Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Хсу Чунгхао, Хань Дун, Асимптотическое поведение перколяционных кластеров с некоррелированными весами, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 2, 309–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:06:28

© 2008 г.

Чунгхао Хсу*, Дун Хань*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ КЛАСТЕРОВ С НЕКОРРЕЛИРОВАННЫМИ ВЕСАМИ

Рассматриваются случайные процессы, происходящие на реберных перколяционных кластерах и представляющие собой обобщение модели “подели и раскрась”, введенной Хеггстромом в 2001 г. Исследуется асимптотическое поведение реберных перколяционных кластеров с некоррелированными весами. Для подкритических и надкритических фаз доказаны закон больших чисел и центральная предельная теорема в моделях соответственно так называемых quenched-вероятности и annealed-вероятности.

Ключевые слова: перколяционные кластеры, закон больших чисел, центральная предельная теорема.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В последнее время не только многие специалисты в области теории вероятности, но и некоторые физики обратили свое внимание на динамическое поведение перколяционных кластеров. Основное внимание уделяется исследованию случайных процессов в перколяционных кластерах, но большая часть публикаций при этом посвящена исследованию случайных блужданий на надкритических перколяционных кластерах [1]–[4].

Цель данной работы состоит в исследовании кластерных моделей с весами, представляющих собой обобщение модели “подели и раскрась” (divide and color, DaC), введенной Хеггстромом [5]. DaC-модель легко описать: случайным образом выберем граф, отвечающий реберной перколяции, а затем раскрасим случайным образом и независимо различные кластеры (каждый кластер закрашивается одним и тем же цветом). Исследование такой модели раскрашенных кластеров необходимо с разных точек зрения. Наиболее важной оказывается связь с моделью Изинга [6], [7] и с моделью Поттса [8]. Во-первых, DaC-модель может быть использована как аль-

*Department of Mathematics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China.
E-mail: hsuchunghao@gmail.com, donghan@sjtu.edu.cn

тернатива моделям Изинга и Поттса при стохастическом моделировании различных пространственных систем с положительно коррелированными значениями в различных вершинах. Во-вторых, оказывается, что по сравнению с моделями Изинга и Поттса DaC-модель можно легко и непосредственно алгоритмизировать в виде двухступенчатой процедуры [5]. Гарет [9] провел дальнейшее исследование DaC-модели и изучил поведение намагниченности и флуктуаций при больших объемах решетки.

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение случайных графов с весами, в основном, для графов, случайно выбранных в соответствии с бернуллиевской реберной перколяцией на $\mathbb{Z}^d$. Выведены предельные теоремы для кластерных моделей с весами в случае так называемых quenched-вероятности и annealed-вероятности. Заметим, что подобные предельные результаты для моделей раскрашенных кластеров были получены Гаретом [9]. Однако доказательства в его работе были основаны на предположении, что цвета раскрасок для различных кластеров независимы и одинаково распределены (н.о.р.). Модель кластеров с весами, исследуемая в настоящей работе, имеет характер более общий, чем модель раскрашенных кластеров из работы [9], так как при н.о.р. цветах ослабляется условие некоррелированности раскрасок. Поэтому необходимо найти новые методы доказательств.

Прежде чем детально разработать модель кластеров с весами, напомним определение перколяции [10]. Зададим для ребер $e = \{x, y\} \in \mathbb{E}^d = \{\{x, y\} : |x - y| = 1\}$ н.о.р. случайные бернуллиевские величины $\omega(e) \in \mathbb{P}_p(\omega(e) = 1) = p \in [0, 1]$, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$, где $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$. Ребро $e \in \mathbb{E}^d$ с $\omega(e) = 1$ называется *открытым*, а открытый кластер $C(x)$, содержащий x , представляет собой множество y таких, что x и y соединены открытым путем. Свойства этих так называемых перколяционных процессов широко исследуются. Хорошо известно, что существует критическое значение $p_c \in (0, 1)$ такое, что почти наверное (п.н.) при $p < p_c$ все связные открытые кластеры системы ω оказываются конечными, а при $p > p_c$ возникает единственный бесконечный открытый кластер, обозначаемый как $I = I(\omega)$. Относительно свойств перколяционных кластеров и более подробного описания теории перколяций см. [10]–[13].

