Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, К вопросу об асимптотике при $|t| \rightarrow \infty$ решений краевых задач для p -адических струн, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 3, 325–333

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:54:55

© 2008 г.

В. С. Владимиров*

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИКЕ ПРИ $|t| \rightarrow \infty$ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ p -АДИЧЕСКИХ СТРУН

Получены асимптотические при $|t| \rightarrow \infty$ оценки снизу для полей тахионов открытых и замкнутых струн, которые подтверждают в первом члене асимптотики, найденные ранее как решения линеаризованных уравнений. Во втором члене асимптотики это не подтверждается.

Ключевые слова: струны, тахионы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика полей $\Psi(t)$ и $\Phi(t)$ тахионов замкнутой и открытой p -адических струн описывается соответственно уравнениями движения [1]–[4]

$$\Psi^{p^2} = p^{\partial_t^2/4} \Psi, \quad \Phi^p = p^{\partial_t^2/2} \Phi, \quad (1.1)$$

где p – простое число. В терминах полей

$$\psi(t) = \Psi(t\sqrt{\ln p}), \quad \varphi(t) = \Phi(t\sqrt{2\ln p}). \quad (1.2)$$

Тогда уравнения движения (1.1) являются частным случаем уравнений вида

$$\psi^p(t) = (K\psi)(t), \quad (1.3)$$

где p – любое целое число, большее 2, а интегральный оператор определяется равенством

$$(K\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} \psi(\tau) d\tau.$$

Таким образом, после замены p на p^2 уравнение (1.3) с граничными условиями

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 1 \quad (1.4)$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: vladim@mi.ras.ru

описывает поля тахионов *замкнутой струны* (краевая задача (1.3), (1.4)), а после замены ψ на φ и с граничными условиями

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \begin{cases} -1, & p \text{ нечетное,} \\ 0, & p \text{ четное,} \end{cases} \quad (1.5)$$

описывает поля тахионов *открытой струны* (краевая задача (1.3), (1.5)).

Поставленные краевые задачи рассматриваются в классе вещественных непрерывных (следовательно, ограниченных) функций, отличных от тривиального решения $\psi = 1$. Будем считать, что такие решения существуют (вопросы существования и несуществования решений краевых задач и их свойства рассматривались в работах [5], [6]), и наша задача – установить их поведение при $t \rightarrow \pm\infty$.

В ряде физических работ (см., например, [7], [8]) асимптотика поставленных краевых задач выводится следующим образом. В уравнении (1.3) отбрасываются степени $y^k(t)$, $2 \leq k \leq p$, где $y = 1 - \psi$. В результате для функции $y(t)$ имеем следующее линейное интегральное уравнение:

$$py(t) = (Ky)(t). \quad (1.6)$$

Решениями уравнения (1.6) являются функции

$$C_{\pm}^k e^{\pm(x_k + 4k\pi i/x_k)t}, \quad x_k = \sqrt{2 \ln p + 2\sqrt{\ln^2 p + 4k^2 \pi^2}}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad (1.7)$$

где $C_{\pm}^k$ – произвольные постоянные. Из этих решений при $k = 0$ и выводится главный член асимптотики. Например, для решений краевой задачи (1.3), (1.4)

$$1 - \psi(t) = C_{\pm}^0 e^{-2\sqrt{\ln p}|t|} [1 + o(1)], \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Предельное соотношение (1.8) мы будем для краткости изображать следующим образом:

$$1 - \psi(t) \sim C_{\pm}^0 e^{-2\sqrt{\ln p}|t|}, \quad |t| \rightarrow \infty.$$

С математической точки зрения эти рассуждения показывают, что предложенная асимптотика требует обоснования, хотя, по-видимому, она верна. Отметим некоторые наводящие соображения.

Предположим, что функция $y(t)$ обладает экспоненциальной асимптотикой

$$y(t) \sim C e^{-\alpha t}, \quad t \rightarrow \infty,$$

при некоторых α , $\operatorname{Re} \alpha > 0$, и $C \neq 0$. Подставляя эту асимптотику в уравнение (1.3) для функции $y(t) = 1 - \psi(t)$,

$$1 - (1 - y)^p = (Ky)(t), \quad (1.9)$$

и учитывая лемму 1 (см. ниже), получаем

$$p C e^{-\alpha t} \sim K(e^{-\alpha \tau})(t) \sim C e^{\alpha^2/4 - \alpha t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует равенство $p = e^{\alpha^2/4}$, значит, $\alpha = 2\sqrt{\ln p}$ и, следовательно, справедлива асимптотика (1.8) при $t \rightarrow \infty$.

