Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, Применения тауберовых теорем в некоторых задачах математической физики, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 3, 373–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 10:37:00

© 2008 г.

Ю. Н. Дрождинов*, Б. И. Завьялов*

ПРИМЕНЕНИЯ ТАУБЕРОВЫХ ТЕОРЕМ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Приведены некоторые многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций и указаны примеры их применения в математической физике. В частности, рассмотрены вопросы стабилизации решений задачи Коши для уравнений теплопроводности, диффузии многокомпонентного газа, асимптотики задачи Коши для свободного уравнения Шредингера в нормах различных банаховых пространств и др.

Ключевые слова: тауберовы теоремы, обобщенные функции, дифференциальные уравнения в частных производных, голоморфные функции, уравнение Шредингера, задача Коши, банаховы пространства.

ВВЕДЕНИЕ

Тауберовыми теоремами обычно называют теоремы, позволяющие по поведению некоторых средних от (обобщенных) функций судить об асимптотическом поведении самих функций или каких-то других средних. Сюда можно отнести теоремы, связывающие асимптотическое поведение функции с асимптотическим поведением ее преобразований Лапласа, Фурье или других интегральных преобразований. Тауберова теория интенсивно развивалась в первой половине XX столетия в основном в применении к функциям или мерам одной независимой переменной. Ее результаты подытожены в работах Харди [1], Винера [2] и Кореvara [3]. Однако потребности современной теоретической и математической физики поставили задачу распространения классической тауберовой теории для мер на более общие объекты – обобщенные функции как одной, так и многих переменных. Эта проблематика была инициирована фундаментальной работой Боголюбова, Владимирова, Тавхелидзе [4] в связи с теоретическим обоснованием автомодельного поведения величин квантовой теории поля при высоких энергиях и больших переданных импульсах. Задача состояла в том, чтобы выяснить, не противоречит ли наблюдаемое в эксперименте

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: drozzin@mi.ras.ru, bzavial@mi.ras.ru

поведение форм-факторов лептон-адронного рассеяния боголюбовской аксиоматике квантовой теории поля.

Оказалось, что автомодельное поведение форм-факторов глубоко неупругого рассеяния в асимптотической области Бьеркина целиком определяется квазиасимптотическими свойствами их весовых функций в представлении Йоста–Лемана–Дайсона. Тем самым было показано, что указанное асимптотическое поведение не противоречит общим принципам квантовой теории поля (см. [5]). В 1976 г. Владимиров распространил известную тауберову теорему Харди–Литтлвуда на многомерный случай [6]. После опубликования этих работ развернулись систематические исследования по тауберовой теории обобщенных функций как в чисто математическом плане, так и с точки зрения их применения в теоретической и математической физике. Обзор литературы по этой проблематике можно найти в работах [7]–[10].

В настоящей статье рассмотрены некоторые тауберовы теоремы для обобщенных функций и их применения к задачам математической физики. Для формулировки этих теорем нам потребуются сведения из теории обобщенных функций.

1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Обозначим через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, с топологией, задаваемой счетной системой полунорм

$$\mathcal{P}_N[\varphi] = \max_{0 \leq |j| \leq N} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (1 + |t|^2)^{N/2} |\varphi^{(j)}(t)|, \quad N = 0, 1, \dots$$

Здесь

$$(j) = (j_1, \dots, j_n), \quad |j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n, \quad \varphi^{(j)}(t) = \frac{\partial^{|j|} \varphi(t)}{\partial t^{(j)}}.$$

Пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ – это пространство медленно растущих обобщенных функций, т.е. линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Всюду далее волной обозначается преобразование Фурье основной (обобщенной) функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'$ и $\rho(k)$ – положительная непрерывная функция при $k > 0$. Мы говорим, что $f(t)$ обладает квазиасимптотикой на бесконечности (в нуле) относительно $\rho(k)$ на некотором подпространстве $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \rightarrow g(t) \quad \left(\frac{1}{\rho(k)} f\left(\frac{t}{k}\right) \rightarrow g(t) \right), \quad k \rightarrow +\infty, \quad (1.1)$$

т.е. для любой основной функции $\varphi(t) \in \mathcal{M}$

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (g(t), \varphi(t)) \quad \left(\frac{1}{\rho(k)} \left(f\left(\frac{t}{k}\right), \varphi(t) \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (g(t), \varphi(t)) \right),$$

с некоторой $g(t) \in \mathcal{S}'$. Если $\mathcal{M}$ совпадает со всем $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то мы говорим, что $f(t)$ асимптотически однородна на бесконечности (в нуле) относительно ρ . При этом пишем $f(t) \in \text{АО}_\rho(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.

Если выполнено соотношение (1.1) для инвариантного относительно дилатаций пространства $\mathcal{M}$ и $g(t) \not\equiv 0$ на $\mathcal{M}$, то функция $\rho(k)$ обязательно является автомодельной (правильно меняющейся) функцией. Другими словами, для любого $a > 0$ и некоторого α

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \rightarrow a^\alpha, \quad k \rightarrow \infty,$$

равномерно на компактах по a в $(0, +\infty)$. Число α называется *порядком* ρ и порядком асимптотически однородной обобщенной функции. Отметим, что предельная функция $g(t)$ в (1.1) является однородной обобщенной функцией степени α .

Считая, что $\rho(k)$ продолжена до непрерывной положительной функции на $[0, +\infty)$, имеем следующую оценку: для любого $\varepsilon > 0$ существует C_ε такое, что

$$\frac{\rho(ka)}{\rho(k)} \leq \begin{cases} C_\varepsilon a^{\alpha+\varepsilon} & \text{при } a > 1, \quad k > 1, \\ C_\varepsilon a^{\alpha-\varepsilon} & \text{при } k^{-1} < a < 1, \quad k > 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Примерами автомодельных функций порядка α могут служить функции

$$k^\alpha, \quad k^\alpha \ln k, \quad k^\alpha \ln \ln k, \quad k^\alpha \left(1 + \frac{1}{2} \sin \ln \ln k\right), \quad k^\alpha e^{\sqrt{\ln k}}.$$

Эти функции служат наиболее общей асимптотической шкалой [11].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Если обобщенная функция $f(t) \in \text{AO}_\rho(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, т.е. $f(t)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , то ее преобразование Фурье $\tilde{f}(x)$ асимптотически однородно в нуле относительно автомодельной функции $\rho_1(k) = k^n \rho(k)$.

Описание и свойства асимптотически однородных функций хорошо изучены для функций из $\mathcal{S}'_+$ – пространства обобщенных функций медленного роста с носителями на положительной полуоси. В частности, $f(r) \in \mathcal{S}'_+$ асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , если

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kr) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} C f_{\alpha+1}(r) \quad \text{в } \mathcal{S}'_+,$$

где ядро дробного (дифференцирования) интегрирования $f_\beta(r) \in \mathcal{S}'_+$ определяется формулой

$$f_\beta(r) = \begin{cases} \frac{\Theta(r)r^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \text{при } \beta > 0, \\ \frac{d^N}{dr^N} f_{\beta+N}(r) & \text{при } \beta \leq 0, \quad \beta + N > 0 \text{ рекуррентно по } N. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\beta)$ – гамма-функция, $\Theta(r)$ – функция Хевисайда.