Перколяционная конфигурация $\omega \in \Omega$ отождествляется с подграфом $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, множеством вершин которого является $\mathbb{Z}^d$, а множеством ребер – $\{e \in \mathbb{E}^d : \omega(e) = 1\}$. Будем считать перколяционную конфигурацию случайной средой. При фиксированном $\omega \in \Omega$ будем считать $Y_\omega = \{X(x), x \in \mathbb{Z}^d\}$ случайным процессом на пространстве $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}))$, занумерованным $\mathbb{Z}^d$, где через $X(x)$ обозначен вес, соответствующий вершине $x \in \mathbb{Z}^d$. Случайные переменные $X(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) переменная $X(x)$ идентична переменной $X(y)$, если вершина x связана с y ;
- 2) переменные $X(x)$ и $X(y)$ некоррелированы, если x не связана с y .

Обозначим через P_ω закон случайного процесса Y_ω , который обычно называется quenched-вероятностью в фиксированной среде ω . Зададим также annealed-вероятность $\mathbf{P} = \mathbb{P}_p \otimes P_\omega$. Через E_ω и $\mathbf{E}$ обозначим ожидания, взятые соответственно относительно вероятностей P_ω и $\mathbf{P}$. Условие 2 тогда можно переписать в таком виде: $E_\omega X(x)X(y) = E_\omega X(x)E_\omega X(y)$, если вершина x не связана с вершиной y .

В дальнейшем будем предполагать, что размерность $d \geq 2$ и что μ_x представляет собой закон распределения для $X(x)$ при всех $x \in \mathbb{Z}^d$. Без ограничения общности будем считать, что $\int X(x) d\mu_x = 0$ при всех $x \in \mathbb{Z}^d$.

Пусть B_n – ящик в $\mathbb{Z}^d$ с длинами сторон $2n$ и центром в начале координат, т.е. $B_n = [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$. Для подмножества A решетки $\mathbb{Z}^d$ обозначим через $|A|$ число вершин подмножества A .

Основными результатами данной работы являются следующие законы больших чисел и центральные предельные теоремы для quenched- и annealed-вероятностей.

ТЕОРЕМА 1 (закон больших чисел для quenched-вероятности). 1. *Подкритический режим при $p < p_c$. Для $\mathbb{P}_p$ -почти всех $\omega \in \Omega$ P_ω -п.н. имеет место сходимость*

$$\frac{\sum_{x \in B_n} X(x)}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2. *Надкритический режим при $p > p_c$. Для $\mathbb{P}_p$ -почти всех $\omega \in \Omega$ P_ω -п.н. имеет место сходимость*

$$\frac{\sum_{x \in B_n} X(x)}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta(p)Y,$$

где $\theta(p)$ – вероятность того, что начало координат содержится в бесконечном кластере бернуллиевой перколяции с параметром p из $\mathbb{Z}^d$, а Y обозначает вес, присваиваемый бесконечному кластеру.

ТЕОРЕМА 2 (закон больших чисел для annealed-вероятности). *При $p \neq p_c$ $\mathbf{P}$ -п.н. имеет место сходимость*

$$\frac{\sum_{x \in B_n} X(x)}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta(p)Y.$$

ТЕОРЕМА 3 (центральная предельная теорема для quenched-вероятности). *Предположим, что существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что*

$$\int X^4(x) d\mu_x \leq C_1, \quad \sigma^2(x) \equiv \int X^2(x) d\mu_x \geq C_2$$

при всех $x \in \mathbb{Z}^d$.

1. *Подкритический режим. При $p < p_c$ для $\mathbb{P}_p$ -почти всех $\omega \in \Omega$ и при всех $t > 0$*

$$P_\omega \left\{ \frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \sum_{x \in B_n} \frac{X(x)}{\sigma(x)} \leq t \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\chi^f(p)}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{s^2}{2\chi^f(p)}\right) ds,$$

где $\chi^f(p)$ – средний размер конечного кластера, т.е.

$$\chi^f(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}_p(|C(x)| = k).$$

2. *Надкритический режим.* При $p > p_c$ для $\mathbb{P}_p$ -почти всех $\omega \in \Omega$ и при всех $t > 0$

$$P_\omega \left\{ \frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \left(\sum_{x \in B_n \setminus I} \frac{X(x)}{\sigma(x)} + \frac{1}{\sqrt{|B_n \cap I|}} \sum_{x \in B_n \cap I} \frac{X(x)}{\sigma(x)} \right) \leq t \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\chi^f(p) + \theta(p))}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{s^2}{2(\chi^f(p) + \theta(p))}\right) ds,$$

где I – бесконечный открытый кластер в перколяционной конфигурации ω .

