Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Эволюционные системы на решетке,
ТМФ, 2008, том 157, номер 3, 391–405

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6287>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 06:21:57

© 2008 г.

В. В. Жаринов*

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ НА РЕШЕТКЕ

В рамках алгебро-геометрического подхода к дифференциально-разностным уравнениям изучаются симметрии и законы сохранения эволюционных систем на многомерных решетках. Дано описание законов сохранения в терминах их характеристик.

Ключевые слова: многомерная целочисленная решетка, разностные джеты, симметрии, законы сохранения, характеристики законов сохранения.

В настоящей работе результаты, полученные ранее [1] для эволюционных систем на евклидовом пространстве, переносятся на эволюционные системы на многомерной целочисленной решетке. С этой целью основные принципы алгебро-геометрического (иначе, группового) анализа уравнений в частных производных (см., например, [2]–[6]) адаптируются к дискретной ситуации. Вводится понятие разностного джета, изучаются функции на пространстве разностных джетов и операции над ними, приводятся элементы вариационного исчисления на решетке. Разработанный таким образом формализм применяется для описания законов сохранения эволюционных систем на многомерной решетке в терминах их характеристик, которые определяются так же, как и в случае эволюционных систем на евклидовом пространстве.

В дальнейшем предполагается, что все линейные операции выполняются над $\mathbb{R}$, и все бесконечномерные линейные пространства снабжены естественной локально выпуклой топологией. Все вводимые ниже линейные отображения непрерывные, хотя в явном виде это не доказывается. Используются обычные обозначения: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Через $\text{Map}(X; Y)$ обозначается множество всех отображений из множества X в множество Y .

1. РАССЛОЕНИЕ ДЖЕТОВ НАД РЕШЕТКОЙ

1.1. Решетка. Пусть $D \in \mathbb{N}$. Решетка (точнее, D -мерная решетка) есть множество $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^D$. На решетке $\mathbb{L}$ определены две алгебраические структуры: абелевой группы по сложению и $\mathbb{Z}$ -модуля. Как $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathbb{L}$ имеет базис $\{e_1, \dots, e_D\} \subset \mathbb{L}$, где $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_D = (0, \dots, 0, 1)$, так что

$$\mathbb{L} \ni m = (\mu^1, \dots, \mu^D) = \sum_{\alpha} \mu^{\alpha} e_{\alpha}, \quad \mu^{\alpha} \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq \alpha \leq D.$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

Для $m = (\mu^1, \dots, \mu^D) \in \mathbb{L}$ положим $|m| = \sum_{\alpha} |\mu^{\alpha}| \in \mathbb{Z}_+$. Для краткости будем писать $\{|m| \leq p\}$ вместо $\{m \in \mathbb{L}; |m| \leq p\}$, где $p \in \mathbb{Z}_+$.

На решетке $\mathbb{L}$ определено действие группы $\mathbb{L}$,

$$\mathbb{L} \ni n \mapsto T_n \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbb{L}), \quad m \mapsto T_n m = m + n;$$

отображения T_n называются *сдвигами*.

1.2. Векторное расслоение. Пусть V – конечномерное линейное пространство. Будем рассматривать прямое произведение $E = \mathbb{L} \times V$ как векторное расслоение над решеткой $\mathbb{L}$ с типичным слоем V и проекцией на первый сомножитель:

$$\pi: \mathbb{L} \times V \rightarrow \mathbb{L}, \quad (m, u) \mapsto \pi(m, u) = m.$$

Хотя с точки зрения классической дифференциальной геометрии это расслоение тривиальное, такой подход помогает адекватно переносить геометрические конструкции на дискретный случай. Сечения расслоения π суть отображения из $\mathbb{L}$ в V . Линейное пространство всех таких отображений обозначим через $\text{Map}(\mathbb{L}; V)$. Носитель отображения $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$ есть множество $\text{supp } \phi = \{m \in \mathbb{L}; \phi(m) \neq 0\}$. Пусть $\text{Map}_0(\mathbb{L}; V)$ есть множество всех $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$ с конечными носителями.

Считая, что сдвиги действуют на слоях тривиально, получаем действие группы $\mathbb{L}$ на расслоении π :

$$\mathbb{L} \times V \ni (m, u) \mapsto T_n(m, u) = (T_n m, u) \in \mathbb{L} \times V \quad \text{для всех } m, n \in \mathbb{L}.$$

На сечениях имеем $\text{id}_V \circ T_n \phi = \phi \circ T_n$, т.е. $T_n \phi = \phi \circ T_n$, так что

$$(T_n \phi)(m) = \phi(m + n) \quad \text{для всех } \phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V), \quad m, n \in \mathbb{L}.$$

1.3. Расслоение джетов. Пусть $\pi: E = \mathbb{L} \times V \rightarrow \mathbb{L}$ – векторное расслоение над $\mathbb{L}$. Будем говорить, что сечения $\phi, \psi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$ *касаются над точкой* $m \in \mathbb{L}$ с *порядком* $p \in \mathbb{Z}_+$, если $\phi(m + n) = \psi(m + n)$ для всех $|n| \leq p$. Будем также говорить, что сечения $\phi, \psi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$ *касаются над точкой* $m \in \mathbb{L}$ с *порядком* ∞ , если $\phi(m + n) = \psi(m + n)$ для всех $n \in \mathbb{L}$, т.е. если сечения ϕ и ψ совпадают.