Теперь предположим существование второго экспоненциального члена асимптотики

$$y(t) - Ce^{-2\sqrt{\ln p}t} \sim C_1 e^{-\beta t}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.10)$$

при некоторых β , $\operatorname{Re} \beta > 2\sqrt{\ln p}$, и $C_1 \neq 0$. Тогда из уравнения (1.9), учитывая лемму 1, при $t \rightarrow \infty$ получаем

$$pCe^{-2\sqrt{\ln p}t} + pC_1 e^{-\beta t} - \frac{p(p-1)}{2} C^2 e^{-4\sqrt{\ln p}t} \sim Cpe^{-2\sqrt{\ln p}t} + C_1 e^{\beta^2/4 - \beta t},$$

откуда находим

$$\beta = 4\sqrt{\ln p}, \quad pC_1 - \frac{p(p-1)}{2} C^2 = C_1 p^4,$$

т.е. формула (1.10) справедлива при

$$\beta = 4\sqrt{\ln p}, \quad C_1 = -\frac{C^2}{2(p^2 + p + 1)}.$$

Сравнение полученной асимптотики (1.10) с решением (1.7) при $k = 1$ линейного уравнения (1.6) показывает, что это решение не может представлять собой второй член асимптотики.

В настоящей работе проблема асимптотики решена не полностью, однако получены оценки снизу, которые подтверждают указанные асимптотики, и могут быть полезными при дальнейшем исследовании этой задачи.

С учетом преобразования (1.2) для полей $\Psi(t)$ и $\Phi(t)$ доказано существование такой постоянной $C > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}$ справедливы оценки (см. ниже (2.16), (2.21), (2.22))

$$1 - \Psi(t) \geq Ce^{-2\sqrt{2}|t|}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad p \text{ любое}, \quad (1.11)$$

$$1 - |\Phi(t)| \geq Ce^{-\sqrt{2}|t|}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad p \text{ нечетное}, \quad (1.12)$$

$$1 - \Phi(t) \geq Ce^{-\sqrt{2}t}, \quad t > 0, \quad p \text{ четное}. \quad (1.13)$$

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

ТЕОРЕМА 1. Если $\psi(t) \neq 1$ — непрерывное решение краевой задачи (1.3), (1.4), то существуют такие числа $C > 0$ и T , что справедливы оценки

$$1 - \psi(t) > Ce^{-2\sqrt{\ln p}|t|}\psi_0(t - T), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

где

$$\psi_0(t) = \int_{\sqrt{1/2}}^{\infty} e^{-(|t|/u - \sqrt{\ln p}u)^2} \frac{u du}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad (2.2)$$

причем имеет место асимптотика

$$\psi_0(t) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln p}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $|\psi(t)| < 1$, $t \in \mathbb{R}$. В работе [9] (см. также ниже лемму 2) установлено, что интегральное уравнение (1.3) эквивалентно интегральному уравнению (3.4), в котором ядро $\mathcal{K}(t)$ определяется рядом (3.5). Согласно лемме 5 существуют числа $T > 0$ и C , $0 < C < 1$, такие, что справедливо неравенство

$$y(t) > Ce^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

где

$$y(t) = 1 - \psi(t + T), \quad 0 < y(t) < 2, \quad y(t)|_{t=\pm\infty} = 0. \quad (2.5)$$

Для функции $y(t)$ уравнение (3.4) принимает вид

$$1 - [1 - y(t)]^p = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(t - \tau) \{[1 - y(\tau)]^p + py(\tau) - 1\} d\tau. \quad (2.6)$$

Согласно лемме 3 имеет место неравенство

$$(1 - y)^p + py - 1 \geq y^2, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad p \geq 2.$$

Подставляя его в уравнение (2.6), получаем неравенство

$$1 - [1 - y(t)]^p \geq \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(t - \tau) y^2(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Подставляя неравенство (2.4) в неравенство (2.7), продолжаем нашу цепочку неравенств следующим образом:

$$1 - [1 - y(t)]^p > C^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(t - \tau) e^{-2\tau^2} d\tau. \quad (2.8)$$