ТЕОРЕМА 4 (центральная предельная теорема для annealed-вероятности). Предположим, что существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что

$$\int X^4(x) d\mu_x \leq C_1, \quad \sigma^2(x) \equiv \int X^2(x) d\mu_x \geq C_2$$

при всех $x \in \mathbb{Z}^d$.

1. *Подкритический режим.* При $p < p_c$ для всех $t > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \sum_{x \in B_n} \frac{X(x)}{\sigma(x)} \leq t \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\chi^f(p)}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{s^2}{2\chi^f(p)}\right) ds.$$

2. *Надкритический режим.* При $p > p_c$ для всех $t > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \left(\sum_{x \in B_n \setminus I} \frac{X(x)}{\sigma(x)} + \frac{1}{\sqrt{|B_n \cap I|}} \sum_{x \in B_n \cap I} \frac{X(x)}{\sigma(x)} \right) \leq t \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\chi^f(p) + \theta(p))}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{s^2}{2(\chi^f(p) + \theta(p))}\right) ds.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теоремы 1–4 показывают, что на предельные поведения кластерных моделей с весами оказывают влияние свойства перколяционных процессов. Согласно законам больших чисел предел представляет собой константу в подкритическом режиме, но он не равен константе в надкритическом режиме. В центральных предельных теоремах пределы оказываются гауссовыми, но их параметры различны в двух указанных случаях.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Прежде чем перейти к доказательствам теорем, приведем несколько результатов перколяционной теории на ребрах.

ЛЕММА 1. Предположим, что $p \neq p_c$. Тогда существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\mathbb{P}_p(n \leq |C(x)| < \infty) \leq e^{-\alpha n^{1/d}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подкритический случай следует из теоремы 3.4 работы [10], а надкритический случай – из формулы (6.94) работы [10] и теоремы 3 работы [13].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Лемма 1 показывает, что распределение размера кластера убывает экспоненциально как в подкритических, так и в надкритических фазах. Естественно, что интересно посмотреть на поведение кластерной модели в критической точке. В самом деле, предполагается, что существуют положительные константы C_1 , C_2 и β такие, что

$$C_1 n^{-(d-1)/2} \leq \mathbb{P}_{p_c}(n \leq |C(x)| < \infty) \leq C_2 n^{-\beta}.$$

Следующее утверждение доказано в работе [10] (теорема 4.2).

ЛЕММА 2 [10]. *Предположим, что $0 \leq p \leq 1$. Обозначим через $k(n)$ число открытых конечных кластеров, имеющих непустое пересечение с B_n , т.е.*

$$k(n) = \sum_{x \in B_n} \frac{1}{|C_n(x)|},$$

где $C_n(x)$ – открытый кластер из B_n , содержащий x . Тогда для $\mathbb{P}_p$ -почти всех $\omega \in \Omega$ число $k(n)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{k(n)}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \kappa(p),$$

где $\kappa(p)$ – число открытых кластеров на одну вершину, $\kappa(p) = \mathbb{E}_p |C(0)|^{-1}$.

Зададим $\gamma_n(x)$ при $x \in \mathbb{Z}^d$ следующим образом:

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} |C(x) \cap B_n|, & C(x) < \infty, \\ 0, & C(x) = \infty. \end{cases}$$

Для $\omega \in \Omega$ предположим, что $\{x_i; i \geq 1\}$ представляет собой последовательность, зависящую от ω и такую, что для каждой вершины $x \in \mathbb{Z}^d$ существует ровно одна вершина x_i , соединенная с x в перколяционной конфигурации ω . Иными словами, x_i является вершиной-представителем в каждой связной компоненте. Тогда имеем

$$\gamma_n(x_i) = 0, \quad i > k(n).$$

Следующая лемма – следствие леммы 2 – доказана в работе [9]. Мы приводим ее доказательство для удобства дальнейшей работы.