При таком определении касания *векторное расслоение джетов порядка* $p \in \mathbb{Z}_+$ *над* $\mathbb{L}$ *есть*

$$\pi^p: \mathcal{J}^p(\pi) = \mathbb{L} \times \mathbf{V}^p \rightarrow \mathbb{L},$$

где типичный слой

$$\mathbf{V}^p = \{\mathbf{u}^p = (u_k \in V; |k| \leq p)\},$$

π^p – проекция на первый сомножитель, $(m, \mathbf{u}^p) \mapsto \pi^p(m, \mathbf{u}^p) = m$. Можно считать, что $\mathbf{V}^0 = V$, $\mathcal{J}^0(\pi) = E$, $\pi^0 = \pi$. Сечения расслоения π^p суть отображения из $\mathbb{L}$ в $\mathbf{V}^p$. Линейное пространство всех таких отображений обозначим через

$$\text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V}^p) = \{\phi^p = (\phi_k \in \text{Map}(\mathbb{L}; V); |k| \leq p)\}$$

(иначе, $(\phi^p)_k = \phi_k$ и $(\phi^p)_k(m) = \phi_k(m)$ для всех $|k| \leq p$, $m \in \mathbb{L}$). Каждому сечению $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$ ставится в соответствие его *p-джет* $\mathbf{j}^p(\phi) \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V}^p)$, где

$\mathbf{j}^p(\phi) = (\phi_k = T_k\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V); |k| \leq p)$, так что $(\mathbf{j}^p\phi)(m) = (\phi_k(m) = \phi(m+k); |k| \leq p)$, $m \in \mathbb{L}$ (коротко, $(\mathbf{j}^p\phi)_k(m) = \phi(m+k)$). По построению сечения ϕ, ψ касаются над точкой m с порядком p тогда и только тогда, когда $\phi^p(m) = \psi^p(m)$, т.е. когда их p -джеты в точке m совпадают. Правило $\phi \mapsto \mathbf{j}^p(\phi)$ определяет линейное инъективное отображение (вложение) $\mathbf{j}^p: \text{Map}(\mathbb{L}; V) \rightarrow \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V}^p)$.

Пусть $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $p \geq q$. Естественное вложение $\{|k| \leq q\} \subset \{|k| \leq p\}$ определяет проекцию

$$\pi_q^p: \mathcal{J}^p(\pi) \rightarrow \mathcal{J}^q(\pi), \quad \pi^q \circ \pi_q^p = \pi^p,$$

где $(m, \mathbf{u}^p) \mapsto \pi_q^p(m, \mathbf{u}^p) = (m, \mathbf{u}^q)$, $\mathbf{u}^q = (u_k \in \mathbf{u}^p; |k| \leq q)$. Очевидно, $\pi_r^q \circ \pi_q^p = \pi_r^p$ при $p \geq q \geq r$, так что определен проективный предел – *векторное расслоение джетов бесконечного порядка*

$$\pi^\infty: \mathcal{J}^\infty(\pi) = \mathbb{L} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{L},$$

где типичный слой

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{proj } \mathbf{V}^p = \{\mathbf{u} = (u_k \in V; k \in \mathbb{L})\},$$

π^∞ – проекция на первый сомножитель, $(m, \mathbf{u}) \mapsto \pi^\infty(m, \mathbf{u}) = m$. Также определены проекции $\pi_p^\infty: \mathcal{J}^\infty(\pi) \rightarrow \mathcal{J}^p(\pi)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, причем $\pi^p \circ \pi_p^\infty = \pi^\infty$ и $\pi_q^p \circ \pi_p^\infty = \pi_q^\infty$ при $p \geq q$. Сечения расслоения π^∞ суть отображения из $\mathbb{L}$ в $\mathbf{V}$, линейное пространство всех таких отображений есть

$$\text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V}) = \{\phi = (\phi_k \in \text{Map}(\mathbb{L}; V); k \in \mathbb{L})\}$$

(т.е. $(\phi)_k(m) = (\phi(m))_k = \phi_k(m)$ для всех $k, m \in \mathbb{L}$). Каждому сечению $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$ ставится в соответствие его ∞ -джет $\mathbf{j}(\phi) \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$, где $\mathbf{j}(\phi) = (\phi_k = T_k\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V); k \in \mathbb{L})$, $(\mathbf{j}\phi)_k(m) = \phi(m+k)$, $m, k \in \mathbb{L}$. По построению сечения ϕ, ψ касаются над точкой m с порядком ∞ тогда и только тогда, когда $\phi(m) = \psi(m)$, т.е. когда их ∞ -джеты в точке m совпадают. Вложение $\mathbf{j}: \text{Map}(\mathbb{L}; V) \rightarrow \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$ задается правилом $\phi \mapsto \mathbf{j}(\phi)$, причем $\mathbf{j}^p = \pi_p^\infty \circ \mathbf{j}$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

