p-1)\beta^2 \omega^2}{\beta^2 \omega^2 + 4\pi^2 k^2}\right) \right]^2. \quad (4.24)$$

Если $p = 2$, то

$$\det R_0 = \left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta^2 \omega^2}{\beta^2 \omega^2 + 4\pi^2 k^2}\right) \right]^2. \quad (4.25)$$

К произведениям из последних двух равенств применим пункт 2 леммы 7 с параметрами $c = \beta\omega/2\pi$, $d = (p-1)\beta^2 \omega^2/4\pi^2$. Для этих чисел справедливо равенство $d - c^2 = (p-2)\beta^2 \omega^2/4\pi^2$. Используя последнее равенство и выполняя простые вычисления, убеждаемся, что из формул (4.20) вытекают соотношения (4.21)–(4.23). Лемма доказана.

Отметим, что детерминант (4.25) равен нулю для чисел $p > 2$ вида (1.9).

4.6. Вычисление $\langle R^{-1}x_0, A_B^{-1}x_0 \rangle$ в невырожденном случае.

ЛЕММА 9. Пусть фиксировано число $p > 0$ такое, что выполнено условие невырожденности (1.4). Тогда уравнение $[I - \lambda_0 A_B G''(x_0)]y = x_0$, $y \in L^2$, имеет единственное решение

$$y_0(t) \equiv R^{-1}x_0 = \frac{x_0(t)}{2-p}, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.26)$$

Справедливо равенство

$$\langle R^{-1}x_0, A_B^{-1}x_0 \rangle = \frac{m\omega^2 \beta^{(p-2)/p}}{2-p}. \quad (4.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно п. 1 леммы 6 для рассматриваемых значений p на всем L^2 однозначно определен оператор R^{-1} . Используя равенство $x_0 = \lambda_0 A_B G'(x_0)$ и формулы (4.2), (4.5), имеем $x_0 = \lambda_0 p \beta^{(2-p)/p} A_B x_0$. В силу формулы (4.14) справедливо равенство $A_B G''(x_0) x_0 = p(p-1) \beta^{(2-p)/p} A_B x_0$. Из последних двух соотношений следует, что $\lambda_0 A_B G''(x_0) x_0 = (p-1) x_0$. Отсюда получаем формулу $[I - \lambda_0 A_B G''(x_0)] x_0 = (2-p) x_0$, из которой вытекает (4.26). Используя соотношения (4.13) и (4.26), получаем (4.27). Лемма доказана.

4.7. Доказательство п. 1 теоремы 3. Рассмотрим сначала случай $2 > p \geq 1$. В этом случае вследствие лемм 3, 4 и п. 1 леммы 6 гауссовская мера μ_B и множество (4.4) удовлетворяют условиям **C1–C4** с $H = L^2$, $m = 2$, $x^1 = x_0$ и $x^2 = -x_0$. Таким образом, применима теорема 6, и мы можем использовать соотношение (2.5). Несложно увидеть, что правые части формулы (2.5) для обеих экстремальных функций совпадают, поэтому достаточно провести вычисления только для точки x_0 . Подставляя выражения из формул (4.13), (4.21) и (4.27) в соотношение (2.5), мы получаем формулы (1.12) и (1.13). Таким образом, п. 1 теоремы 3 доказан для значений $2 > p \geq 1$.

Пусть теперь $1 > p > 0$. В этом случае для меры μ_B и множества (4.4) выполнены условия **C1, C2–C4** также с $H = L^2$, $m = 2$, $x^1 = x_0$ и $x^2 = -x_0$. Применяя теорему 6' и формулы (4.13), (4.21), (4.27), мы снова получаем соотношения (1.12) и (1.13). Пункт 1 теоремы 3 доказан полностью.