ЛЕММА 3. *Предположим, что $p \neq p_c$. Для $\mathbb{P}_p$ -почти всех $\omega \in \Omega$ имеем*

$$\frac{\sum_{x \in B_n} \gamma_n(x)}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^f(p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_p((\ln n)^{2d} \leq |C(x)| < \infty) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha(\ln n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha \ln n} = \\ &= \sum_{n \leq e^{2/\alpha}} n^{-\alpha \ln n} + \sum_{n > e^{2/\alpha}} n^{-2} < \infty. \end{aligned}$$

По лемме Бореля–Кантелли $\mathbb{P}_p$ -вероятность тех $\omega \in \Omega$, для которых существует положительная константа $N(\omega)$ такая, что $|C(x)| \leq (\ln n)^{2d}$ при $n \geq N(\omega)$, равна единице. Тогда для $\mathbb{P}_p$ -почти всех $\omega \in \Omega$ существует такое число $N(\omega)$, что $\gamma_n(x_i) \leq (\ln n)^{2d}$ для любого i такого, что $1 \leq i \leq k(n)$, при всех $n \geq N$. Тем самым, имеем

$$\sum_{\substack{x \in B_{n-(\ln n)^{2d}}: \\ |C(x)| < \infty}} |C(x)| = \sum_{\substack{x \in B_{n-(\ln n)^{2d}}: \\ |C(x)| < \infty}} \gamma_n(x) \leq \sum_{x \in B_n} \gamma_n(x) \leq \sum_{\substack{x \in B_n: \\ |C(x)| < \infty}} |C(x)|.$$

В силу теоремы об эргодичности (см. [14], теорема 6.1 и следствие 6.2) для $\mathbb{P}_p$ -почти всех $\omega \in \Omega$ получаем

$$\frac{1}{|B_n|} \sum_{\substack{x \in B_n: \\ |C(x)| < \infty}} |C(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^f(p).$$

Результат леммы следует теперь из того, что

$$\frac{|B_{n-(\ln n)^{2d}}|}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Следующее предложение является ключевым при доказательстве теорем. Оно устанавливает закон больших чисел и центральную предельную теорему для двумерных массивов попарно некоррелированных случайных переменных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ – последовательность попарно некоррелированных (и одинаково распределенных) случайных переменных, заданных на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, $\tilde{E}$ – ожидание, соответствующее $\tilde{P}$, $\sigma_n^2 = \tilde{E}(X_n - \tilde{E}X_n)^2$, $n \geq 1$. Пусть $\{a_{ij}; i, j \geq 1\}$ – двухиндексная последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:

а) при всех $j \geq 1$ число $k(j) = \sup\{i \geq 1: a_{ij} \neq 0\} < \infty$ и существует константа $c > 0$ такая, что $a_{ij} \geq c$, если $a_{ij} \neq 0$;

б) имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k(j)} < \infty, \quad \frac{1}{k(j)} \max_{1 \leq i \leq k(j)} a_{ij}^4 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0;$$

в) при $j \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}^2}{(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij})^2} = O\left(\frac{1}{k(j)}\right).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Закон больших чисел. Если существует константа $M > 0$ такая, что $\sigma_i^2 \leq M$ при всех $i \geq 1$, то $\tilde{P}$ -п.н.

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}(X_i - \tilde{E}X_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

2. Центральная предельная теорема. Если существуют константы $M_1, M_2 > 0$ такие, что $\tilde{E}|X_i - \tilde{E}X_i|^4 \leq M_1$ и $\sigma_i^2 \geq M_2$ при всех $i \geq 1$, то при всех $t > 0$

$$\tilde{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}(X_i - \tilde{E}X_i)/\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}^2}} \leq t\right\} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-s^2/2} ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Положим

$$\eta_j = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}(X_i - \tilde{E}X_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}}, \quad j \geq 1.$$