Равенство

$$f^{(-\beta)}(r) = f_\beta(r) * f(r)$$

при $\beta > 0$ задает первообразную, а при $\beta < 0$ – производную порядка β обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}^1)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Для того чтобы обобщенная функция $f(r) \in \mathcal{S}'_+$ была асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число N , $N > -\alpha - 1$, чтобы $f^{(-N)}(r)$ была непрерывна и

$$\frac{f^{(-N)}(r)}{r^N \rho(r)} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} A.$$

Асимптотически однородные функции обладают рядом интересных свойств и участвуют в формулировке многих тауберовых теорем и в различных задачах математической физики. Отметим, что при $\alpha \leq -n$ свойство асимптотической однородности функции не является чисто асимптотическим, а зависит от глобальных свойств обобщенной функции в целом. Например, обобщенные функции с финитными носителями асимптотически однородны относительно $\rho(k) = k^\alpha$, $\alpha = -n - p$, при некотором $p = 0, 1, \dots$, при этом предельная функция представляется линейной комбинацией дельта-функций и их производных. Как известно, $r^{-N} N! f^{(-N)}(r) = S_r^N(f)$ – чезаровское среднее порядка N , таким образом, понятие асимптотической однородности в случае $\mathcal{S}'_+$ адекватно отражает асимптотическое поведение чезаровских средних.

В случае многих переменных рассмотренные выше результаты обобщаются следующим образом.

Пусть Γ – замкнутый, выпуклый, острый и телесный конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат. Пусть сопряженный к нему конус

$$\Gamma^* = [y \in \mathbb{R}^n : (y, t) > 0, t \in \Gamma] = C \neq \emptyset.$$

Например,

$$\Gamma = \overline{\mathbb{R}_+^n} = [t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0, i = 1, \dots, n],$$

$$C = \mathbb{R}_+^n = [t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_i > 0, i = 1, \dots, n]$$

или

$$\Gamma = \overline{V_n^+} = [t = (t_0, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_0 \geq |t|],$$

$$C = V_n^+ = [t = (t_0, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t_0 > |t|].$$

Обозначим через T^C трубчатую область в $\mathbb{C}^n$ с базой C , $T^C = \mathbb{R}^n + iC$, а через $H(T^C)$ – класс голоморфных функций в трубчатой области T^C с полиномиальной оценкой роста при приближении к границе области, так что для любой $\tilde{f}(z) \in H(T^C)$ выполнена оценка

$$|\tilde{f}(z)| \leq M \frac{(1 + |x|)^a}{\Delta_C^b(y)}, \quad z = x + iy \in T^C,$$

при некоторых M, a, b ; здесь $\Delta_C(y)$ – расстояние от $y \in C$ до границы конуса C .

Пространство обобщенных функций медленного роста с носителями в конусе Γ мы обозначаем $\mathcal{S}'(\Gamma) = \{f(t) \in \mathcal{S}', \text{supp } f \subset \Gamma\}$. Это пространство является двойственным к пространству $\mathcal{S}(\Gamma)$, которое состоит из бесконечно дифференцируемых

в Γ функций, быстро убывающих на бесконечности вместе со всеми производными. Пространство $\mathcal{S}'(\Gamma)$ изоморфно пространству $H(T^C)$. Этот изоморфизм задается преобразованием Лапласа

$$L[f(t)](z) = (f(t), e^{i(z,t)}) = \tilde{f}(z), \quad z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in C.$$

Функция $f(t)$ называется *спектральной функцией* для $\tilde{f}(z)$. Заметим, что пространство $\mathcal{S}'(\Gamma)$ является сверточной алгеброй. Кроме того, отметим, что у функций $\tilde{f}(z)$ существует граничное значение (в смысле обобщенных функций)

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \in C'}} \tilde{f}(z) = F[f(t)](x),$$

где $C' \in C$, а $F[\cdot]$ – преобразование Фурье.

Пусть $\Theta_\Gamma(t)$ – характеристическая функция конуса Γ . Функция

$$\mathcal{K}_C(z) = L[\Theta_\Gamma(t)](z) = \int_\Gamma e^{i(z,\xi)} d\xi$$

называется ядром Коши трубчатой области $T^C = \mathbb{R}^n + iC$. Например,

$$\mathcal{K}_{\mathbb{R}_+^n} = \frac{i^n}{z_1 \dots z_n}, \quad \mathcal{K}_{V_n^+} = c \cdot (-z^2)^{-(n+1)/2},$$

где

$$c = 2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad z^2 = z_0^2 - z_1^2 - \dots - z_n^2.$$

Конус называется регулярным, если $\mathcal{K}^{-1}(z) \in H(T^C)$. Для регулярных конусов можно ввести понятие дробного интегрирования и дифференцирования относительно конуса. Для любого вещественного α определим обобщенную функцию $\Theta_\Gamma^\alpha(t)$ формулой

$$L[\Theta_\Gamma^\alpha(t)] = \mathcal{K}_C^\alpha(z).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\Gamma)$. Обобщенную функцию

$$f^{(-\alpha)}(t) = \Theta_\Gamma^\alpha(t) * f(t)$$

при $\alpha > 0$ называют *первообразной*, а при $\alpha < 0$ – *производной порядка α относительно конуса Γ* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Будем говорить, что локально интегрируемая в Γ функция $f(t)$ имеет асимптотику в конусе Γ относительно автомодельной функции $\rho(k)$, если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho(k)} f(kt) = g(t), \quad t \in \Gamma,$$

и выполнена оценка

$$\left| \frac{1}{\rho(k)} f(kt) \right| \leq \psi(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $\psi(t)$ – локально интегрируемая функция такая, что существует число M , при котором

$$\int_{\Gamma} \frac{\psi(t) dt}{1 + |t|^M} \leq \infty.$$

Далее всюду предполагается, что Γ – регулярный конус.

В многомерном случае справедливо утверждение, аналогичное утверждению 1.2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. Пусть Γ – острый, замкнутый, выпуклый, телесный конус. Для того чтобы $f(t) \in \mathcal{S}'(\Gamma)$ была асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$, т.е. чтобы $f(t) \in \text{AO}_{\rho}(\mathcal{S}(\Gamma))$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число N такое, что $f^{(-N)}(t)$ непрерывна и имеет асимптотику в Γ относительно $k^{nN}\rho(k)$.

2. ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ТИПА ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

Пусть $F(z) \in H(T^C)$, где C – острый, выпуклый, открытый конус в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что голоморфная функция $F(z) \in H(T^C)$ ведет себя в T^C как $\rho(|z|^{-1})$, где $\rho(k)$ – автомодельная функция, если выполнены следующие условия:

существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} F\left(\frac{z}{k}\right) \quad \text{для любого } z \in T^C; \quad (2.1)$$

существуют числа b, c, ε такие, что

$$|F(z)| \leq \rho\left(\frac{1}{|z|}\right) \frac{c}{\varphi^b}, \quad |z| < \varepsilon, \quad \text{где } \varphi = \min\left\{\Delta_C\left(\frac{y}{|y|}\right), \frac{|y|}{|z|}\right\}. \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 2.1 (общая тауберова теорема). Пусть Γ – замкнутый, острый, выпуклый, открытый конус в $\mathbb{R}^n$ и $C = \text{int } \Gamma^*$. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\Gamma)$. Для того чтобы функция $f \in \text{AO}_{\rho}(\mathcal{S}(\Gamma))$, необходимо и достаточно, чтобы ее преобразование Лапласа $\hat{f}(z)$ вело себя в T^C как $|z|^{-n}\rho(|z|^{-1})$.

СЛЕДСТВИЕ. Голоморфная функция $F(z) \in H(T^C)$ ведет себя в T^C при $z \rightarrow 0$ как $\rho(|z|^{-1})$ тогда и только тогда, когда ее граничное значение $f(x)$ асимптотически однородно в нуле относительно $\rho(k)$.

При применении общей тауберовой теоремы проверка условия (2.2) во многих случаях весьма затруднительна и трудоемка. Однако для некоторых подклассов пространства $H(T^C)$ условие (2.2) есть следствие условия (2.1). Следующая теорема является многомерным обобщением классической теоремы Харди–Литтлвуда.

ТЕОРЕМА 2.2 (Владимиров). Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α и Γ – замкнутый, выпуклый, острый и телесный конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат, C – сопряженный к нему конус. Пусть $[d\mu(t)] \in \mathcal{S}'(\Gamma)$ – неотрицательная мера. Для того чтобы ее первообразная $\mu(t)$ имела асимптотику в Γ

относительно $k^n \rho(k)$, в частности

$$\frac{\mu(t)}{|t|^n \rho(|t|)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{t \in \Gamma'} g\left(\frac{t}{|t|}\right) \quad \text{для любого } \Gamma' \in \Gamma,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал открытый подконус $C' \subset C$ такой, что

$$\frac{r^n}{\rho(r^{-1})} [\widetilde{d\mu}](iry) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} h(iy), \quad y \in C'.$$

При этом справедлива формула

$$h(iy) = \Gamma(2n + \alpha) \int_{\text{pr } \Gamma} \frac{g(\xi) d\xi}{(y, \xi)^{2n+\alpha}}.$$

Следующая теорема применяется при изучении асимптотик решений уравнений в свертках с пассивным ядром. Пассивность ядра относительно конуса Γ означает, что реальная часть его преобразования Лапласа положительна в T^C и тем более имеет там ограниченный аргумент.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\Gamma)$, а ее преобразование Лапласа $\tilde{f}(z)$ имеет ограниченный аргумент в некоторой окрестности нуля в T^C . Для того чтобы $f \in \text{AO}_\rho(\mathcal{S}(\Gamma))$, т.е. чтобы

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g(t) \quad \text{в } \mathcal{S}'(\Gamma),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал открытый подконус $C' \subset C$ такой, что

$$\frac{r^n}{\rho(r^{-1})} \tilde{f}(iry) \xrightarrow{r \rightarrow +0} h(iy), \quad y \in C'.$$

При этом $h(z) = \tilde{g}(z)$, $z \in T^C$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в условиях теоремы 2.3 предположить, что $\text{Im } \tilde{f}(z) \geq 0$, то вторая первообразная (точнее, первообразная порядка $2 + \varepsilon$) относительно конуса Γ будет непрерывной функцией с обычной асимптотикой.

Подробное доказательство этих теорем изложено в [7].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $Q(t) \in \mathcal{S}'(\Gamma)$ обладает квазиасимптотикой $Q_0(t)$ относительно автомодельной функции $\rho(k)$, а $\tilde{Q}(z)$ имеет ограниченный аргумент в T^C . Пусть также функция $g(t) \in \mathcal{S}'(\Gamma)$ обладает квазиасимптотикой $g_0(t)$ относительно автомодельной функции $\rho_1(k)$. Тогда уравнение в свертках

$$Q(t) * u(t) = g(t) \tag{2.3}$$

имеет решение $u(t) \in \mathcal{S}'(\Gamma)$, обладающее квазиасимптотикой $u_0(t)$ относительно $\frac{\rho_1(k)}{k^n \rho(k)}$, причем $Q_0(t) * u_0(t) = g_0(t)$.

Доказательство этого следствия непосредственно вытекает из утверждения теоремы 2.3, если в (2.3) перейти к преобразованию Лапласа и заметить, что $\tilde{Q}^{-1}(z)$ также имеет ограниченный аргумент.

Напомним, что дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами m -го порядка

$$Q(\partial) = \sum_{|j| \leq m} a_j \frac{\partial^{|j|}}{\partial t^j}, \quad \sum_{|j|=m} |a_j| \neq 0,$$

называется гиперболическим относительно конуса C , если существует точка $y^0 \in \mathbb{R}^n$ такая, что $Q(y^0 - iz) \neq 0$ при $z \in T^C$. При этом полином $P(-iz) = Q(y^0 - iz)$ называют гиперболическим полиномом относительно конуса C . Фундаментальное решение оператора $Q(\partial)$ представляется в виде $e^{(y^0, t)} \mathcal{E}(t)$, где $\mathcal{E}(t)$ – фундаментальное решение оператора $P(\partial)$. Запишем гиперболический полином в виде

$$P(-iz) = \sum_{q=\ell}^m P_q(-iz), \quad (2.4)$$

где $P_q(-iz)$ – однородный полином степени q . Можно показать [7], что гиперболический полином относительно конуса C имеет в T^C ограниченный аргумент, и из следствия теоремы 2.3 вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Для любого регулярного конуса Γ фундаментальное решение гиперболического относительно конуса $C = \text{int } \Gamma^*$ оператора $P(\partial)$ вида (2.4) асимптотически однородно относительно $\rho(k) = k^{\ell-n}$,*

$$\frac{1}{k^{\ell-n}} \mathcal{E}(kt) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}_0(t) \quad \text{в } \mathcal{S}'(\Gamma).$$

При этом $\mathcal{E}_0(t)$ является фундаментальным решением оператора $P_\ell(\partial)$.

Таким образом, квазиасимптотика фундаментального решения гиперболического оператора определяется его младшими членами.

ПРИМЕР. Рассмотрим гиперболический оператор (второго порядка с двумя независимыми переменными) относительно конуса C . Без ограничения общности можно считать, что

$$C = V_1^+ = \text{int } \Gamma^*, \quad \Gamma = \{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2, t_0 \geq |t_1|\} = \overline{V}_1^+$$

и $Q(\partial) = \partial_0^2 - \partial_1^2 \pm c^2$, где $c \geq 0$ ($Q(y^0 - iz) = -z_0^2 + z_1^2 \pm c^2$). Рассмотрим возможные гиперболические операторы в этом случае.

