Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Арефьева, И. В. Волович, Т. Ишиватари, Задача
Коши на неглобально гиперболических многообразиях,
ТМФ, 2008, том 157, номер 3, 334–344

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:27:34

© 2008 г. И. Я. Арефьева*, И. В. Волович*, Т. Ишиватари*

ЗАДАЧА КОШИ НА НЕГЛОБАЛЬНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Рассматриваются решения задачи Коши для гиперболических уравнений на неглобально гиперболических многообразиях, содержащих замкнутые времениподобные кривые (машины времени). Доказано, что для волнового уравнения на таких многообразиях специального вида решение задачи Коши существует, оно разрывно и в определенном смысле единственно для произвольных начальных данных, заданных на гиперповерхности в момент времени, предшествующий образованию замкнутых времениподобных кривых. Если же гиперповерхность начальных данных пересекает область, содержащую замкнутые времениподобные кривые, то решение задачи Коши существует только в случае, если начальные данные удовлетворяют определенному условию самосогласованности.

Ключевые слова: задача Коши, неглобально гиперболические многообразия, замкнутые времениподобные кривые.

*Василию Сергеевичу Владимирову
к 85-летию с искренним уважением*

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время имеется разработанная теория задачи Коши для гиперболических уравнений на глобально гиперболических многообразиях [1]–[4]. Ориентируемое по времени пространство-время (т.е. пара (M, g) , где M – гладкое многообразие, g – лоренцева метрика) называется *глобально гиперболическим*, если M гомеоморфно $\mathbb{R}^1 \times \Sigma$, где Σ – поверхность Коши. Это определение эквивалентно определению глобальной гиперболичности Лере [4], [5]. Гиперболические уравнения на *неглобально гиперболических многообразиях* изучены значительно меньше, хотя многочисленные примеры таких многообразий представляются известными решениями уравнений гравитационного поля, такими как решения Геделя, Керра, Готта и многие другие [5]–[7] (об истории построения решения Геделя см. [8]). Элементарными примерами неглобально гиперболических многообразий являются пространство $\mathbb{S}_t^1 \times \mathbb{R}_x^3$, снабженное метрикой Минковского, а также пространство анти-де Ситтера.

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: arefeva@mi.ras.ru, volovich@mi.ras.ru, takumi@mi.ras.ru

Отметим, что в таких случаях естественно рассматривать решения гиперболических уравнений с конечным действием [9].

Если лоренцево многообразие содержит замкнутую времениподобную кривую (машину времени), то оно не является глобально гиперболическим. Имеется ряд физических статей, в которых обсуждаются простейшие гиперболические уравнения на неглобально гиперболических многообразиях [10]–[12]. Цель настоящей работы – исследовать волновое уравнение на многообразиях, содержащих замкнутые времениподобные кривые. Мы рассматриваем плоскость Минковского с двумя разрезами с определенным образом склеенными сторонами разрезов. Полученное многообразие содержит конические точки, и решение волнового уравнения, вообще говоря, разрывно. Мы докажем, что при естественных условиях на скачки правых и левых мод решений волнового уравнения решение задачи Коши существует и единственно, если задать начальные данные на прямой в момент времени, предшествующий образованию замкнутых времениподобных кривых (в этом случае эта прямая является поверхностью Коши). Если же начальные данные задаются на прямой, пересекающей область, содержащую замкнутые времениподобные кривые (в этом случае такая прямая не является поверхностью Коши), то решение задачи Коши существует, только если выполняется определенное условие самосогласованности. Для единственности решения задачи Коши в этом случае требуется задание дополнительных начальных данных.

Мотивировка настоящей работы связана с рассмотрением возможности рождения “кратовых нор” и неглобально гиперболических областей при столкновении частиц высоких энергий [13] (см. также [14]).

2. РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

На полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ рассмотрим два вертикальных интервала γ_1 и γ_2 длины $l > 0$:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x = a_1, b_1 < t < b_1 + l\}, \\ \gamma_2 &= \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x = a_2, b_2 < t < b_2 + l\}.\end{aligned}\tag{1}$$

Предположим, что

$$a_2 > a_1, \quad b_2 > b_1 + l + a_2 - a_1.$$

Предположим также, что стороны отрезков склеены, как показано на рис. 1 [11], [12]. Получившаяся область имеет две особые точки (конические сингулярности) – концы отрезков. Любой серый (или черный) вектор на рис. 1 изображает замкнутую времениподобную кривую.

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в открытом подмножестве области $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2\}$ для функции $u = u(t, x)$:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\tag{2}$$

$$u(t, x)|_{t=0} = u_0(x), \quad \partial_t u(t, x)|_{t=0} = u_1(x),\tag{3}$$

Рис. 1. Плоскость Минковского с двумя разрезами, склеенными определенным образом: “внутренние” стороны разрезов (черные линии) склеены друг с другом, “внешние” стороны разрезов (серые линии) также склеены друг с другом. Идентификация точек “внешних” сторон разрезов указана серыми линиями со стрелками, идентификация точек “внутренних” сторон разрезов указана черными линиями со стрелками. Также указан световой конус, выходящий из точки S_1 с координатами (b_1, a_1) . Предполагается, что вектор I , осуществляющий идентификацию, времениподобный. Точка S_2 имеет координаты (b_2, a_2) .

где $\bar{\gamma}_i$ – замыкание интервала γ_i , $i = 1, 2$. Предположим, что функция $u(t, x)$ и ее первые производные по t и x допускают непрерывное продолжение на интервалы γ_1 и γ_2 при стремлении (t, x) к γ_1 и γ_2 справа и слева, и зададим следующие условия сшивки:

$$u(t, x)|_{x=a_1-0} = u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2+0}, \quad (4)$$

$$\partial_x u(t, x)|_{x=a_1-0} = \partial_x u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2+0}, \quad (5)$$

$$u(t, x)|_{x=a_1+0} = u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2-0}, \quad (6)$$

$$\partial_x u(t, x)|_{x=a_1+0} = \partial_x u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2-0}, \quad (7)$$

где $b_1 < t < b_1 + l$.

Как известно [1], замена переменных

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = u\left(\frac{\eta - \xi}{2}, \frac{\eta + \xi}{2}\right), \quad \xi = x - t, \quad \eta = x + t, \quad (8)$$

приводит уравнение (2) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (9)$$

откуда следует, что решение уравнения (2) можно представить в виде

$$u(t, x) = f(x - t) + g(x + t),$$

где функции $f(\xi)$ и $g(\eta)$ – функции класса C^2 в соответствующих интервалах изменения переменных ξ и η .

Рассмотрим следующую задачу. Пусть несвязная область $\Omega_- \subset \mathbb{R}_+^2$ имеет вид

$$\Omega_- = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_0, \quad (10)$$

где области $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_0$ ограничены замыканиями интервалов γ_1 , γ_2 и полупрямыми (лучами), выходящими из концов интервалов γ_1 , γ_2 направо под углом 45° (см. рис. 2).

Любая функция w класса $C^k(\Omega_-)$ задается своими тремя компонентами: $w = (w_0, w_1, w_2)$, где $w_i \in C^k(\mathcal{D}_i)$, $i = 0, 1, 2$. Напомним, что $C^k(\overline{\mathcal{D}})$ означает класс функций из $C^k(\mathcal{D})$, которые вместе с первыми производными допускают непрерывное продолжение на замыкание $\overline{\mathcal{D}}$ [1]. Обозначим через $\mathcal{F}^1(\Omega_-)$ класс функций $w = (w_0, w_1, w_2)$ из $C^k(\Omega_-)$ таких, что $w_i \in C^k(\overline{\mathcal{D}_i})$, $i = 0, 1, 2$.