4.8. Доказательство п. 2 теоремы 3. Пусть $p = 2$. В этом случае вследствие лемм 3 и 4 гауссовская мера μ_B и множество (4.4) удовлетворяют условиям **C1–C3** с $H = L^2$, $m = 2$, $x^1 = x_0$ и $x^2 = -x_0$. Покажем, что применима теорема 7. Рассмотрим случай экстремальной точки x_0 ; рассуждения и вычисления в случае второй точки $-x_0$ такие же. Согласно п. 2 леммы 6 ядро оператора $R = I - \lambda_0 A_B G''(x_0)$ представляет собой одномерное подпространство в L^2 , натянутое на вектор x_0 . В силу формулы (4.13) и условия нормированности функции x_0 справедливы равенства

$$\langle x_0, x_0 \rangle = 1, \quad \langle x_0, A_B^{-1} x_0 \rangle = m \omega^2. \quad (4.28)$$

Таким образом, выполнено условие **C4** и применима теорема 7 с $H = L^2$, $m = 2$, $x^1 = x_0$, $x^2 = -x_0$, $e_1 = e_2 = x_0$. Используем соотношения (2.6) и (2.7). Здесь также правые части формулы (2.6) для обеих экстремальных функций совпадают. Несложно убедиться, что для определителей из формулы (2.7) выполнены равенства $\det R_{10} = \det R_{20} = \det R_0$, где $\det R_0$ задан в соотношении (4.22). Подставляя выражения из формул (4.13), (4.22) и (4.28) в соотношение (2.6), мы получаем (1.14). Пункт 2 теоремы 3 доказан.

4.9. Доказательство п. 3 теоремы 3. Пусть фиксировано число $p > 2$ такое, что выполнено (1.4). В этом случае вследствие лемм 3, 4 и п. 1 леммы 6 гауссовская мера μ_B и множество (4.4) удовлетворяют условиям **C1–C4** с $H = L^2$, $m = 2$, $x^1 = x_0$ и $x^2 = -x_0$. Таким образом, применима теорема 6, и мы можем снова использовать соотношение (2.5). Здесь также правые части формулы (2.5) для обеих экстремальных функций совпадают. Подставляя выражения из формул (4.13), (4.23) и (4.27)

в соотношение (2.5), мы получаем формулы (1.15) и (1.16). Теорема 3 полностью доказана.

Отметим, что п. 2 теоремы 3 можно доказать также при помощи известного результата Золотарева, см. [39] или теорему 3.8 (п. 2) в [18].

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 И ФОРМУЛ (1.18), (1.19)

Доказательство теоремы 4 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3 на основе теоремы 6'. При этом существенно используются утверждения, полученные в разделе 4. Приведем основные моменты. В качестве гильбертова пространства H , участвующего в формулировке теоремы 6', возьмем опять пространство L^2 . В качестве функционала Q возьмем функционал

$$G_1(x) := \int_0^\beta x^p(t) dt - 1, \quad x \in L^2. \quad (5.1)$$

Этот функционал не является выпуклым. Отметим, что в случае такого функционала экстремальная задача из условия **C2** имеет единственное решение – функцию $x_0(t)$, заданную в формуле (4.5). В этом можно убедиться, обратившись к доказательству леммы 4. Для функционалов (4.1) и (5.1) справедливы равенства $G(x_0) = G_1(x_0)$, $G'(x_0) = G'_1(x_0)$, $G''(x_0) = G''_1(x_0)$. Поэтому утверждения лемм 5–9 остаются справедливыми и для оператора $R_1 := I - \lambda_0 A_B G''_1(x_0) \equiv R$.

Далее, предполагая выполненными условия теоремы 4, применяем теорему 6' с $H = L^2$, $m = 1$, $x^1 = x_0$. Сравнивая полученные в результате соотношения с формулами (1.12), (1.15), приходим к формуле (1.17). Теорема 4 доказана.

Доказательство формул (1.18) и (1.19) проводится при помощи леммы 4 и принципа больших отклонений для гауссовских мер (см., например, [8], [11], [18]).

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 И 2

Сначала мы изложим доказательство теоремы 1, которое проведем при помощи теоремы 5.

6.1. Выбор банахова функционального пространства. Для $p > 2$ не удастся ограничиться только гильбертовым пространством $L^2[0, \beta]$ и нужно привлекать пространства $L^p[0, \beta]$. Зафиксируем числа $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$. Положим

$$\tilde{p} := \begin{cases} p, & \text{если } p > 2, \\ 2, & \text{если } 0 < p \leq 2. \end{cases} \quad (6.1)$$

Возьмем в качестве банахова пространства E из теоремы 5 банахово пространство $L^{\tilde{p}} \equiv L^{\tilde{p}}[0, \beta]$ функций, $\tilde{p}$ -я степень которых интегрируема на отрезке $[0, \beta]$. Норма в $L^{\tilde{p}}$ обозначается через $\|\cdot\|_{\tilde{p}}$ и определена в (1.8). Очевидно, $\tilde{p} \geq 2$. Пусть $2 \geq \tilde{q} > 1$ обозначает число, сопряженное к $\tilde{p}$, т.е. $1/\tilde{p} + 1/\tilde{q} = 1$. Напомним, что банахово пространство $L^{\tilde{q}}$ является сопряженным к пространству $L^{\tilde{p}}$.