При $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}\left(\max_{2^{m+1} > n \geq 2^m} |\eta_n| \geq \varepsilon\right) &= \\ &= \tilde{P}(|\eta_1| \geq \varepsilon) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{P}\left(\max_{2^{m+1} > n \geq 2^m} |\eta_n| \geq \varepsilon\right), \\ \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{P}\left(\max_{2^{m+1} > n \geq 2^m} |\eta_n| \geq \varepsilon\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{P}\left(\bigcup_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \{|\eta_n| \geq \varepsilon\}\right) \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \tilde{P}\{|\eta_n| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{\tilde{E}(\eta_n - \tilde{E}\eta_n)^2}{\varepsilon^2} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{\sum_{i=1}^{k(n)} a_{in}^2 \sigma_i^2}{\varepsilon^2 (\sum_{i=1}^{k(n)} a_{in})^2} \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{k(n)} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\varepsilon > 0$ получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{P}\left(\max_{2^{m+1} > n \geq 2^m} |\eta_n| \geq \varepsilon\right) < \infty.$$

В соответствии с леммой Бореля–Кантелли имеем

$$\tilde{P}\left(\max_{2^{m+1} > n \geq 2^m} |\eta_n| \geq \varepsilon \text{ i.o.}\right) = 0,$$

(здесь и далее “i.o.” означает, что имеет место бесконечное по m число событий под знаком вероятности), т.е.

$$\tilde{P}\left(\bigcup_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \{|\eta_n| \geq \varepsilon\} \text{ i.o.}\right) = 0.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \{|\eta_n| \geq \varepsilon \text{ i.o.}\} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{|\eta_n| \geq \varepsilon\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} \bigcup_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \{|\eta_n| \geq \varepsilon\} = \\ &= \left\{ \bigcup_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \{|\eta_n| \geq \varepsilon\} \text{ i.o.} \right\}, \end{aligned}$$

получаем

$$\tilde{P}(|\eta_n| \geq \varepsilon \text{ i.o.}) = 0.$$

Отсюда следует, что $\tilde{P}$ -п.н. имеет место сходимость $\eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

2. Положим

$$W_j = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}(X_i - \tilde{E}X_i)/\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}^2}}.$$

Тогда $\tilde{E}W_j = 0$ и $\tilde{E}[W_j^2] = 1$. Применим теперь теорему 2.4 работы [15]. Заметим, что доказательство указанной теоремы останется справедливым, если заменить каждый термин *независимый* термином *некоррелированный* в определении графа зависимостей. Таким образом, достаточно показать, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{E} \left| \frac{a_{ij}(X_i - \tilde{E}X_i)/\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}^2}} \right|^4 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{E} \left| \frac{a_{ij}(X_i - \tilde{E}X_i)/\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}^2}} \right|^4 \leq \frac{\sum_{i=1}^{k(j)} a_{ij}^4 M_1}{(\sum_{i=1}^{k(j)} a_{ij}^2)^2 M_2} \leq \tilde{C} \frac{k(j) \max_{1 \leq i \leq k(j)} a_{ij}^4}{k(j)^2} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

где второе неравенство следует из условий “а” и “в”, а последнее соотношение вытекает из условия “б”.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

3.1. Закон больших чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем теорему сразу в подкритическом и надкритическом режимах. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{x \in B_n} X(x) &= \sum_{x \in B_n \setminus I} X(x) + \sum_{x \in B_n \cap I} X(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n(x_i) X(x_i) + Y|B_n \cap I|, \end{aligned}$$

где I – бесконечная компонента, если такая существует, Y – ее вес.

Пусть $a_{ij} = \gamma_j(x_i)$. Применим п. 1 доказанного предложения к последовательности $\{a_{ij}; i, j \geq 1\}$ и к случайным переменным $\{X(x_i); i \geq 1\}$. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n(x_i) = |B_n \setminus I| = \sum_{x \in B_n} 1_{\{C(x) < \infty\}}.$$

Учитывая равенство

$$|B_n \cap I| = \sum_{x \in B_n} 1_{\{C(x) = \infty\}}$$

и теоремы эргодичности (см. [14], теорема 6.1 и следствие 6.2), имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_n \setminus I|}{|B_n|} = 1 - \theta(p), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_n \cap I|}{|B_n|} = \theta(p).$$

Тогда в соответствии с п. 1 предложения получаем, что P_ω -п.н.