ЗАДАЧА. Требуется найти функцию $u(t, x) \in \mathcal{F}^2(\Omega_-)$, где Ω_- – несвязное открытое множество вида (10), удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \tilde{u}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0, \quad (\xi, \eta) \in \Omega_- \quad (11)$$

(и, следовательно, волновому уравнению (9)), а также условиям сшивки (4)–(7) и начальным условиям вида

$$u(t, x)|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть функция $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда решение сформулированной выше задачи в указанном классе функций существует и единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (11) следует, что в каждой из областей $\mathcal{D}_i$ решение представляется в виде

$$u(t, x) = f_i(x - t), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (13)$$

где $f_i(\xi)$ – функции класса C^2 в соответствующих областях изменения аргумента ξ . Из начального условия (12) следует

$$f_0(x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Используя далее условие сшивки (4), имеем

$$u_0(a_1 - t) = f_2(a_2 - b_2 + b_1 - t), \quad b_1 < t < b_1 + l, \quad (15)$$

а условие сшивки (6) дает

$$f_1(a_1 - t) = u_0(a_2 - b_2 + b_1 - t), \quad b_1 < t < b_1 + l. \quad (16)$$

Отметим, что условия сшивки (5) и (7) для функций вида (13) следуют из условий (4) и (6) соответственно.

Если $(t, x) \in \mathcal{D}_1$, то $\xi = x - t$ изменяется на интервале (рис. 2)

$$a_1 - b_1 - l < \xi < a_1 - b_1, \quad (17)$$

на котором и должна быть определена функция $f_1(\xi)$. Если $(t, x) \in \mathcal{D}_2$, то $\xi = x - t$ изменяется на интервале

$$a_2 - b_2 - l < \xi < a_2 - b_2, \quad (18)$$

на котором должна быть определена функция $f_2(\xi)$. Если $(t, x) \in \mathcal{D}_0$, то $\xi = x - t$ изменяется на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ (рис. 2). Формула (16) задает функцию

$$f_1(\xi) = u_0(\xi + a_2 - b_2 + b_1 - a_1), \quad (19)$$

где $\xi = x - t$ изменяется на интервале (17). Аналогично, формула (15) определяет функцию

$$f_2(\xi) = u_0(\xi + a_1 - a_2 + b_2 - b_1), \quad (20)$$

где $\xi = x - t$ изменяется на интервале (18).

Рис. 2. Область $\Omega_- = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_0$.

Итак, решение сформулированной выше задачи задается в (13), где функции f_1 , f_2 определены формулами (19), (20) и f_0 задается начальными данными

$$f_0(\xi) = u_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Предложение доказано.

Из доказательства предложения вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если функция $u = u(t, x) \in \mathcal{F}^1(\Omega_-)$ удовлетворяет уравнению (11) и условиям сшивки (4)–(7), то $u(t, x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, x) &= v(x - t), & (t, x) \in \mathcal{D}_0, \\ u(t, x) &= v(x - t + a_2 - a_1 - b_2 + b_1), & (t, x) \in \mathcal{D}_1, \\ u(t, x) &= v(x - t + a_1 - a_2 + b_2 - b_1), & (t, x) \in \mathcal{D}_2, \end{aligned} \quad (22)$$

где v – некоторая функция класса $C^1(\mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что сумма скачков на разрывах равна нулю. В частности, $\Delta_{S_1} + \Delta_{S_2} = 0$, здесь $\Delta_{S_i} = u(t + 0, x) - u(t - 0, x)$ при $t - x = b_i - a_i$, $i = 1, 2$ (см. рис. 2).

Аналогичное утверждение имеет место для $\Omega_+ = \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}'_0$ (см. рис. 3).