По построению $\mathbf{V} \simeq \text{Map}(\mathbb{L}; V)$. По аналогии с теорией гладких джетов определим действие группы $\mathbb{L}$ на типичном слое $\mathbf{V}$ согласно ее действию на $\text{Map}(\mathbb{L}; V)$. А именно, для всех $n \in \mathbb{L}$ положим

$$T_n: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v} = T_n\mathbf{u}, \quad (T_n\mathbf{u})_k = u_{T_n k} = u_{k+n} \quad \text{для всех } k \in \mathbb{L}.$$

В частности, получаем действие группы $\mathbb{L}$ на расслоении π^∞ :

$$\mathbb{L} \times \mathbf{V} \ni (m, \mathbf{u}) \mapsto T_n(m, \mathbf{u}) = (T_n m, T_n \mathbf{u}) \in \mathbb{L} \times \mathbf{V}, \quad n \in \mathbb{L}.$$

На сечениях соответственно имеем $T_n \circ T_n \phi = \phi \circ T_n$, откуда

$$T_n \phi = T_{-n} \circ \phi \circ T_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{L}, \quad \phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V}),$$

т.е.

$$(T_n \phi)_k(m) = \phi_{k-n}(m+n) \quad \text{для всех } \phi = (\phi_k \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)), \quad k, m, n \in \mathbb{L}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $T_n \circ \mathbf{j} = \mathbf{j}$ для всех $n \in \mathbb{L}$.
2. Сечение $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$ является ∞ -джетом некоторого сечения $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$, $\phi = \mathbf{j}(\phi)$, тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно сдвигов, т.е. когда $T_n \phi = \phi$ для всех $n \in \mathbb{L}$.
3. Для любой точки $(m, \mathbf{u}) \in \mathcal{J}^\infty(\pi)$ существует единственное сечение $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$ такое, что $(\mathbf{j}\phi)(m) = \mathbf{u}$.

2. ОПЕРАЦИИ НА РАССЛОЕНИИ РАЗНОСТНЫХ ДЖЕТОВ

2.1. Функции на разностных джетах. Пусть $\pi: \mathbb{L} \times V \rightarrow \mathbb{L}$ – векторное расслоение, $\mathcal{J}^p(\pi)$ – расслоение джетов порядка $p \in \mathbb{Z}_+$, W – линейное пространство. Будем рассматривать прямое произведение $\mathcal{J}^p(\pi) \times W$ как векторное расслоение над $\mathcal{J}^p(\pi)$ с типичным слоем W и проекцией на первый сомножитель

$$\mathcal{J}^p(\pi) \times W \rightarrow \mathcal{J}^p(\pi), \quad (m, \mathbf{u}^p, w) \mapsto (m, \mathbf{u}^p).$$

Сечения этого расслоения суть отображения из $\mathcal{J}^p(\pi) = \mathbb{L} \times \mathbf{V}^p$ в W , линейное пространство всех таких отображений есть $\text{Map}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}^p; W)$. Отображение $f(m, \mathbf{u}^p) \in \text{Map}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}^p; W)$ назовем *гладким*, если $f_m(\mathbf{u}^p) = f(m, \mathbf{u}^p) \in \text{Map}(\mathbf{V}^p; W)$ – гладкое отображение (т.е. принадлежит классу $\mathcal{C}^\infty$) по $\mathbf{u}^p \in \mathbf{V}^p$ при каждом $m \in \mathbb{L}$. Линейное пространство всех таких гладких отображений обозначим через $\mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}^p, W)$. По построению $\mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}^p, W) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{V}^p; W))$. При $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $p \leq q$, имеются естественные вложения $\mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}^p, W) \subset \mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}^q, W)$, порожденные проекциями $\pi_p^q: \mathcal{J}^q(\pi) \rightarrow \mathcal{J}^p(\pi)$. Таким образом, определен индуктивный предел линейных пространств

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}, W) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \text{ind } \mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}^p, W) = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \text{ind } \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{V}^p; W)) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{V}; W)). \end{aligned}$$

По построению отображение $f = f(m, \mathbf{u}) \in \mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}, W)$, если существует число $p = p(f) \in \mathbb{Z}_+$ (p – *порядок* f) такое, что $f \in \mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}^p, W)$, но $f \notin \mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}^{p-1}, W)$.

Таким образом, определены пространства:

- 1) $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}; W) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{V}; W))$;
- 2) $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}) = \mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}; \mathbb{R}) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{V}))$ (здесь $W = \mathbb{R}$);
- 3) $\mathcal{E} = \mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}; V) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{V}; V))$ (здесь $W = V$);
- 4) $\mathcal{E}^* = \mathcal{M}(\mathbb{L} \times \mathbf{V}; V^*) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{V}; V^*))$ (здесь $W = V^*$ – дуальное пространство).