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n(x_i) X(x_i)}{|B_n \setminus I|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{x \in B_n} X(x)}{|B_n|} &= \frac{|B_n \setminus I|}{|B_n|} \frac{\sum_{x \in B_n \setminus I} X(x)}{|B_n \setminus I|} + \frac{\sum_{x \in B_n \cap I} X(x)}{|B_n|} = \\ &= \frac{|B_n \setminus I|}{|B_n|} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n(x_i) X(x_i)}{|B_n \setminus I|} + \frac{Y|B_n \cap I|}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta(p)Y \quad (P_\omega\text{-п.н.}). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предложение 2.1 из [5] можно вывести из теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для случая annealed-вероятности утверждение следует из результата для quenched-вероятности. Согласно теореме 1 имеем $P_\omega(\Xi) = 1$, где

$$\Xi = \left\{ \frac{\sum_{x \in B_n} X(x)}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta(p)Y \right\}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(\Xi) = \int_{\Omega} P_\omega(\Xi) \mathbb{P}_p(d\omega) = \int_{\Omega} 1 \mathbb{P}_p(d\omega) = 1.$$

3.2. Центральные предельные теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для доказательства центральной предельной теоремы применим п. 2 предложения.

1. Подкритический случай. При $p < p_c$ имеем

$$\sum_{x \in B_n} \frac{X(x)}{\sigma(x)} = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n(x_i) \frac{X(x_i)}{\sigma(x_i)}.$$

Заметим, что

$$\gamma_n(x_i) \begin{cases} = 0, & \text{если } i > k(n), \\ \geq 1, & \text{если } i \leq k(n), \end{cases}$$

и в силу леммы 2 получаем

$$k(n) \sim \kappa(p)|B_n| = \kappa(p)(2n+1)^d.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(n)} < \infty.$$

Из доказательства леммы 3 вытекает, что для $\mathbb{P}_p$ -почти всех $\omega \in \Omega$ существует число N такое, что при всех $n \geq N$ и для любого i , $1 \leq i \leq k(n)$, справедливо неравенство $\gamma_n(x_i) \leq (\ln n)^{2d}$. Следовательно, в силу леммы 2

$$\frac{1}{k(n)} \max_{1 \leq i \leq k(n)} \gamma_n^4(x_i) = \frac{1}{|B_n|} \max_{1 \leq i \leq k(n)} \gamma_n^4(x_i) \frac{|B_n|}{k(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Более того, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{in}^2}{(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{in})^2} k(n) &= \frac{\sum_{i=1}^{k(n)} \gamma_{in}^2}{(\sum_{i=1}^{k(n)} \gamma_{in})^2} k(n) = \frac{\sum_{x \in B_n} \gamma_n(x)}{|B_n|^2} k(n) = \\ &= \frac{\sum_{x \in B_n} \gamma_n(x)}{|B_n|} \frac{k(n)}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^f(p) \kappa(p). \end{aligned}$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{in}^2}{(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{in})^2} = O\left(\frac{1}{k(n)}\right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{x \in B_n} \frac{X(x)}{\sigma(x)}}{\sqrt{|B_n|}} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n^2(x_i)}{|B_n|}} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n(x_i) X(x_i) / \sigma(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n^2(x_i)}}, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n^2(x_i) &= \sum_{x \in B_n} \gamma_n(x), \end{aligned}$$

первое утверждение теоремы следует из леммы 3 и п. 2 предложения.

2. Надкритический случай. Сначала заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \sum_{x \in B_n \setminus I} \frac{X(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n(x_i) \frac{X(x_i)}{\sigma(x_i)}.$$