Так как правая часть неравенства (2.8) положительна и в силу (3.5) меньше $C^2/(p-1) < 1$, то, учитывая лемму 5, получаем

$$y(t) > C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(t - \tau) e^{-2\tau^2} d\tau, \quad C_1 = \frac{C^2}{p}. \quad (2.9)$$

Теперь подставим выражение (3.5) для ядра $\mathcal{K}(t - \tau)$ в неравенство (2.9) и проинтегрируем его. В результате получаем

$$y(t) > C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k \sqrt{\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2/k-2\tau^2} d\tau = C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k \sqrt{2k+1}} e^{-t^2/(k+1/2)}. \quad (2.10)$$

Учитывая очевидные неравенства

$$\frac{1}{p^k \sqrt{2k+1}} e^{-t^2/(k+1/2)} > \int_k^{k+1} \frac{1}{p^x \sqrt{2x+1}} e^{-t^2/(x-1/2)} dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

продолжим неравенства (2.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} y(t) &> C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{p^x \sqrt{2x+1}} e^{-t^2/(x-1/2)} dx = \\ &= C_1 \int_1^{\infty} \frac{1}{p^x \sqrt{2x+1}} e^{-t^2/(x-1/2)} dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Заменяя в (2.11) переменную интегрирования $x - 1/2 = u^2$, $dx = 2u du$ и обозначая для краткости $\alpha = \sqrt{\ln p}$, получаем соотношение

$$\begin{aligned} y(t) &> C_1 \int_{\sqrt{1/2}}^{\infty} e^{-t^2/u^2 - \alpha^2/2 - \alpha^2 u^2} \frac{u du}{\sqrt{1+u^2}} = \\ &= C_1 e^{-2\alpha|t|} \int_{\sqrt{1/2}}^{\infty} e^{-(|t|/u - \alpha u)^2} \frac{u du}{\sqrt{1+u^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда, если воспользоваться обозначением (2.5), следует неравенство

$$1 - \psi(t+T) \geq C_1 e^{-2|t|\alpha} \psi_0(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Заменяя здесь $t+T$ на t и обозначая $C = C_1 e^{-2|T|\alpha}$, получаем оценку (2.1).

Теперь докажем асимптотику (2.3). Для этого представим интеграл в (2.3) в виде суммы двух интегралов

$$\begin{aligned} &\int_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{|t|/\alpha}} e^{-(|t|/u - \alpha u)^2} \frac{u du}{\sqrt{1+u^2}} + \\ &+ \int_{\sqrt{|t|/\alpha}}^{\infty} e^{-(|t|/u - \alpha u)^2} \frac{u du}{\sqrt{1+u^2}} = I_1(t) + I_2(t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В интеграле $I_1(t)$ сделаем замену переменной интегрирования:

$$\begin{aligned} \frac{|t|}{u} - \alpha u &= v, \quad dv = -\left(\frac{|t|}{u^2} + \alpha\right) du, \\ u(t, v) &= -\frac{v}{2\alpha} + \sqrt{\frac{v^2}{4\alpha^2} + \frac{|t|}{\alpha}}, \quad u^2(t, v) = \frac{v^2}{2\alpha^2} + \frac{|t|}{\alpha} - \frac{v}{\alpha} \sqrt{\frac{v^2}{4\alpha^2} + \frac{|t|}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В результате получаем

$$I_1(t) = \int_0^{\sqrt{2t} - \alpha/\sqrt{2}} e^{-v^2} \frac{u^3(v, t) dv}{[|t| + \alpha u^2(v, t)] \sqrt{1+u^2(v, t)}}. \quad (2.14)$$

В силу (2.13) функция

$$\frac{u^3(t, v)}{[|t| + \alpha u^2(t, v)] \sqrt{1+u^2(t, v)}}$$

ограничена сверху числом $1/\alpha$ и стремится к $1/\alpha$ при $t \rightarrow \infty$, поэтому согласно теореме Лебега возможен переход к пределу под знаком интеграла (2.14). В результате получаем

$$I_1(t) \sim \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \frac{1}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha}, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Аналогично подстановкой

$$\begin{aligned} -\frac{|t|}{u} + \alpha u &= v, \quad dv = \left(\frac{|t|}{u^2} + \alpha\right) du, \\ u(t, v) &= \frac{v}{2\alpha} + \sqrt{\frac{v^2}{4\alpha^2} + \frac{|t|}{\alpha}}, \quad u^2(t, v) = \frac{v^2}{2\alpha^2} + \frac{|t|}{\alpha} + \frac{v}{\alpha} \sqrt{\frac{v^2}{4\alpha^2} + \frac{|t|}{\alpha}} \end{aligned}$$