Заметим, что $\mathcal{A}$ есть алгебра функций с обычными поточечными операциями, а $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$ суть $\mathcal{A}$ -модули.

Ради простоты обозначений для данных функций $f = f(m, \mathbf{u}) \in \mathcal{M}$, $\phi = \phi(m) \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$ будем писать

$$f|_\phi = f|_\phi(m) = f(m, \phi(m)) \in \text{Map}(\mathbb{L}; W).$$

Отображения $f \in \mathcal{M}$ суть сечения векторного расслоения

$$\mathcal{J}^\infty(\pi) \times W \rightarrow \mathcal{J}^\infty(\pi), \quad (m, \mathbf{u}, w) \mapsto (m, \mathbf{u}).$$

Считая, что сдвиги действуют на слоях тривиально, получаем действие группы $\mathbb{L}$ на этом расслоении:

$$\mathcal{J}^\infty(\pi) \times W \ni (m, \mathbf{u}, w) \mapsto T_n(m, \mathbf{u}, w) = (T_n m, T_n \mathbf{u}, w) \in \mathcal{J}^\infty(\pi) \times W$$

для всех $n \in \mathbb{L}$. На сечениях соответственно имеем $\text{id}_W \circ T_n f = f \circ T_n$, откуда

$$(T_n f)(m, \mathbf{u}) = f(T_n m, T_n \mathbf{u}) \quad \text{для всех } f \in \mathcal{M}, \quad m, n \in \mathbb{L}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (правило полного сдвига). *Для данной функции $\phi = (\phi_k) \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$ равенство*

$$(T_n f)|_\phi = T_n(f|_\phi) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{L}, \quad f \in \mathcal{M}$$

справедливо тогда и только тогда, когда $\phi = \mathbf{j}(\phi)$, где $\phi = \phi_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $(T_n f)(m, \phi(m)) = f(T_n m, T_n(\phi(m)))$, так что надо доказать, что $T_n(\phi(m)) = \phi(T_n m)$ для всех $m, n \in \mathbb{L}$ тогда и только тогда, когда $\phi_k = T_k \phi_0$ для всех $k \in \mathbb{L}$. Но, с одной стороны,

$$(T_n(\phi(m)))_k = (\phi(m))_{k+n} = \phi_{k+n}(m),$$

а с другой стороны,

$$(\phi(T_n m))_k = \phi_k(T_n m) = \phi_k(m + n).$$

Следовательно, нужное равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\phi_{k+n}(m) = \phi_k(m + n)$ для всех $k, m, n \in \mathbb{L}$, или, эквивалентно (при $k = 0$), когда $\phi_n(m) = \phi_0(m + n) = (T_n \phi_0)(m)$ для всех $m, n \in \mathbb{L}$, т.е. когда $\phi_n = T_n \phi_0$ для всех $n \in \mathbb{L}$, что и требовалось доказать.

2.2. Вертикальные дифференцирования. Пусть $\mathfrak{D}_V$ – множество всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ и модуля $\mathcal{M}$. Как известно, $\mathfrak{D}_V$ обладает структурой алгебры Ли с коммутатором в качестве скобки Ли и структурой $\mathcal{A}$ -модуля с операцией

$$\mathcal{A} \times \mathfrak{D}_V \ni (f, X) \mapsto Y = fX \in \mathfrak{D}_V, \quad (fX)g = f(Xg), \quad g \in \mathcal{A} \text{ или } \mathcal{M}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обратим внимание, что дифференцирования производятся по непрерывным переменным $\mathbf{u}$, а дискретные переменные m здесь играют роль параметров. Учитывая этот факт, дифференцирования в алгебре $\mathcal{A}$ и модуле $\mathcal{M}$ будем называть *вертикальными*. В свою очередь, сдвиги в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ являются подъемом сдвигов из базы $\mathbb{L}$ и в силу этого называются *горизонтальными*. По определению вертикальные дифференцирования $X \in \mathfrak{D}_V$ удовлетворяют *правилу Лейбница*, $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ для всех $f \in \mathcal{A}$, $g \in \mathcal{A}$ или $\mathcal{M}$, а горизонтальные сдвиги являются *морфизмами* алгебры $\mathcal{A}$ и модуля $\mathcal{M}$, т.е. $T_n(fg) = (T_n f)(T_n g)$ для всех $n \in \mathbb{L}$, $f \in \mathcal{A}$ и $g \in \mathcal{A}$ или $\mathcal{M}$. Соответственно вертикальные дифференцирования образуют алгебру Ли, а горизонтальные сдвиги – абелеву группу.