1. Волновое уравнение: $c = 0$, $\ell = n = 2$, $\rho(k) = 1$ и

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) = \frac{1}{2} \Theta_\Gamma(t) = \frac{1}{2} \Theta(t_0 - t_1).$$

2. Уравнение Клейна–Гордона: $n = 2$, $\ell = 0$ и

$$Q(\partial) = \partial_0^2 - \partial_1^2 + c^2 = P_2(\partial) + P_0(\partial), \quad \text{где } P_0(\partial) = c^2.$$

Фундаментальное решение асимптотически однородно относительно $\rho(k) = k^{-2}$, при этом $L[\mathcal{E}_0(t)] = 1/c^2$ и, следовательно, $\mathcal{E}_0(t) = \delta(t)/c^2$. Отсюда, пользуясь известным выражением для фундаментального решения, имеем

$$\frac{1}{\rho(k)} \mathcal{E}(kt) = \frac{k^2}{2} \Theta_{\bar{V}_1^+}(kt) J_0\left(kc\sqrt{t_0^2 - t_1^2}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{c^2} \delta(t) \quad \text{в } \mathcal{S}'(\bar{V}_1^+).$$

Здесь J_0 – функция Бесселя.

3. Телеграфное уравнение: $\ell = 1$, $n = 2$,

$$Q(\partial) = \partial_0^2 - \partial_1^2 - c^2, \\ P(\partial) = Q(y^0 + \partial) = \partial_0^2 - \partial_1^2 + 2c\partial_0 = P_2(\partial) + P_1(\partial), \quad P_1(y) = 2cy^0,$$

где $y^0 = (c, 0)$. Фундаментальное решение $P(\partial)$ асимптотически однородно относительно $\rho(k) = k^{-1}$, при этом $L[\mathcal{E}_0(t)] = 1/(-2icz_0)$ и, следовательно, $\mathcal{E}_0(t) = \Theta(t_0)\delta(t_1)/2c$. Отсюда, пользуясь известным выражением для фундаментального решения, имеем

$$\frac{1}{\rho(k)} \mathcal{E}(kt) = \frac{k}{2} \Theta_{\bar{V}_1^+}(kt) I_0\left(kc\sqrt{t_0^2 - t_1^2}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \Theta(t_0)\delta(t_1) \quad \text{в } \mathcal{S}'(\bar{V}_1^+).$$

Здесь I_0 – функция Бесселя мнимого аргумента. Отметим, что носитель квазиасимптотики телеграфного уравнения (в отличие от уравнения Клейна–Гордона) не компактен.

3. ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Большинство из приведенных выше результатов может быть получено из единой общей теоремы. Для ее формулировки напомним некоторые определения.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ – произвольные локально выпуклые топологические пространства. Через $\mathbb{L}(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L})$ обозначим пространство всех линейных непрерывных отображений из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{L}$, таким образом, $\mathcal{S}'$ есть не что иное, как $\mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ можно трактовать как пространство обобщенных функций медленного роста (над $\mathcal{S}$) со значениями в $\mathcal{L}$.

Стандартное усреднение обобщенной функции $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ с ядром $\omega \in \mathcal{S}$ дается формулой

$$L_f^\omega(x, y) = \left(f(\eta), \frac{1}{y^n} \omega\left(\frac{x - \eta}{y}\right) \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times (0, 1]. \quad (3.1)$$

Очевидно, что $L_f^\omega(x, y)$ – непрерывная функция в $\mathbb{R}^n \times (0, 1]$ со значениями в локально выпуклом пространстве $\mathcal{L}$.

Будем говорить, что функция $g(x)$ измерима как функция со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, если она измерима по Бохнеру, т.е. является пределом почти всюду по x непрерывных функций со значениями в $\mathbb{B}$.

Пусть ℓ – целое неотрицательное число. Через $\mathbb{P}^\ell$ обозначим кольцо (идеал в кольце многочленов n переменных) всех многочленов вида $\sum_{|j|=\ell+1}^q C_j x^j$, где q – любое целое число, $\ell + 1 \leq q$. Пусть $\{P_k(x), k = 0, 1, \dots, N\}$ – множество однородных многочленов. Через $\mathbb{P}[P_0, P_1, \dots, P_N]$ обозначим идеал, натянутый на многочлены $P_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Пусть $T_\psi^\ell(x)$ – тейлоровское разложение в начале координат функции $\psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ до порядка ℓ включительно,

$$T_\psi^\ell(x) = \sum_{|j|=0}^{\ell} \frac{1}{j!} \psi^{(j)}(0) x^j. \quad (3.2)$$

Пусть M – целое число и $P_k(\lambda)$ – однородный многочлен степени k или тождественный нуль, $k = 0, 1, \dots, N$. Через $\mathcal{S}_{[M; P_0, \dots, P_N]}$ обозначим подпространство пространства $\mathcal{S}$, состоящее из основных функций, у которых тейлоровское разложение в начале координат до порядка M принадлежит идеалу $\mathbb{P}[P_0, P_1, \dots, P_N]$. Другими словами,

$$\mathcal{S}_{[M; P_0, \dots, P_N]} = \{\varphi \in \mathcal{S} : T_\varphi^M \in \mathbb{P}[P_0, P_1, \dots, P_N]\}. \quad (3.3)$$

Аналогично

$$\tilde{\mathcal{S}}_{[M; P_0, \dots, P_N]} = \{\varphi \in \mathcal{S} : T_\varphi^M \in \mathbb{P}[P_0, P_1, \dots, P_N]\}. \quad (3.4)$$

Условимся считать, что при $M < 0$ подпространство $\mathcal{S}_{[M; P_0, \dots, P_N]} = \mathcal{S}$ (аналогично $\tilde{\mathcal{S}}_{[M; P_0, \dots, P_N]} = \mathcal{S}$). Заметим, что $\mathcal{S}_{[M; P_0, \dots, P_N]}$ – замкнутое подпространство пространства $\mathcal{S}$ и если $P_0 \neq 0$, то $\mathcal{S}_{[M; P_0, \dots, P_N]} = \mathcal{S}$.