приведем интеграл $I_2(t)$ к виду

$$I_2(t) = \int_0^\infty e^{-v^2} \frac{u^3(v, t) dv}{[|t| + \alpha u^2(v, t)] \sqrt{1 + u^2(v, t)}}$$

и в силу тех же соображений получаем

$$I_2(t) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha}, \quad |t| \rightarrow \infty.$$

Отсюда с учетом (2.15) и (2.12) вытекает асимптотика (2.3).

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 существует такое число $C > 0$, что справедливо неравенство

$$1 - \psi(t) \geq C e^{-2t\sqrt{\ln p}}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 2. Если $\varphi(t)$ – непрерывное решение краевой задачи (2.3), (2.5), то существуют такие числа $C > 0$ и T , что справедливы оценки:

$$1 - |\varphi(t)| > C e^{-2\sqrt{\ln p}|t|} \varphi_0(t - T), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

если p нечетно, и

$$1 - \varphi(t) > C e^{-2\sqrt{\ln p}t} \varphi_0(t - T), \quad t > 0, \quad (2.18)$$

если p четно.

При этом имеют место следующие асимптотики:

$$\varphi_0(t) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln p}}, \quad |t| \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

если p нечетно, и

$$\varphi_0(t) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln p}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.20)$$

если p четно.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 2 существует такое число $C > 0$, что справедливы неравенства:

$$1 - |\varphi(t)| \geq C e^{-2\sqrt{\ln p}|t|}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.21)$$

если p нечетно, и

$$1 - \varphi(t) \geq C e^{-2\sqrt{\ln p}t}, \quad t > 0, \quad (2.22)$$

если p четно.

3. ЛЕММЫ

ЛЕММА 1. Если ограниченная на всей оси функция $y(t)$ удовлетворяет условию

$$y(t) \sim Ce^{-\alpha t}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

при некоторых $C \neq 0$ и α , $\operatorname{Re} \alpha > 0$, то

$$(Ky)(t) \sim Ce^{\alpha^2/4 - \alpha t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условиям леммы существуют числа $t_0 > 0$, C_1 и функция $\epsilon(t)$ такие, что

$$|y(t)| < C_1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = Ce^{-\alpha t}[1 + \epsilon(t)], \quad t > t_0,$$

где $\epsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $t > t_0$. Учитывая эти свойства, получаем

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}(Ky)(t) &= \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-(t-\tau)^2} y(\tau) d\tau + \frac{C}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2 + \alpha t} d\tau + \\ &+ \frac{C}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} \epsilon(\tau) d\tau = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла величины I_k , $k = 1, 2, 3$, оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} |I_1(t)| &< \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} e^{\alpha t} \int_{t-t_0}^{\infty} e^{-u^2} du = o(1), \quad t \rightarrow \infty, \\ I_2(t) &= \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{\alpha t + \alpha^2/4} \int_{-\infty}^{t-t_0-\alpha/2} e^{-u^2} du \sim Ce^{\alpha^2/4}, \quad t \rightarrow \infty, \\ I_3(t) &= \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{\alpha^2/4} \int_{-\infty}^{t-t_0-\alpha/2} e^{-u^2} \epsilon\left(u + t + \frac{\alpha}{2}\right) du = o(1), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Учитывая полученные асимптотики, согласно (3.3) выводим (3.2).

ЛЕММА 2. В классе функций медленного роста интегральное уравнение (1.3) эквивалентно интегральному уравнению

$$\psi^p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(t-\tau)[p\psi(\tau) - \psi^p(\tau)] d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

где ядро $\mathcal{K}(t)$ определяется рядом

$$\mathcal{K}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k \sqrt{\pi k}} e^{-t^2/k}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(t) dt = \frac{1}{p-1}. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя преобразование Фурье

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{it\xi} dt, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-it\xi} d\xi,$$

к уравнению (3.3) и пользуясь формулой преобразования Фурье для свертки двух функций [10], получаем

$$\widetilde{\psi^p}(\xi) = e^{-\xi^2/4} \widetilde{\psi}(\xi),$$

откуда вытекает соотношение

$$\widetilde{\psi^p} = (p\widetilde{\psi} - \widetilde{\psi^p}) \frac{e^{-\xi^2/4}}{p - e^{-\xi^2/4}} = (p\widetilde{\psi} - \widetilde{\psi^p}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k} e^{-k\xi^2/4}.$$

Применяя к этому соотношению обратное преобразование Фурье, получаем уравнение (3.4), в котором ядро $K(t)$ определяется равенством (3.5).