В данном разделе мы будем полагать, что гауссовская мера Боголюбова μ_B задана в пространстве $L^{\tilde{p}}[0, \beta]$, имея в виду, что эта мера сосредоточена на $C^0[0, \beta]$.

Известно, что в этом случае мера μ_B имеет нулевое среднее и ковариационный оператор $A_B: L^{\tilde{q}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$ интегрального типа, который определяется по формуле (3.1) для $x \in L^{\tilde{q}}$. Здесь также справедлива лемма 1. Отметим, что теперь оператор A_B зависит от $\tilde{p}$, в частности $\text{Dom } A_B = L^{\tilde{q}}$, но указывать эту зависимость мы не будем. Будем теперь обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ каноническую билинейную форму между пространствами $L^{\tilde{p}}$ и $L^{\tilde{q}}$, которая, как известно, имеет интегральный вид: $\langle h, g \rangle = \int_0^1 h(t)g(t) dt$ для $h \in L^{\tilde{p}}$, $g \in L^{\tilde{q}}$.

Нам понадобится следующее полезное неравенство для функционала (1.8).

ЛЕММА 10. Пусть фиксированы числа $0 < s < r < \infty$. Если $\|x\|_r < \infty$, то справедливо неравенство $\|x\|_s \leq \beta^{(r-s)/rs} \|x\|_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы имеется, например, в книгах [30] и [34].

6.2. Выбор основного функционала. Мы докажем теорему 1, применяя теорему 5, в которой будем полагать $E = L^{\tilde{p}}$, $P_A = \mu_B$, $A = A_B$ и $f \equiv 1$.

Возьмем в качестве функционала F , участвующего в формулировке теоремы 5, следующий функционал:

$$\Psi(x) := -\|x\|_p^\alpha \equiv -\left(\int_0^\beta |x(t)|^p dt\right)^{\alpha/p}, \quad x \in L^{\tilde{p}}. \quad (6.2)$$

Наша цель – применить теорему 5 к функционалу (6.2) и гауссовской мере Боголюбова μ_B . Положим

$$v = u^{1/(2-\alpha)}. \quad (6.3)$$

Тогда $u = v^{2-\alpha}$, кроме того, $v \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$. Функционал (6.2) обладает свойством однородности порядка α : $\Psi(rx) = r^\alpha \Psi(x)$, $r > 0$. Используя это свойство и равенство (6.3), запишем среднее из формулы (1.3) в виде модельного интеграла Лапласа:

$$\mathbf{E} \exp \left\{ u \left(\int_0^\beta |\xi(t)|^p dt \right)^{\alpha/p} \right\} = \mathbf{E} e^{-u\Psi(\xi)} = \int_{L^{\tilde{p}}} e^{-v^2\Psi(x)} d\mu_B(vx). \quad (6.4)$$

Функционал $-\Psi(x)$ представляет собой степень интегрального функционала. Как известно, интегральные функционалы дифференцируемы по Фреше (см. [25], [26], [34]). Напомним, что множество $\mathcal{X}$ было определено перед леммой 3.

ЛЕММА 11. Функционал Ψ трижды дифференцируем по Фреше в каждой точке $x \in \mathcal{X}$, при этом первые две производные имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= -\alpha \left(\int_0^\beta |x(s)|^p ds \right)^{(\alpha-p)/p} |x(t)|^{p-1} \text{sign } x(t), \\ \Psi''(x)[h, g] &= \alpha(1-p) \|x\|_p^{\alpha-p} \langle h, |x(t)|^{p-2} g \rangle + \\ &\quad + \alpha(p-\alpha) \|x\|_p^{\alpha-2p} \langle h, |x(t)|^{p-1} \text{sign } x(t) \rangle \times \\ &\quad \times \langle g, |x(t)|^{p-1} \text{sign } x(t) \rangle, \quad h, g \in L^{\tilde{p}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