ЛЕММА 3.1. Пусть задано семейство многочленов $\{P_q(\lambda), q = 0, 1, \dots, d\}$, где $P_q(\lambda)$ – однородный многочлен степени q (или тождественный нуль), и функция $\varphi(x) \in \mathcal{S}$. Тогда $\tilde{\varphi}(\lambda) \in \mathcal{S}_{[d; P_0, P_1, \dots, P_d]}$ в том и только в том случае, когда $\int Q(x) \varphi(x) dx = 0$ для любого многочлена $Q(x)$ степени не выше d такого, что

$$P_q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) Q(x) = 0, \quad q = 0, 1, \dots, d.$$

ТЕОРЕМА 3.1 [12], [13]. Пусть $\mathbb{B}$ и $\mathcal{L}$ – банаховы пространства, $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$ линейно и непрерывно, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$ и $\omega(x) \in \mathcal{S}$, причем существует m такое, что

$$T_\omega^m(\tau \bar{e}) \neq 0 \quad \text{для любого } \bar{e}, |\bar{e}| = 1, \quad \text{при } \tau > 0. \quad (3.5)$$

Предположим также, что при каждом $y \in (0, 1)$ функция $L_f^\omega(x, y)$, определяемая формулой (3.1), принимает значения в $\mathbb{B}$ и измерима по $x \in \mathbb{R}^n$ как функция со значениями в $\mathbb{B}$, причем найдутся c, b и a такие, что при $0 < y \leq 1$

$$\|L_f^\omega(x, y)\|_{\mathbb{B}} \leq c \frac{(1 + |x|)^a}{y^b} \quad \text{при почти всех } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

Обозначим через $P_k(\lambda)$ однородную часть степени k тейлоровского разложения функции $\tilde{\omega}(\lambda)$ в нуле, так что

$$T_\omega^N(\lambda) = \sum_{k=0}^N P_k(\lambda), \quad N = 0, 1, \dots$$

Тогда найдется целое число ℓ такое, что для любой $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\ell; P_0, \dots, P_\ell]}$ имеем

$$(f, \varphi) \in \mathbb{B}, \quad \text{причем} \quad \|(f, \varphi)\|_{\mathbb{B}} \leq c_1 \mathcal{P}_N[ipf] \quad (3.7)$$

для некоторых c_1 и N .

Заметим, что число ℓ , фигурирующее в этой теореме, вообще говоря, зависит от обобщенной функции f (точнее, от ее порядка сингулярности) и, как правило, заранее не известно. Однако, как показывает следующая лемма, эту трудность в некоторых случаях удается обойти.

ЛЕММА 3.2. Пусть в условиях теоремы 3.1 существуют M и N такие, что $\mathbb{P}^M \subset \mathbb{P}[P_0, \dots, P_N]$, тогда в теореме 3.1 можно считать, что $\ell = M$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Данная лемма следует из более общего утверждения. Пусть $f \in \mathbb{L}(\tilde{\mathcal{S}}_{[\ell_i; Q_i]} \rightarrow \mathbb{B})$, где ℓ_i – целые числа, Q_i – однородные многочлены, $i = 1, 2, \dots$, и для некоторого целого M идеал $\mathbb{P}^M \subset \mathbb{P}[Q_1, Q_2, \dots, Q_m]$. Тогда $f \in \mathbb{L}(\tilde{\mathcal{S}}_{[M; Q_1, \dots, Q_m]} \rightarrow \mathbb{B})$.

Из предыдущей теоремы, построив специальным образом фигурирующее в ней банахово пространство, можно получить теорему, существенно обобщающую (в одномерном случае) теорему 2.1.

ТЕОРЕМА 3.2 [12], [13]. Пусть $\mathbb{B}$ – банахово пространство, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$, $\omega(x) \in \mathcal{S}$, причем выполнено условие (3.5), и тейлоровское разложение функции $\tilde{\omega}(t)$ в начале координат имеет вид

$$T_{\tilde{\omega}}^N(t) = \sum_{q=0}^N P_q(t), \quad N = 0, 1, \dots, \quad (3.8)$$

где $P_q(t)$ – однородный многочлен степени q (или тождественный нуль). Пусть также существуют постоянные A и b такие, что

$$\sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \|L_f^{\omega}(kx, ky)\|_{\mathbb{B}} \leq \frac{A}{y^b} \quad \text{при} \quad |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \quad (3.9)$$

Тогда существует единственный многочлен вида

$$Q(x) = \sum_{\alpha < \tau < \ell} Q_{\tau}(x), \quad (3.10)$$

где ℓ – некоторое целое число, а $Q_{\tau}(x)$ – однородный многочлен степени τ (или тождественный нуль) такой, что обобщенная функция $G(x) = f(x) - Q(x)$ квазиасимптотически ограничена на бесконечности относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi \in \mathcal{S}$, если $\alpha \neq 0, 1, \dots$, и на всех $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, P_1, \dots, P_{\alpha}]}$, если $\alpha = 0, 1, \dots$, т.е. имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \sup_{k>1} \frac{1}{\rho(k)} \|(G(kx), \varphi(x))\|_{\mathbb{B}} &< \infty \\ \text{для любой } \varphi \in \mathcal{S}, & \quad \text{если } \alpha \neq 0, 1, \dots, \\ \text{для любой } \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, \dots, P_{\alpha}]}, & \quad \text{если } \alpha = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

При этом

$$P_q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) Q_\tau(x) = 0, \quad \alpha < \tau < \ell, \quad q = 0, 1, \dots \quad (3.12)$$

Если к тому же существует

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} L_f^\omega(kx, ky) = C(x, y) \quad \text{при } |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0, \quad (3.13)$$

то обобщенная функция $G(x)$ обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$ на всех $\varphi \in \mathcal{S}$, если $\alpha \neq 0, 1, \dots$, и на всех $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, P_1, \dots, P_\alpha]}$, если $\alpha = 0, 1, \dots$. Другими словами,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} (G(k\xi), \varphi(\xi)) &= C_\varphi \\ \text{для любой } \varphi \in \mathcal{S}, & \quad \text{если } \alpha \neq 0, 1, \dots, \\ \text{для любой } \varphi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, \dots, P_\alpha]}, & \quad \text{если } \alpha = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Пусть $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$ и обладает квазиасимптотикой на $\tilde{\mathcal{S}}_{[M; P_0, P_1, \dots, P_M]}$ с некоторым M , тогда выполнены соотношения (3.9) и (3.13).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в условиях теоремы 3.2 $P_0 \neq 0$, т.е. $\tilde{\omega}(0) \neq 0$, то $Q(x) \equiv 0$ и $\tilde{\mathcal{S}}_{[\alpha; P_0, P_1, \dots, P_\alpha]} = \mathcal{S}$. Кроме того, если многочлен $Q_\tau(x)$ удовлетворяет условиям (3.12), то $L_f^\omega(x, y) = L_{f+Q_\tau}(x, y)$.

Отметим, что теорема 2.1 (в одномерном случае) следует из теоремы 3.2, если в качестве ω взять преобразование Фурье любого продолжения функции $e^{-x} \in \mathcal{S}_+$ до функции из $\mathcal{S}$.

В качестве примера применения сформулированных выше результатов оценим поведение (по времени) решений задачи Коши для уравнения Шредингера в нормах различных банаховых пространств [14]–[16]. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(\xi, t) = -\Delta u(\xi, t), \quad u(\xi, 0) = \varphi(\xi), \quad \varphi(\xi) \in \mathcal{S}. \quad (3.15)$$

Пусть в $\mathcal{S}$ задана норма функции $\psi \in \mathcal{S}$:

$$Q_\beta[\psi] = \begin{cases} \left(\int |\psi^{(\beta)}(\xi) \rho(|\xi|)|^p d\xi \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\psi^{(\beta)}(\xi) \rho(|\xi|)|, & p = \infty, \end{cases} \quad (3.16)$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – мультииндекс, а $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α .