Рис. 3. Область $\Omega_+ = \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}'_0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если функция $u = u(t, x) \in \mathcal{F}^1(\Omega_+)$, где $\Omega_+ = \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}'_0$ – несвязное открытое множество указанного выше вида, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \tilde{u}(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi, \eta) \in \Omega_+, \quad (23)$$

и условиям сшивки (4)–(7), то $u(t, x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, x) &= v(x + t), & (t, x) \in \mathcal{D}'_0, \\ u(t, x) &= v(x + t + a_2 - a_1 + b_2 - b_1), & (t, x) \in \mathcal{D}_3, \\ u(t, x) &= v(x + t + a_1 - a_2 + b_1 - b_2), & (t, x) \in \mathcal{D}_4, \end{aligned} \quad (24)$$

где v – некоторая функция класса $C^1(\mathbb{R})$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны функции $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ и пусть функции f и g определены следующими формулами:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) - \int_{x_0}^x u_1(s) ds \right], \quad g(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) + \int_{x_0}^x u_1(s) ds \right], \quad (25)$$

Рис. 4. То же, что на рис. 1, но с явно обозначенными областями $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2, \dots, 7$.

где $x_0 \in \mathbb{R}$. Разделим область $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2\}$ на области $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2, \dots, 7$, как показано на рис. 4. Тогда компоненты функций $u(t, x)$, заданных в областях $\mathcal{D}_i$ формулами

$$\begin{aligned} u(t, x) &= f(x - t + a_2 - a_1 + b_1 - b_2) + g(t + x), & (t, x) \in \mathcal{D}_1, \\ u(t, x) &= f(x - t + a_1 - a_2 + b_2 - b_1) + g(t + x), & (t, x) \in \mathcal{D}_2, \\ u(t, x) &= f(x - t) + g(t + x + a_2 - a_1 + b_2 - b_1), & (t, x) \in \mathcal{D}_3, \\ u(t, x) &= f(x - t) + g(t + x + a_1 - a_2 + b_1 - b_2), & (t, x) \in \mathcal{D}_4, \\ u(t, x) &= f(x - t) + g(t + x), & (t, x) \in \mathcal{D}_i, \quad i = 5, 6, 7, \end{aligned} \quad (26)$$

принадлежат классу $C^2(\mathcal{D}_i) \cap C^1(\bar{\mathcal{D}}_i)$, $i = 1, 2, \dots, 7$, являются решениями волнового уравнения (2) в областях $\mathcal{D}_i$ и удовлетворяют начальным данным (3) и условиям сшивки (4)–(7).

Доказательство теоремы проводится непосредственной проверкой.

3. МИНИМАЛЬНО РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим теперь вопрос о единственности решения задачи Коши для волнового уравнения в несвязных областях.

Предположим, что для каждой из областей $\mathcal{D}_i$, $i = 1, \dots, 7$, приведенных на рис. 4, решение волнового уравнения принадлежит $C^2(\mathcal{D}_i)$. Тогда в силу известной теоремы [1] оно в каждой области представимо в виде суммы левой и правой мод.

Будем говорить, что функция, удовлетворяющая волновому уравнению в несвязных областях $\mathcal{D}_i$, удовлетворяет условию *минимальной разрывности*, если правые и левые моды, определенные в $\mathcal{D}_i$, допускают продолжение соответственно в $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{D}'_0$.

По решению (26) построим функцию $u_r(t, x)$ (правые моды):

$$\begin{aligned} u_r(t, x) &= f(x - t + a_2 - a_1 + b_1 - b_2), & (t, x) \in \mathcal{D}_1, \\ u_r(t, x) &= f(x - t + a_1 - a_2 + b_2 - b_1), & (t, x) \in \mathcal{D}_2, \\ u_r(t, x) &= f(x - t), & (t, x) \in \mathcal{D}_i, \quad i = 3, 4, 5, 6, 7, \end{aligned} \quad (27)$$

и функцию $u_l(t, x)$ (левые моды):

$$\begin{aligned} u_l(t, x) &= g(t + x), & (t, x) \in \mathcal{D}_i, \quad i = 1, 2, 5, 6, 7, \\ u_l(t, x) &= g(t + x + a_2 - a_1 + b_2 - b_1), & (t, x) \in \mathcal{D}_3, \\ u_l(t, x) &= g(t + x + a_1 - a_2 + b_1 - b_2), & (t, x) \in \mathcal{D}_4. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда функция $u_r(t, x)$, определенная в областях $\mathcal{D}_i$ формулами (27), допускает непрерывное продолжение в область $\mathcal{D}_0$ (см. рис. 2), а функция $u_l(t, x)$, определенная в областях $\mathcal{D}_i$ формулами (28), допускает непрерывное продолжение в область $\mathcal{D}'_0$ (см. рис. 3).