При $x \in \mathcal{X}$ определен линейный оператор $\Psi''(x): L^{\bar{p}} \rightarrow L^{\bar{q}}$, действующий по правилу

$$\begin{aligned} \Psi''(x)g = & \alpha(1-p)\|x\|_p^{\alpha-p}|x(t)|^{p-2}g + \\ & + \alpha(p-\alpha)\|x\|_p^{\alpha-2p}|x(t)|^{p-1}\operatorname{sign} x(t)\langle g, |x(t)|^{p-1}\operatorname{sign} x(t) \rangle, \quad g \in L^{\bar{p}}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получаем, применяя теорему о суперпозиции дифференцируемых отображений [26] и известные формулы для первых двух производных функционала $G_0(x) = \int_0^\beta |x(t)|^p dt$, см. лемму 3 и [26], [34]. При этом формула (6.6), очевидно, вытекает из равенств (6.5).

ЛЕММА 12. Для функционала Ψ выполнено условие **D1**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проводится при помощи леммы 10.

6.3. Решение экстремальной задачи. Решим экстремальную задачу из условия **D2** для функционала (6.2) и ковариационного оператора A_B . Введем следующие положительные величины:

$$\sigma^2 = \sigma^2(p) = \frac{\beta^{(2-p)/p}}{m\omega^2}, \quad b_0 = b_0(p, \alpha) = (\alpha\sigma^2)^{1/(2-\alpha)}. \quad (6.7)$$

Определим постоянную строго положительную функцию

$$x_1(t) := b_0 x_0(t) = \left(\frac{\alpha}{m\omega^2} \right)^{1/(2-\alpha)} \beta^{(\alpha-p)/(p(2-\alpha))}, \quad t \in [0, \beta], \quad (6.8)$$

где функция $x_0(t)$ задана в формуле (4.5). Таким образом, $x_1 \in \mathcal{X}$. Несложно видеть, что $\|x_1\|_p = b_0$.

ЛЕММА 13. Пусть фиксированы $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда функционал $\Lambda(x) := \Psi(x) + \langle x, A_B^{-1}x \rangle/2$ достигает на $\operatorname{Dom} A_B^{-1}$ своего минимума, равного $-q_0$, в двух точках $x_1(t)$ и $-x_1(t)$, где число q_0 определено в формуле (1.2). При этом $\inf_{x \in H_{A_B}} [\Psi(x) + \|x\|_{A_B}^2/2]$ также достигается только в двух точках $x_1(t)$ и $-x_1(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к условной экстремальной задаче, убеждаемся, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \operatorname{Dom} A_B^{-1}} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_B^{-1}x \rangle - \|x\|_p^\alpha \right] &= \inf_{b>0} \inf_{\substack{x \in \operatorname{Dom} A_B^{-1} \\ \|x\|_p=b}} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_B^{-1}x \rangle - \|x\|_p^\alpha \right] = \\ &= \inf_{b>0} \inf_{\substack{x \in \operatorname{Dom} A_B^{-1} \\ \|x\|_p=b}} \left[\frac{1}{2} \langle x, A_B^{-1}x \rangle - b^\alpha \right] = \\ &= \inf_{b>0} \left(\frac{b^2}{2\sigma^2} - b^\alpha \right) = \frac{b_0^2}{2\sigma^2} - b_0^\alpha = -q_0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Несложно проверить, что минимум в (6.9) достигается только в двух точках $x_1(t)$ и $-x_1(t)$.

6.4. Исследование спектра интегрального оператора $A_B \Psi''(x_1)$. При $p > 0$ вследствие лемм 11–13 гауссовская мера Боголюбова μ_B и функционал (6.2) удовлетворяют условиям **D1–D3** с $E = L^{\tilde{p}}$, $f \equiv 1$, $F = \Psi$, $m = 2$, $x^1 = x_1 > 0$ и $x^2 = -x_1$.