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $u(\xi, t)$ – решение задачи Коши (3.15), тогда существуют постоянные C и N такие, что

$$Q_\beta[u(\xi, t)] \leq \begin{cases} C \mathcal{P}_N[\varphi] \rho(t) t^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})}, & \text{если } \alpha > -\frac{n}{p} - \frac{|\beta| + \chi(\beta)}{2}, \\ C \mathcal{P}_N[\varphi] t^{-\frac{n}{2} - \frac{|\beta| + \chi(\beta)}{2}}, & \text{если } \alpha < -\frac{n}{p} - \frac{|\beta| + \chi(\beta)}{2}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Здесь $\chi(\beta)$ – количество нечетных компонент у мультииндекса β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем $1 \leq p < \infty$. Пополнение $\mathcal{S}$ по норме (3.16) обозначим B_Q (отметим, что элементами этого банахова пространства, вообще говоря, могут быть даже не обобщенные функции). Ясно, что найдутся c и M такие, что

$$Q_\beta[\psi] \leq c \mathcal{P}_M[\psi] \quad \text{для любой } \psi \in \mathcal{S}. \quad (3.18)$$

Введем банаховы пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left\{ g(t, \xi) \in C([1, +\infty) \rightarrow B_Q) : \|g\|_{\mathcal{L}} = \sup_{t \geq 1} \frac{1}{t^N} Q_\beta[g] < \infty \right\}, \\ \mathbb{B} &= \left\{ g(t, \xi) \in C([1, +\infty) \rightarrow B_Q) : \|g\|_{\mathbb{B}} = \sup_{t \geq 1} \frac{1}{\gamma(t)} Q_\beta[g] < \infty \right\}, \end{aligned}$$

где $\gamma(t)$ – непрерывная положительная функция, которую мы выберем позднее. Если $\gamma(t) \leq t^N$ при $t > 1$, то $\mathbb{B} \subset \mathcal{L}$.

Рассмотрим отображение f , сопоставляющее каждой φ из $\mathcal{S}$ функцию $u(\xi, t)$, являющуюся решением задачи Коши (3.15). Как известно,

$$(f, \varphi) = u(\xi, t) = \int e^{it\lambda^2} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{-i\lambda\xi} d\lambda \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Из (3.18) следует, что при достаточно большом N функция $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L})$. Далее, при $\omega(\xi) \in \mathcal{S}$, $\tilde{\omega}(\lambda) = e^{-\lambda^2}$ имеем

$$\begin{aligned} L_f^\omega(x, y) &= \left(f, \frac{1}{y^n} \omega\left(\frac{x-\xi}{y}\right) \right) = \int e^{it\lambda^2 - y^2\lambda^2 + i(x-\xi)\lambda} d\lambda = \\ &= \frac{c}{(it - y^2)^{n/2}} e^{(it - y^2) \frac{(x-\xi)^2}{4(t^2 + y^4)}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Докажем, что существуют постоянные A , b и C такие, что

$$Q_\beta[L_f^\omega] \leq \begin{cases} C\rho(t)t^n \frac{(1+|x|)^A}{y^b}, & \text{если } \alpha > -\frac{n}{p} - \frac{|\beta| + \chi(\beta)}{2}, \\ Ct^{-\frac{n}{2} - \frac{|\beta| + \chi(\beta)}{2}} \frac{(1+|x|)^A}{y^b}, & \text{если } \alpha < -\frac{n}{p} - \frac{|\beta| + \chi(\beta)}{2}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Действительно, положив $\eta = \frac{(it - y^2)}{4(t^2 + y^4)}$, учитывая оценки

$$\frac{1}{|it - y^2|} \leq \frac{1}{t}, \quad |\eta| \leq \frac{1}{4t}, \quad \operatorname{Re} \eta \leq -\frac{1}{8} \frac{y^2}{t^2} \quad \text{при } t > 1, \quad 0 < y \leq 1,$$

а также соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \xi^\beta} e^{\eta \xi^2} &= \prod_{i=1}^n \eta^{\beta_i/2} \frac{\partial^{\beta_i}}{\partial \xi_i^{\beta_i}} e^{\xi_i'^2} \Big|_{\xi_i' = \sqrt{\eta} \xi_i} = \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{m_i=0}^{\beta_i} C_{m_i} \eta^{(\beta_i + m_i)/2} \xi_i^{m_i} e^{\eta \xi_i^2} = \sum_{\substack{m \leq \beta, \\ \chi(\beta) \leq |m|}} C_m \eta^{(|\beta| + |m|)/2} \xi^m e^{\eta \xi^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

(отметим, что $C_{m_i} = 0$, если $\beta_i + m_i$ нечетно, а потому $C_m = 0$, если $|m| < \chi(\beta)$) и пользуясь свойствами нормы, имеем

$$\begin{aligned}
 Q_\beta[L_f^\omega] &\leq \frac{c}{|it - y^2|} \left(\int \rho^p(|\xi|) \left| \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \xi^\beta} e^{\eta(x-\xi)^2} \right|^p d\xi \right)^{1/p} \leq \\
 &\leq \sum_{\substack{m \leq \beta, \\ \chi(\beta) \leq |m|}} C_m t^{-\frac{n}{2} - \frac{|\beta|+|m|}{2}} \left(\int \rho^p(|\xi|) |(x-\xi)^m|^p e^{-\frac{p}{8} \frac{y^2}{t^2} (x-\xi)^2} d\xi \right)^{1/p} \leq \\
 &\leq \sum_{\substack{m \leq \beta, \\ \chi(\beta) \leq |m|}} C_m t^{-\frac{n}{2} - \frac{|\beta|+|m|}{2}} \left(\int \rho^p(|\xi+x|) |\xi|^{m/p} e^{-\frac{p}{8} \frac{y^2}{t^2} \xi^2} d\xi \right)^{1/p} \leq \\
 &\leq (1+|x|)^A \sum_{\substack{m \leq \beta, \\ \chi(\beta) \leq |m|}} C'_m t^{-\frac{n}{2} - \frac{|\beta|+|m|}{2}} \left(\int \rho^p(|\xi|) |\xi|^{m/p} e^{-\frac{p}{8} \frac{y^2}{t^2} \xi^2} d\xi \right)^{1/p}. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Здесь сделана замена переменных $\xi' = x - \xi$ (штрих опущен) и учтена оценка $\rho(|\xi+x|) \leq c(1+|x|)^A \rho(|\xi|)$, справедливая для автомодельных функций при некоторых постоянных c и A .

Оценим каждое слагаемое в (3.22) для различных m .

1. Пусть $|m| < -n/p - \alpha$. В этом случае интеграл в (3.22) сходится и соответствующие слагаемые при $t > 1$ оцениваются выражением

$$C t^{-\frac{n}{2} - \frac{|\beta|+|m|}{2}} (1+|x|)^A \quad (3.23)$$

с некоторыми C и A .