ТЕОРЕМА 2. В предположении минимальной разрывности решение задачи (2), (3), (4)–(7) единственно и дается формулами (26).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно сказать, что теоремы 1, 2 являются своеобразным аналогом теоремы об острие клина в теории функций комплексного переменного [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Интересно отметить, что если щели находятся на одинаковой высоте (рис. 5), $b_1 = b_2$, и ни одна из них не находится в тени другой, то решение соответствующей задачи (2), (3), (4)–(7) дается формулами, аналогичными (26) при $b_1 = b_2$.

Рис. 5. Щели находятся на одинаковой высоте и ни одна из них не находится в тени другой. Вектор идентификации – пространственный. Линии разрывов левых мод изображены серыми линиями, а правых мод – черными линиями.

Рис. 7. Поверхность C_b разбивает области D_i , $i = 0, 1$, представленные на рис. 2, на области D'_i и D''_i , $i = 0, 1$, соответственно. На поверхности C_b нельзя поставить задачу (11) с условиями сшивки (4), (6) и с произвольными начальными данными вида (12).

Это связано с тем, что правые моды, удовлетворяющие условиям (11), а также условиям сшивки (4)–(7), не могут быть найдены при произвольных начальных данных. Условия сшивки (4), (6) требуют, чтобы начальные данные на отрезках c и c' совпадали (см. рис. 7). Однако эти начальные данные на поверхности C_b не определяют искомую функцию в области D_2 .

Аналогичная картина возникает и для волнового уравнения с начальными данными на поверхности C_b (см. рис. 6).

Благодарности. И. Я. Арефьева благодарит Х. Нильсона за полезные обсуждения. Работа частично поддержана INTAS (грант № 03-51-6346), РФФИ (гранты № 08-01-00798 (И. Я. Арефьева) и № 08-01-00727 (И. В. Волович, Т. Ишиватари)) и Программой поддержки ведущих научных школ (гранты НШ-795.2008.1 (И. Я. Арефьева) и НШ-3224.2008.1 (И. В. Волович)).

Список литературы

- [1] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1988.
- [2] Ж. Адамар, *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*, Наука, М., 1978.
- [3] I. Petrowsky, *Матем. сб.*, **2(44)**:5 (1937), 815–870.
- [4] Ж. Лере, *Гиперболические дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1984.
- [5] С. Хокинг, Дж. Эллис, *Крупномасштабная структура пространства-времени*, Мир, М., 1977.
- [6] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: from Einstein to Hawking*, AIP Ser. Comput. Appl. Math. Phys., Springer, New York, 1995.
- [7] J. R. Gott, *Time Travel in Einstein's Universe: the Physical Possibilities of Travel Through Time*, Houghton Mifflin, New York, 2001.
- [8] I. Todorov, *Kurt Goedel and his universe*, [arXiv: 0709.1387](https://arxiv.org/abs/0709.1387).

- [9] V. V. Kozlov, I. V. Volovich, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **3**:7 (2006), 1349–1357; [arXiv: gr-qc/0603111](#).
- [10] J. Friedman, M. S. Morris, I. D. Novikov et al., *Phys. Rev. D*, **42**:6 (1990), 1915–1930.
- [11] D. Deutsch, *Phys. Rev. D*, **44**:10 (1991), 3197–3217.
- [12] H. D. Politzer, *Phys. Rev. D*, **49**:8 (1994), 3981–3989.
- [13] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **5**:4 (2008), 641–651; [arXiv: 0710.2696](#).
- [14] A. Mironov, A. Morozov, T. N. Tomaras, *Facta Univer. Ser. Phys., Chem., Technology*, **4** (2006), 381–404; [arXiv: 0710.3395](#).
- [15] В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.

Поступила в редакцию 23.06.2008