Рассмотрим условие **D4**. Согласно формуле (6.6) имеет место равенство $\Psi''(x_1) = \Psi''(-x_1)$, поэтому достаточно исследовать спектр интегрального оператора $A_B \Psi''(x_1): L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$. Этот оператор является ядерным как композиция ядерного оператора A_B и ограниченного оператора $\Psi''(x_1)$ [37]. Учитывая равенство $\|x_1\|_p = b_0$ и используя формулы (6.6)–(6.8), для $t \in [0, \beta]$, $z \in L^{\tilde{p}}$ получаем соотношение

$$[\Psi''(x_1)z](t) = (1-p)m\omega^2 z(t) + (p-\alpha) \frac{m\omega^2}{\beta} \int_0^\beta z(s) ds. \quad (6.10)$$

ЛЕММА 14. Пусть фиксированы $p > 0$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда собственные значения $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^\infty$ ядерного интегрального оператора $A_B \Psi''(x_1)$ имеют следующий вид:

$$\gamma_0 = 1 - \alpha, \quad \gamma_n = \frac{(1-p)\omega^2}{\omega^2 + (2\pi\beta^{-1}n)^2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 5 при помощи леммы 1 и формулы (6.10). Отметим, что в леммах 11–14 мы не налагали никаких дополнительных ограничений на число $p > 0$.

Определим оператор $R = I + A_B \Psi''(x_1): L^{\tilde{p}} \rightarrow L^{\tilde{p}}$; этот оператор в рассматриваемой нами задаче играет роль оператора R_1 из условия **D4**.

6.5. Вычисление определителя оператора R .

ЛЕММА 15. Пусть задано число $0 < \alpha < 2$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Предположим, что фиксировано число $0 < p < 2$. Тогда

$$\det R \equiv \prod_{n=-\infty}^\infty (1 + \gamma_n) = \frac{(2-\alpha) \operatorname{sh}^2\left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{2-p}\right)}{(2-p) \operatorname{sh}^2 \frac{\beta\omega}{2}}.$$

2. При $p = 2$ выполнено равенство

$$\det R = \frac{(2-\alpha)\beta^2\omega^2}{4 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta\omega}{2}}.$$

3. Пусть фиксировано число $p > 2$. Тогда

$$\det R = \frac{(2-\alpha) \sin^2\left(\frac{\beta\omega}{2} \sqrt{p-2}\right)}{(p-2) \operatorname{sh}^2 \frac{\beta\omega}{2}}. \quad (6.11)$$

4. Для оператора $A_B \Psi''(x_1)$ выполнено условие **D4** при всех $p > 0$, удовлетворяющих условию невырожденности (1.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первых трех утверждений проводится аналогично доказательству леммы 8 при помощи леммы 14 и п. 2 леммы 7. Утверждение 4 леммы вытекает из первых трех и того факта, что детерминант (6.11) равен нулю для чисел $p > 2$ таких, что $p = 2 + \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2 \omega^2}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.

6.6. Доказательство теоремы 1. Пусть фиксированы число $0 < \alpha < 2$ и число $p > 0$ такое, что выполнено условие невырожденности (1.4). Тогда вследствие лемм 11–15 гауссовская мера Боголюбова μ_B и функционал (6.2) удовлетворяют условиям D1–D4 с $E = L^{\bar{p}}$, $f \equiv 1$, $F = \Psi$, $m = 2$, $x^1 = x_1$ и $x^2 = -x_1$. Таким образом, к интегралу (6.4) применима теорема 5, и мы можем использовать соотношение (2.1). Несложно видеть, что правые части формулы (2.1) для обеих экстремальных функций совпадают, поэтому достаточно провести вычисления только для точки x_1 . Используя леммы 13, 15 и формулы (2.1), (6.3), мы получаем утверждения 1–3 теоремы 1. Теорема 1 доказана.

6.7. Доказательство теоремы 2 и формул (1.10), (1.11). Доказательство теоремы 2 проводится на основе теоремы 5 по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. При этом существенным образом используются утверждения, полученные в разделе 6. Отметим, что здесь в качестве функционала F берется функционал $\Psi_1(x) := -(\int_0^\beta x^p(t) dt)^{\alpha/p}$, $x \in L^{\bar{p}}$. При этом соответствующая экстремальная задача из условия D2 имеет единственное решение – функцию $x_1(t)$, заданную в (6.8).