Пусть $\{a_i; i \in I\}$ – базис конечномерного линейного пространства V :

$$V \ni u = (u^i) = \sum_i u^i a_i, \quad u^i \in \mathbb{R}, \quad i \in I.$$

Тогда дуальное пространство V^* имеет дуальный базис $\{b^i; i \in I\}$, $\langle b^i, a_j \rangle = \delta_j^i$ для всех $i, j \in I$, и

$$V^* \ni \omega = (\omega_i) = \sum_i \omega_i b^i, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad i \in I.$$

Также имеем представление

$$\mathbf{V} \ni \mathbf{u} = (u_m^i), \quad u_m^i \in \mathbb{R}, \quad i \in I, \quad m \in \mathbb{L}.$$

Модуль $\mathfrak{D}_V$ имеет в этом случае базис $\{\partial_{u_m^i}; i \in I, m \in \mathbb{L}\}$, где $\partial_{u_m^i}$ – частная производная по переменной u_m^i , так что

$$\mathfrak{D}_V \ni X = (X_m^i) = \sum_{i,m} X_m^i \partial_{u_m^i}, \quad X_m^i \in \mathcal{A}, \quad i \in I, \quad m \in \mathbb{L}.$$

Далее, дуальный модуль $\mathfrak{D}_V^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{D}_V; \mathcal{A})$ имеет дуальный базис $\{\vartheta_m^i; i \in I, m \in \mathbb{L}\}$, $\langle \vartheta_m^i, \partial_{u_n^j} \rangle = \vartheta_m^i(\partial_{u_n^j}) = \delta_j^i \delta_m^n$, $i, j \in I, m, n \in \mathbb{L}$. Тем самым

$$\mathfrak{D}_V^* \ni \omega = (\omega_i^m) = \sum_{i,m} \omega_i^m \vartheta_m^i, \quad \omega_i^m \in \mathcal{A}, \quad i \in I, \quad m \in \mathbb{L}.$$

Пусть $X \in \mathfrak{D}_V$. Действие $X: \mathfrak{D}_V \rightarrow \mathfrak{D}_V$ определяется как присоединенное, $X(Y) = [X, Y]$ для всех $Y \in \mathfrak{D}_V$. Дуальным образом действие $X: \mathfrak{D}_V^* \rightarrow \mathfrak{D}_V^*$ определяется как производная Ли, т.е. условием

$$X(\langle \omega, Y \rangle) = \langle X(\omega), Y \rangle + \langle \omega, X(Y) \rangle, \quad \omega \in \mathfrak{D}_V^*, \quad Y \in \mathfrak{D}_V,$$

т.е. $X(\omega) = [X, \omega]$ для всех $\omega \in \mathfrak{D}_V^*$. В частности, $\partial_{u_m^i}(\vartheta_n^j) = 0$, $i, j \in I, m, n \in \mathbb{L}$.

Пусть $n \in \mathbb{L}$. Действие $T_n: \mathfrak{D}_V \rightarrow \mathfrak{D}_V$ определяется как подъем действия с $\mathcal{A}$, т.е. условием

$$X \mapsto T_n(X), \quad T_n(X) \circ T_n = T_n \circ X, \quad X \in \mathfrak{D}_V,$$

в частности, $T_n(\partial_{u_m^i}) = \partial_{u_{m+n}^i}$, $i \in I, m \in \mathbb{L}$. Дуальным образом действие $T_n: \mathfrak{D}_V^* \rightarrow \mathfrak{D}_V^*$ определяется правилом $T_n \langle \omega, X \rangle = \langle T_n \omega, T_n X \rangle$, т.е.

$$\omega \mapsto T_n \omega, \quad T_n(\omega) \circ T_n = T_n \circ \omega, \quad \omega \in \mathfrak{D}_V^*.$$

В частности, $T_n(\vartheta_m^i) = \vartheta_{m+n}^i$, $i \in I, m \in \mathbb{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $X \in \mathfrak{D}_V$. Равенство $T_n(X) = X$ (другими словами, равенство $[X, T_n] = 0$) справедливо для всех $n \in \mathbb{L}$ тогда и только тогда, когда

$$X = \sum_{i,m} (T_m f^i) \partial_{u_m^i} = \text{ev}_f, \quad f = (f^i) \in \mathcal{E},$$

есть эволюционное дифференцирование.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, с одной стороны, для всех $f \in \mathcal{E}$ и всех $n \in \mathbb{L}$ имеем

$$T_n \circ \text{ev} f = \sum_{i,m} (T_{n+m} f^i) (T_n \circ \partial_{u_m^i}) = \sum_{i,m} (T_{m+n} f^i) (\partial_{u_{m+n}^i} \circ T_n) = \text{ev} f \circ T_n.$$

С другой стороны, пусть $X = \sum_{i,m} X_m^i \partial_{u_m^i} \in \mathfrak{D}_V$ и $X = T_n \circ X \circ T_{-n}$ для всех $n \in \mathbb{L}$, т.е.