Выберем вершину $x_0 \in B_n \cap I$ и определим $\gamma_n(x_0) = \sqrt{|B_n \cap I|}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|B_n|}} \left(\sum_{x \in B_n \setminus I} \frac{X(x)}{\sigma(x)} + \frac{1}{\sqrt{|B_n \cap I|}} \sum_{x \in B_n \cap I} \frac{X(x)}{\sigma(x)} \right) &= \frac{\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n(x_i) X(x_i) / \sigma(x_i)}{\sqrt{|B_n|}} = \\ &= \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n^2(x_i)}}{\sqrt{|B_n|}} \frac{\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n(x_i) X(x_i) / \sigma(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n^2(x_i)}}. \end{aligned}$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n^2(x_i)}{|B_n|} &= \frac{\sum_{i=1}^{k(n)} \gamma_n^2(x_i)}{|B_n|} + \frac{\gamma_n^2(x_0)}{|B_n|} = \\ &= \frac{\sum_{x \in B_n} \gamma_n(x)}{|B_n|} + \frac{|B_n \cap I|}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^f(p) + \theta(p). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n^2(x_i)}{(\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n(x_i))^2} k(n) &= \frac{\sum_{i=1}^{k(n)} \gamma_n^2(x_i) + |B_n \cap I|}{(\sum_{i=1}^{k(n)} \gamma_n(x_i) + \sqrt{|B_n \cap I|})^2} k(n) \leq \\ &\leq \frac{\sum_{x \in B_n} \gamma_n(x) + |B_n \cap I|}{(\sum_{i=1}^{k(n)} \gamma_n(x_i))^2} k(n) = \frac{\sum_{x \in B_n} \gamma_n(x) + |B_n \cap I|}{|B_n \setminus I|^2} = \\ &= \frac{|B_n|^2}{|B_n \setminus I|^2} \frac{\sum_{x \in B_n} \gamma_n(x) + |B_n \cap I|}{|B_n|} \frac{k(n)}{|B_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\chi^f(p) + \theta(p)}{(1 - \theta(p))^2} \kappa(p), \\ \frac{\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n^2(x_i)}{(\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n(x_i))^2} k(n) &= \frac{\sum_{i=1}^{k(n)} \gamma_n^2(x_i) + |B_n \cap I|}{(|B_n \setminus I| + \sqrt{|B_n \cap I|})^2} k(n) \geq \\ &\geq \frac{\sum_{i=1}^{k(n)} \gamma_n^2(x_i)}{(|B_n \setminus I| + |B_n \cap I|)^2} k(n) = \\ &= \frac{\sum_{x \in B_n} \gamma_n(x)}{|B_n|^2} k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^f(p) \kappa(p). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n^2(x_i)}{(\sum_{i=0}^{k(n)} \gamma_n(x_i))^2} = O\left(\frac{1}{k(n)}\right),$$

и второе утверждение теоремы вытекает теперь из п. 2 предложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Центральная предельная теорема для annealed-вероятности следует из теоремы 3 на основании рассуждений, аналогичных тем, что были приведены при доказательстве теоремы 2.

Благодарности. Авторы благодарны рецензенту за тщательное изучение работы и многочисленные ценные предложения. Работа частично поддержана фондом Natural Science Foundation of China (гранты № 10531070, 10371074).

Список литературы

- [1] M. T. Barlow, *Ann. Probab.*, **32**:4 (2004), 3024–3084.
- [2] N. Berger, M. Biskup, *Probab. Theory Related Fields*, **137**:1–2 (2007), 83–120.
- [3] C. Hoffman, E. Mossel, *Potential Anal.*, **14**:4 (2001), 375–385.
- [4] P. Mathieu, E. Remy, *Ann. Probab.*, **32**:1A (2004), 100–128.
- [5] O. Häggström, *Stochastic Process. Appl.*, **96**:2 (2001), 213–242.
- [6] M. Kaufman, J. E. Touma, *Phys. Rev. B*, **49**:14 (1994), 9583–9585.
- [7] C. L. Henley, *Phys. Rev. Lett.*, **54**:18 (1985), 2030–2033.
- [8] O. Häggström, *Ann. Appl. Probab.*, **9**:4 (1999), 1149–1159.
- [9] O. Garet, *ESAIM Probab. Stat.*, **5** (2001), 105–118 (electronic).
- [10] G. Grimmett, *Percolation*, Springer, Berlin, 1989.
- [11] S. Havlin, R. Nossal, *J. Phys. A*, **17**:8 (1984), L427–L432.
- [12] C. M. Newman, L. S. Schulman, *J. Stat. Phys.*, **26**:3 (1981), 613–628.
- [13] H. Kesten, “Some highlights of percolation”, *Proc. Internat. Congr. of Mathematicians*, V. 1, Higher Education Press, Beijing, 2002, 345–362.
- [14] А. А. Темпельман, *Труды ММО*, **26** (1972), 95–132.
- [15] M. Penrose, *Random Geometric Graphs*, Oxford Stud. Probab., **5**, Oxford University Press, Oxford, 2003.

Поступила в редакцию 13.11.2007,
после доработки 1.02.2008