2. Пусть $|m| > -n/p - \alpha$. В этом случае интеграл в (3.22) расходится и соответствующие слагаемые при $t > 1$ оцениваются выражением

$$C t^{-\frac{n}{2} - \frac{|\beta|+|m|}{2} + \frac{n}{p} + |m|} \rho(t) \frac{(1+|x|)^A}{y^b} \quad (3.24)$$

с некоторыми постоянными A, C и b . Действительно, делая замену переменных $\xi' = \xi/t$ (опуская штрих), пользуясь свойствами автомодельных функций (1.2), считая $(\alpha + \varepsilon)p + |m|p > -n$, при $t > 1$ имеем

$$\begin{aligned}
 &\left(\int_{|\xi|<1} + \int_{|\xi|>1} \right) \rho^p(|\xi|) |\xi|^{m/p} e^{-\frac{p}{8} \frac{y^2}{t^2} \xi^2} d\xi \leq \\
 &\leq \text{const} + t^{n+|m|p} \int_{|\xi|>1/t} \rho^p(t|\xi|) |\xi|^{m/p} e^{-\frac{p}{8} y^2 \xi^2} d\xi \leq \\
 &\leq C_2 + C_\varepsilon t^{n+|m|p} \rho^p(t) \int |\xi|^{(\alpha+\varepsilon)p+|m|p} e^{-\frac{p}{8} y^2 \xi^2} d\xi \leq C t^{n+|m|p} \rho^p(t) \frac{1}{y^{bp}}
 \end{aligned}$$

с некоторыми постоянными C и b . Откуда и следует (3.24).

3. Пусть $|m| = -n/p - \alpha$. В этом случае соответствующее слагаемое в (3.22) оценивается выражением

$$C_\varepsilon t^{-\frac{n}{2} - \frac{|\beta| + |m|}{2} + \frac{n}{p} + (|m| + \varepsilon)} \rho(t) \frac{(1 + |x|)^A}{y^b}, \quad (3.25)$$

где C_ε , A и b – некоторые постоянные, ε как угодно мало. Действительно, оценивая интеграл, как в предыдущем случае, заменяя $\rho(k)$ при $k > 1$ на $\rho_1(k) = k^\varepsilon \rho(k)$, получим (3.25).

Теперь, пользуясь тем, что $\chi(\beta) \leq |m| \leq |\beta|$, нетрудно заметить, что при $\alpha > -n/p - (|\beta| + \chi(\beta))/2$ ведущим членом в сумме (3.22) будет слагаемое с $|m| = |\beta|$ (что в данном случае эквивалентно $m = \beta$), которое подпадает под случай 2 и, стало быть, оценивается выражением $Ct^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{p}} \rho(t) (1 + |x|)^A / y^b$. Данные рассуждения доказывают (3.20) в этом случае.

Если $\alpha < -n/p - (|\beta| + \chi(\beta))/2$, то ведущим слагаемым в сумме (3.22) будет слагаемое с $|m| = \chi(\beta)$ (т.е. с $m = (m_1, \dots, m_n)$, где $m_i = 1$, если β_i нечетно, и $m_i = 0$, если β_i четно), которое подпадает под случай 1, а потому имеет оценку $Ct^{-\frac{1}{2} - \frac{|\beta| + \chi(\beta)}{2}} (1 + |x|)^A$, и в этом случае для суммы будет справедлива оценка (3.20).

Продолжим доказательство теоремы. Положив

$$\gamma(t) = \begin{cases} \rho(t)t^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})}, & \text{если } \alpha > -\frac{n}{p} - \frac{|\beta| + \chi(\beta)}{2}, \\ t^{-\frac{1}{2} - \frac{|\beta| + \chi(\beta)}{2}}, & \text{если } \alpha < -\frac{n}{p} - \frac{|\beta| + \chi(\beta)}{2}, \end{cases}$$

видим, что для обобщенной функции f и заданной $\omega(\xi)$ выполнены все условия теоремы 3.1. Следовательно, $f \in \mathbb{L}(\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{B})$, а потому $(f, \varphi) = u(\xi, t) \in \mathbb{B}$ и имеет место оценка (3.17). ■

Покажем, что оценка, приведенная в (3.17) в случае $\alpha > -n/p - (|\beta| + \chi(\beta))/2$, может выполняться и при произвольных α , если на начальную функцию наложить некоторые дополнительные условия, смысл которых состоит в том, что в начальном состоянии вероятность нахождения частицы с малым импульсом мала.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $u(\xi, t)$ – решение задачи Коши (3.15), $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , $Q_\beta[\cdot]$ – норма (3.16) и $d_0 = -|\beta| + [-2(\alpha + n/p)] + 1$ (здесь $[x]$ – целая часть числа x). Тогда существуют постоянные C и N такие, что

$$Q_\beta[u(\xi, t)] \leq C \mathcal{P}_N[\varphi] \rho(t) t^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})}, \quad \text{если } \tilde{\varphi}^m(0) = 0 \text{ при } |m| < d_0. \quad (3.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\tilde{\omega}_d(\lambda) = \lambda^d \tilde{\omega}(\lambda)$. Заметим, что

$$L_f^{\omega_d}(x, y) = (-it)^{|d|} \frac{\partial^{|d|}}{\partial \xi^d} L_f^\omega(x, y)$$

и, следовательно, $Q_\beta[L_f^{\omega_d}(x, y)] = y^{|d|} Q_{\beta+d}[L_f^\omega(x, y)]$. Поэтому, пользуясь оценкой (3.20), получим

$$Q_\beta[L_f^{\omega_d}(x, y)] \leq C y^{|d|} \rho(t) t^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})} \frac{(1 + |x|)^a}{y^b}$$

для некоторых C , a и b , если $\alpha > -n/p - (|\beta| + |d|)/2$. По теореме 3.1 существует ℓ_d такое, что оценка

$$Q_\beta[u(\xi, t)] \leq C \mathcal{P}_N[\varphi] \rho(t) t^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) \quad (3.27)$$

выполняется для всех начальных функций $\varphi \in \mathcal{S}$, удовлетворяющих условию $\tilde{\varphi}(\lambda) \in \mathcal{S}_{[\ell_d; \lambda^d]}$. Перебирая все мультииндексы $d^1, d^2, \dots, d^M$ с $|d^i| = d_0$, $i = 1, 2, \dots, M$, учитывая, что $\mathbb{P}^{d_0-1} \subset \mathbb{P}[\lambda^{d^1}, \lambda^{d^2}, \dots, \lambda^{d^M}]$ и пользуясь замечанием к лемме 3.2, получим, что оценка (3.27) справедлива для всех $\varphi \in \mathcal{S}$ таких, что $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}_{[d_0-1; \lambda^{d^1}, \dots, \lambda^{d^M}]}$. Таким образом, для произвольного α оценка (3.27) выполняется для любой начальной функции $\varphi \in \mathcal{S}$ такой, что $T_{\tilde{\varphi}}^{d_0-1}(\lambda) \equiv 0$, и это доказывает (3.26). ■