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i,m} X_m^i \partial_{u_m^i} = \sum_{i,m} (T_n X_m^i) (T_n \circ \partial_{u_m^i} \circ T_{-n}) = \sum_{i,m} (T_n X_m^i) \partial_{u_{m+n}^i} = \\ &= \sum_{i,m} (T_n X_{m-n}^i) \partial_{u_m^i}. \end{aligned}$$

Следовательно, $X_m^i = T_n X_{m-n}^i$ для всех $i \in I$, $n, m \in \mathbb{L}$. Полагая $n = m$, получаем $X_m^i = T_m X_0^i$ для всех $i \in I$, $m \in \mathbb{L}$, откуда $X = \text{ev} f$, где $f = X_0 \in \mathcal{E}$.

Легко проверяется, что коммутатор $[\text{ev} f, \text{ev} g] = \text{ev} h$ для всех $f, g \in \mathcal{E}$, где $h = (h^i) \in \mathcal{E}$, $h^i = \text{ev} f(g^i) - \text{ev} g(f^i)$, $i \in I$. Следовательно, определена алгебра Ли эволюционных дифференцирований $\mathfrak{D}_E = \{\text{ev} f; f \in \mathcal{E}\}$ – подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{D}_V$.

2.3. Горизонтальные разностные операторы. Пусть $1 \leq \alpha \leq D$. Разностные операторы $\Delta_\alpha = T_{e_\alpha} - T_0$ действуют во всех пространствах, где определены сдвиги. Введем линейное пространство $\mathfrak{D}_H = \{\zeta = \sum_\alpha \zeta^\alpha \Delta_\alpha; \zeta^\alpha \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^D$ и рассмотрим его как коммутативную алгебру Ли, порожденную операторами $\Delta_1, \dots, \Delta_D$. Ее элементы действуют во всех пространствах, где определены сдвиги. Дуальное пространство $\mathfrak{D}_H^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{D}_H; \mathbb{R})$ имеет дуальный базис $\{\Theta^1, \dots, \Theta^D\}$, $\langle \Theta^\alpha, \Delta_\beta \rangle = \Theta^\alpha(\Delta_\beta) = \delta_\beta^\alpha$. Поскольку группа $\mathbb{L}$ коммутативна, она действует на $\mathfrak{D}_H$ и $\mathfrak{D}_H^*$ тривиально.

2.4. Вариационное исчисление на решетке. Будем говорить, что функция $f \in \text{Map}(\mathbb{L}; W)$ суммируемая, если ряд $\sum f = \sum_{m \in \mathbb{L}} f(m)$ сходится в топологии пространства W .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть функция $f \in \text{Map}(\mathbb{L}; W)$ суммируемая. Тогда функция $T_n f \in \text{Map}(\mathbb{L}; W)$ также суммируемая для любого $n \in \mathbb{L}$, причем $\sum T_n f = \sum f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в этом случае $\sum_m f(m+n) = \sum_k f(k)$.

Следуя традиции, будем называть функции $\lambda \in \mathcal{A}$ лагранжианами.

Каждый лагранжиан $\lambda \in \mathcal{A}$ порождает функционал (иными словами, действие) Λ на $\text{Map}(\mathbb{L}; V)$ (точнее, $\Lambda \in \text{Map}(\text{Map}(\mathbb{L}; V); \mathbb{R})$) по правилу

$$\Lambda(\phi) = \sum_m \lambda|_{\mathbf{j}(\phi)}(m), \quad \phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbb{R}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Здесь неявно подразумевается, что область определения функционала Λ есть множество всех $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$, для которых указанный ряд сходится.

Каждый лагранжиан $\lambda \in \mathcal{A}$ индуцирует два линейных отображения:

- 1) $\lambda_*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$, $f = (f^i) \mapsto \lambda_*(f) = \text{ev}_f(\lambda) = \sum_{i,n} (\partial_{u_n^i} \lambda) T_n f^i$;
- 2) $\lambda^*: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}^*$, $\varrho \mapsto \lambda^*(\varrho) = (\lambda^*(\varrho)_i)$, $\lambda^*(\varrho)_i = \sum_n T_{-n}(\varrho \partial_{u_n^i} \lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Обратим внимание, что частная производная $\partial_{u_n^i} \lambda \neq 0$ лишь для конечного числа $n \in \mathbb{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Отображения λ_* и λ^* сопряжены по Лагранжу:*

$$\sum_m (\varrho \lambda_*(f))|_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \sum_m \left(\sum_i \lambda^*(\varrho)_i f^i \right) \Big|_{\mathbf{j}(\phi)}(m)$$

для всех $\lambda, \varrho \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{E}$, $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, с учетом предложений 2 и 4 имеем

$$\begin{aligned} \sum_m (\varrho \lambda_*(f))|_{\mathbf{j}(\phi)}(m) &= \sum_{m,i,n} (\varrho (\partial_{u_n^i} \lambda) T_n f^i)|_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \\ &= \sum_{m,i,n} [T_n (T_{-n}(\varrho \partial_{u_n^i} \lambda) f^i)]|_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \sum_{i,n} \sum_m [T_n ((T_{-n}(\varrho \partial_{u_n^i} \lambda) f^i)|_{\mathbf{j}(\phi)})](m) = \\ &= \sum_{i,m,n} ((T_{-n}(\varrho \partial_{u_n^i} \lambda)) f^i)|_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \sum_m \left(\sum_i \lambda^*(\varrho)_i f^i \right) \Big|_{\mathbf{j}(\phi)}(m). \end{aligned}$$