Доказательство формул (1.10), (1.11) проводится при помощи леммы 13 и принципа больших отклонений для гауссовских мер в интегральной форме (теоремы Варадана), см. [8], [18].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-01-00700).

Список литературы

- [1] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **119:2** (1999), 345–352.
- [2] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **126:1** (2001), 149–163.
- [3] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **127:1** (2001), 125–142.
- [4] Н. Н. Боголюбов, *ДАН СССР*, **99** (1954), 225–226; А. В. Свидзинский, *ЖЭТФ*, **31** (1956), 324; Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Аспекты теории полярона*, Сообщения ОИЯИ, Р17–81–65, ОИЯИ, Дубна, 1981; G. W. Johnson, M. L. Lapidus, *The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus*, Clarendon Press, Oxford, 2000.
- [5] Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы*, Мир, М., 1969.
- [6] Yu. K. Belayev, “Continuity and Hölder’s conditions for sample functions of stationary Gaussian processes”, *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab.*, V. II, Univ. California Press, Berkeley, 1961, 23–33.
- [7] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, Т. 1, Наука, М., 1971.
- [8] М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, ТВиМС, Киев, 1995.
- [9] В. И. Питербарг, *Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей*, Изд-во МГУ, М., 1988.
- [10] Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах*, Мир, М., 1979.
- [11] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Наука, М., 1997.
- [12] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, Наука, М., 1985.
- [13] А. Д. Егоров, Л. А. Янович, *ДАН БССР*, **14** (1970), 873–876; П. И. Соболевский, Л. А. Янович, *ДАН БССР*, **18** (1974), 965–968.
- [14] F. W. Wiegel, *Phys. Rep.*, **16:2** (1975), 57–114; Л. А. Пастур, *ТМФ*, **32:1** (1977), 88–95; L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley, New York, 1981; M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan, *Comm. Pure Appl. Math.*, **36:4** (1983), 505–528;

- В. П. Маслов, *Тр. МИАН*, **163** (1984), 150–180; M. I. Freidlin, *Functional Integration and Partial Differential Equations*, Ann. of Math. Stud., **109**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1985; Дж. Льюис, К. Фистер, *УМН*, **50:2(302)** (1995), 47–88.
- [15] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Pure Appl. Math., **86**, Academic Press, New York, 1979.
- [16] R. S. Ellis, J. S. Rosen, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273:2** (1982), 447–481.
- [17] R. S. Ellis, J. S. Rosen, *Ann. Probab.*, **10:1** (1982), 47–66; *Comm. Math. Phys.*, **82:2** (1981), 153–181.
- [18] В. И. Питербарг, В. Р. Фаталов, *УМН*, **50:6** (1995), 57–150.
- [19] В. Р. Фаталов, *ТВП*, **41:3** (1996), 682–689; **51:3** (2006), 634–636.
- [20] В. Р. Фаталов, “Точные асимптотики винеровских интегралов типа Лапласа для L^p -функционалов, $p > 0$ ”, *Изв. РАН, Сер. матем.* (в печати).
- [21] В. Р. Фаталов, *Матем. сб.*, **196:4** (2005), 135–160; *Пробл. передачи информ.*, **42:1** (2006), 52–71.
- [22] Т. Хида, *Броуновское движение*, Наука, М., 1987.
- [23] Н. Икэда, С. Ватанабэ, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986.
- [24] В. Р. Фаталов, *Изв. НАН Армении. Математика*, **27:5** (1992), 43–61.
- [25] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*, Наука, М., 1972.
- [26] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979.
- [27] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965.
- [28] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, Т. 4, Мир, М., 1982.
- [29] В. А. Садовничий, *Теория операторов*, Изд-во МГУ, М., 1979.
- [30] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.
- [31] S. Chevet, “Gaussian Measures and Large Deviations”, *Probability in Banach spaces IV*, Lecture Notes in Math., **990**, eds. A. Beck, K. Jacobs, Springer, Berlin, 1983, 30–46.
- [32] А. Д. Полянин, А. В. Манжиров, *Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения*, Факториал, М., 1998.
- [33] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1961.
- [34] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [35] С. Г. Крейн (ред.), *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972.
- [36] Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979.
- [37] А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982.
- [38] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981.
- [39] В. М. Золотарев, *ТВП*, **6:2** (1961), 219–222.

Поступила в редакцию 19.07.2007