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные со стабилизацией задачи Коши для уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \Delta u(x, t), \quad \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x) \quad \text{в } S', \quad (3.28)$$

где $f \in S'$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, в классе не более чем полиномиально растущих функций, т.е. таких, что $|u(x, t)| < C t^{-b} (|x|^N + |t|^N + 1)$ для некоторых b , C и N , зависящих от u . Как известно, в этом классе существует единственное решение задачи (3.28), определяемое формулой

$$u(x, t) = \left(f(\xi), \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \equiv L_f^\omega(x, y), \quad (3.29)$$

где $y = \sqrt{t}$, с ядром Пуассона

$$\omega(\xi) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^n} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}, \quad \tilde{\omega}(t) = e^{-a^2 t^2}. \quad (3.30)$$

Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция. Если для некоторой функции $u(x, t)$ выполнены следующие условия:

существует предел

$$u_0(x, t) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{\rho(k)} u(kx, k^2 t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0; \quad (3.31)$$

существуют A и b такие, что

$$\left| \frac{1}{\rho(k)} u(kx, k^2 t) \right| \leq \frac{A}{t^b} \quad \text{при } |x|^2 + t^2 = 1, \quad (3.32)$$

то будем говорить, что функция $u(x, t)$ стабилизируется (в бесконечности) по параболам относительно автомодельной функции $\rho(k)$.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция. Для того чтобы решение задачи Коши (3.28) стабилизировалось по параболам относительно $\rho(k)$, необходимо и достаточно, чтобы начальная функция $f(x) \in S'$ обладала квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$, т.е. чтобы

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(k\xi), \varphi(\xi)) \xrightarrow{k \rightarrow -\infty} c_\varphi \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{S}. \quad (3.33)$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 3.2 с ω , заданной формулой (3.30), для которой $\tilde{\omega}(0) \neq 0$.

В качестве другого применения теоремы 3.2 рассмотрим задачу о диффузии многокомпонентного газа. Эта задача формулируется как задача Коши для системы уравнений теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_i(x, t) &= a_i^2 \Delta u_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \lim_{t \rightarrow +0} u_i(x, t) &= f(x) \quad \text{в } \mathcal{S}, \quad f \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Здесь $u_i(x, t)$ – концентрация i -го вещества, $i = 1, 2, \dots, m$. Не нарушая общности, можно считать, что все коэффициенты диффузии различных веществ a_i различны. Рассмотрим линейную комбинацию

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^m c_i u_i(x, t).$$

Ее можно интерпретировать, например, как плотность зарядов смеси веществ, где c_i – удельный заряд i -й компоненты.

Пусть $U(x, t)$ стабилизируется относительно $\rho(k)$ по параболам. Что можно сказать об асимптотическом поведении концентрации отдельных веществ u_i ? Положим

$$s_p = \sum_{i=1}^m c_i a_i^{2p} \quad p = 0, 1, \dots \quad (3.35)$$

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $U(x, t)$ стабилизируется по параболам относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α .

Если $s_0 = \sum_{i=1}^m c_i \neq 0$, то каждая компонента $u_i(x, t)$ стабилизируется по параболам относительно функции $\rho(k)$.

Если

$$s_p = 0, \quad p = 0, 1, \dots, M-1, \quad s_M \neq 0 \quad \text{при} \quad M > 0 \quad \text{и} \quad \alpha \neq 0, 1, \dots,$$

то существует M -гармонический многочлен $Q(x)$, $\Delta^M Q(x) = 0$, такой, что для каждого $i = 1, \dots, m$ функция

$$\dot{u}_i(x, t) = u_i(x, t) - \sum_{q=0}^{M-1} \frac{(a_i^2 t)^q}{q!} \Delta^q Q(x)$$

стабилизируется по параболам относительно $\rho(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned} u_i(kx, k^2 t) &= L_f^{\omega_i}(kx, ky), \quad \omega_i(x) = \frac{1}{(2a_i \sqrt{\pi})^n} e^{-\frac{x^2}{4a_i^2}}, \quad y = \sqrt{t}, \\ U(kx, k^2 t) &= L_f^{\omega}(kx, ky), \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^m c_i \omega_i(x). \end{aligned}$$

По условию

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} L_f^\omega(kx, ky) = C(x, y), \quad \frac{1}{\rho(k)} |L_f^\omega(kx, ky)| \leq \frac{A}{y^b}$$

при $|x|^2 + y^2 = 1$, $y > 0$ для некоторых A и b . Воспользуемся теперь теоремой 3.2. Если $s_0 \neq 0$, то $P_0 \neq 0$. Следовательно, $f(x)$ обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$, а потому в силу предыдущей теоремы функции $u_i(x, t)$, $i = 1, \dots, m$, стабилизируются по параболам относительно $\rho(k)$.

Пусть теперь $s_p = 0$, $p = 0, 1, \dots, M-1$, $s_M \neq 0$ и $\alpha \neq 0, 1, \dots$. Тогда, учитывая, что $\tilde{\omega}(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{-a_i^2 t}$, имеем $P_q \equiv 0$ при $q = 0, 1, \dots, M-1$, а $P_M(t) = \frac{(-1)^M}{M!} s_M |t|^{2M}$. Согласно теореме 3.2 существует многочлен $Q(x)$ такой, что $\Delta^M Q(x) = 0$, и функция $G(x) = f(x) - Q(x)$ обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$. Далее, замечая, что функция $\hat{u}_i(x, t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i(x, t) = a_i^2 \Delta u_i(x, t), \quad \hat{u}_i(x, 0) = G(x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

с помощью теоремы 3.5 получаем, что $\hat{u}_i$ стабилизируется по параболам относительно $\rho(k)$. ■

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00144) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1).

Список литературы

- [1] Г. Харди, *Расходящиеся ряды*, ИЛ, М., 1951.
- [2] N. Wiener, *J. Ann. of Math.*, **33**:1 (1932), 1–100.
- [3] J. Korevaar, *Tauberian Theory. A Century of Developments*, Grundlehren Math. Wiss., **329**, Springer, Berlin, 2004.
- [4] Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, А. Н. Тавхелидзе, *ТМФ*, **12**:3 (1972), 305–330.
- [5] В. С. Владимиров, Б. И. Завьялов, *ТМФ*, **50**:2 (1982), 163–194.
- [6] В. С. Владимиров, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:5 (1976), 1084–1101.
- [7] В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, М., 1986.
- [8] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.
- [9] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Матем. сб.*, **189**:7 (1998), 91–130.
- [10] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Докл. РАН*, **363**:2 (1998), 156–159.
- [11] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.
- [12] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **66**:4 (2002), 47–118.
- [13] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Матем. сб.*, **194**:11 (2003), 17–64.
- [14] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Докл. РАН*, **391**:2 (2003), 158–161.
- [15] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. II. Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978.
- [16] Л. Д. Фадеев, О. А. Якубовский, *Лекции по квантовой механике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980.