Вариация функционала Λ определяется формулой

$$\delta \Lambda(\phi; \delta \phi) = \sum_m \lambda_*(\delta \phi)|_{\mathbf{j}(\phi)}(m), \quad \phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V), \quad \delta \phi \in \text{Map}_0(\mathbb{L}; V).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Обратим внимание, что вариация $\delta \Lambda(\phi; \delta \phi)$ определена для всех $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$ и $\delta \phi \in \text{Map}_0(\mathbb{L}; V)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Имеет место представление*

$$\delta \Lambda(\phi; \delta \phi) = \sum_{m,i} (\delta_{u^i} \lambda)|_{\mathbf{j}(\phi)}(m) \delta \phi^i(m), \quad \phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V), \quad \delta \phi \in \text{Map}_0(\mathbb{L}; V),$$

где

$$\delta_{u^i} \lambda = \frac{\delta \lambda}{\delta u^i} = \lambda^*(1)_i = \sum_n T_{-n}(\partial_{u_n^i} \lambda), \quad i \in I,$$

– вариационная производная (здесь $1 \in \mathcal{A}$).

Для доказательства достаточно воспользоваться предложением 5.

В частности, определено линейное отображение

$$\delta_u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}^*, \quad \lambda \mapsto \delta_u \lambda, \quad (\delta_u \lambda)_i = \delta_{u^i} \lambda, \quad i \in I.$$

Кроме того, имеется линейное отображение $\text{Div}: \mathcal{A}^D \rightarrow \mathcal{A}$ (D – размерность решетки $\mathbb{L}$), которое каждому вектору $J = (J^\alpha) \in \mathcal{A}^D$ ставит в соответствие его разностную дивергенцию

$$\text{Div} J = \sum_\alpha \Delta_\alpha J^\alpha \in \mathcal{A}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Вариация $\delta\Lambda(\phi; \delta\phi) = 0$ для всех $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$ и $\delta\phi \in \text{Map}_0(\mathbb{L}; V)$ тогда и только тогда, когда плотность $\lambda = \text{Div} J$ для некоторого вектора $J \in \mathcal{A}^D$. В частности, $\text{Im } \text{Div} = \text{Ker } \delta_u$, где $\text{Im } \text{Div}$ – образ отображения Div , а $\text{Ker } \delta_u$ – ядро отображения δ_u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с предложением 6 фактически следует доказать, что условие $\delta_u \lambda = 0$ влечет представление $\lambda = \text{Div} J$. Естественное доказательство последнего утверждения требует более глубокого развития разностного вариационного формализма, что выходит за рамки данной статьи. Этот факт считается известным (см., например, [7]–[9]), хотя автор и не нашел строгого доказательства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Для данного вектора $A \in \mathcal{A}^D$ равенство $\text{Div} A = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $A^\alpha = \sum_\beta \Delta_\beta B^{\alpha\beta}$, где компоненты $B^{\alpha\beta} \in \mathcal{A}$, $B^{\alpha\beta} + B^{\beta\alpha} = D$, $1 \leq \alpha, \beta \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является еще одной составляющей вариационного комплекса, широко известной в обычном вариационном исчислении (см., например, [10]). В разностной ситуации оно тоже считается известным (см., например, [8]), хотя строгое доказательство отсутствует. В любом случае доказательство точности разностного вариационного комплекса (и бикомплекса) – это тема отдельного исследования.

Каждая функция $\chi = (\chi_i) \in \mathcal{E}^*$ задает два линейных отображения:

- 1) $\chi_*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^*$, $f \mapsto \chi_*(f)$, где $\chi_*(f)_i = \sum_{j,n} (\partial_{u_n^j} \chi_i) T_n f^j$;
- 2) $\chi^*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^*$, $f \mapsto \chi^*(f)$, где $\chi^*(f)_i = \sum_{j,n} (\partial_{u^i} T_n \chi_j) T_n f^j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Отображения χ_* и χ^* сопряжены по Лагранжу:

$$\sum_{i,m} (g^i \chi_*(f)_i) |_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \sum_{j,m} (\chi^*(g)_j f^j) |_{\mathbf{j}(\phi)}(m)$$