ЛЕММА 3. *Справедливо следующее неравенство:*

$$(1-y)^p + py - 1 \geq y^2, \quad 0 < y < 2, \quad p = 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство (3.6) индукцией по p . При $p = 2$ оно очевидно. Пусть оно верно при некотором p , докажем его справедливость при $p+1$:

$$\begin{aligned} (1-y)^{p+1} + (p+1)y - 1 &= (1-y)^p + py - 1 + y[1 - (1-y)^p] \geq \\ &\geq (1-y)^p + py - 1 \geq y^2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. *Если $0 < y < 2$, $0 < \alpha < 1$, то из неравенства*

$$1 - (1-y)^p > \alpha, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (3.7)$$

вытекает неравенство

$$y > \frac{\alpha}{p}, \quad p = 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать неравенство (3.8) при $0 < y < 1$. Из неравенства (3.6), если заменить в нем y на α/p , следует неравенство $(1 - \alpha/p)^p > 1 - \alpha$. Учитывая неравенство (3.7), получаем неравенство (3.8): $1 - y < (1 - \alpha)^{1/p} < 1 - \alpha/p$.

При доказательстве следующей леммы используется интеграл вероятности ошибок

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau.$$

ЛЕММА 5. *Если $\psi(t)$ – непрерывное решение краевой задачи (1.3), (1.4), то существуют такие числа $C > 0$ и T , что справедлива оценка*

$$1 - \psi(t+T) > Ce^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $|\psi(t)| < 1$, $t \in \mathbb{R}$. Согласно теореме о несуществовании знакопостоянного решения существуют по крайней мере две точки t_1 и $t_2 > t_1$ такие, что $\psi(t) < 0$, $t_1 < t < t_2$. При сдвиге аргумента $t \rightarrow t+T$,

$T = (t_1 + t_2)/2$, получаем неравенство $1 - \psi(t + T) > 1$, $|t| < t_0$, $t_0 = (t_2 - t_1)/2$. Отсюда и из уравнения (3.6) для функции $y(t) = 1 - \psi(t + T)$ получаем оценки

$$\begin{aligned} 1 - (1 - y)^p &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} y(\tau) d\tau > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-t_0}^{t_0} e^{-(t-\tau)^2} d\tau = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \int_0^{t_0} e^{-\tau^2} \operatorname{ch}(2t\tau) d\tau > \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \int_0^{t_0} e^{-\tau^2} d\tau = \operatorname{erf}(t_0) e^{-t^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$1 - [1 - y(t)]^p > \operatorname{erf}(t_0) e^{-t^2}.$$

При $C = \operatorname{erf}(t_0)/p$ из этой оценки согласно лемме 4 вытекает оценка (3.9).

Благодарности. Автор сердечно благодарит И. Я. Арефьеву за полезные обсуждения и замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00727) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1).

Список литературы

- [1] P. H. Frampton, Y. Okada, *Phys. Rev. D*, **37**:10 (1988), 3077–3079.
- [2] L. Brekke, P. G. O. Freund, *Phys. Rep.*, **233**:1 (1993), 1–66.
- [3] N. Moeller, M. Schnabl, *JHEP*, **01** (2004), 011.
- [4] В. С. Владимиров, *ТМФ*, **149**:3 (2006), 354–367.
- [5] N. Moeller, B. Zwiebach, *JHEP*, **10** (2002), 034.
- [6] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 355–368.
- [7] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, *JHEP*, **02** (2007), 041.
- [8] E. Coletti, I. Sigalov, W. Taylor, *JHEP*, **08** (2005), 104; [arXiv: hep-th/0505031v1](#).
- [9] V. S. Vladimirov, *Science in China Series A: Mathematics*, **51**:4 (2008), 754–764.
- [10] V. S. Vladimirov, *Methods of the Theory of Generalized Functions*, Anal. Methods Spec. Funct., **6**, Taylor and Francis, London–New York, 2002.

Поступила в редакцию 10.01.2008