для всех $f, g \in \mathcal{E}$, $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{i,m} (g^i \chi_*(f)_i) |_{\mathbf{j}(\phi)}(m) &= \sum_{i,j,m,n} (g^i (\partial_{u_n^j} \chi_i) T_n f^j) |_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \\ &= \sum_{i,j,n} \sum_m [T_n (T_{-n} (g^i \partial_{u_n^j} \chi_i) f^j)] |_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \sum_{i,j,m,n} (T_{-n} (g^i \partial_{u_n^j} \chi_i) f^j) |_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \\ &= \sum_{i,j,m,n} (T_n (g^i \partial_{u_{-n}^j} \chi_i) f^j) |_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \sum_{i,j,m,n} ((T_n g^i) (\partial_{u^i} T_n \chi_i) f^j) |_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \\ &= \sum_{j,m} (\chi^*(g)_j f^j) |_{\mathbf{j}(\phi)}(m). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Функция $\chi = (\chi_i) \in \mathcal{E}^*$ обладает представлением $\chi = \delta_u \lambda$ для некоторого $\lambda \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\chi_* = \chi^*$. Другими словами, образ $\text{Im } \delta_u = \{\chi \in \mathcal{E}^*; \chi_* = \chi^*\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, с одной стороны, легко проверяется, что $(\delta_u \lambda)_* = (\delta_u \lambda)^*$ для всякого $\lambda \in \mathcal{A}$. С другой стороны, пусть $\chi \in \mathcal{E}^*$ и $\chi_* = \chi^*$, т.е. $\partial_{u_n^j} \chi_i = \partial_{u^i} T_n \chi_j$ для всех $i, j \in I$, $n \in \mathbb{L}$. По аналогии с леммой Пуанкаре ПОЛОЖИМ

$$\lambda(m, \mathbf{u}) = \int_0^1 \sum_j u^j \chi_j(m, \tau \mathbf{u}) d\tau \quad \text{для всех } m \in \mathbb{L}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta_{u^i} \lambda &= \sum_n T_{-n} \partial_{u_n^i} \lambda = \int_0^1 \left(\chi_i(m, \tau \mathbf{u}) + \sum_{j,n} (T_{-n} u^j) (T_{-n} \partial_{u_n^i} \chi_j)(m, \tau \mathbf{u}) \tau \right) d\tau = \\ &= \int_0^1 \left(\chi_i(m, \tau \mathbf{u}) + \tau \sum_{j,n} u_n^j (\partial_{u_n^i} T_n \chi_j)(m, \tau \mathbf{u}) \right) d\tau = \\ &= \int_0^1 \left(\chi_i(m, \tau \mathbf{u}) + \tau \sum_{j,n} u_n^j (\partial_{u_n^j} \chi_i)(m, \tau \mathbf{u}) \right) d\tau = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} (\tau \chi_i(m, \tau \mathbf{u})) d\tau = (\tau \chi_i(m, \tau \mathbf{u}))|_{\tau=0}^{\tau=1} = \chi_i(m, \mathbf{u}), \quad i \in I. \end{aligned}$$

Каждая функция $f = (f^i) \in \mathcal{E}$ задает два линейных отображения:

- 1) $f_*: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $g \mapsto f_*(g)$, где $f_*(g)^i = \text{ev}_g(f^i) = \sum_{j,n} (\partial_{u_n^j} f^i) T_n g^j$;
- 2) $f^*: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}^*$, $\chi \mapsto f^*(\chi)$, где $f^*(\chi)_j = \sum_{i,n} T_{-n} ((\partial_{u_n^j} f^i) \chi_i)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Отображения f_* и f^* сопряжены по Лагранжу:*

$$\sum_{i,m} (\chi_i f_*(g)^i) |_{\mathbf{j}(\phi)}(m) = \sum_{j,m} (f^*(\chi)_j g^j) |_{\mathbf{j}(\phi)}(m)$$

для всех $\chi \in \mathcal{E}^*$, $g \in \mathcal{E}$, $\phi \in \text{Map}(\mathbb{L}; V)$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 9.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Коммутатор*

$$[\delta_{u^i}, \text{ev}_f] = \sum_j (f^*)_i^j \circ \delta_{u^j} \quad \text{для всех } i \in I,$$

$$\text{где } (f^*)_i^j = \sum_n T_{-n} \circ (\partial_{u_n^i} f^j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом предложения 3 имеем

$$\begin{aligned} \delta_{u^i} \circ \text{ev}_f &= \partial_{u^i} \circ \sum_m T_{-m} \circ \text{ev}_f = \partial_{u^i} \circ \text{ev}_f \circ \sum_m T_{-m} = \\ &= \sum_{j,n} \partial_{u^i} \circ (T_n f^j) \circ \partial_{u_n^j} \circ \sum_m T_{-m} = \\ &= \sum_{j,n} ((\partial_{u^i} T_n f^j) + (T_n f^j) \circ \partial_{u^i}) \circ \partial_{u_n^j} \circ \sum_m T_{-m} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,n} (T_n \circ (\partial_{u_{-n}^i} f^j) \circ T_{-n} \circ \partial_{u_n^j} + (T_n f^j) \circ \partial_{u_n^j} \circ \partial_{u^i}) \circ \sum_m T_{-m} = \\
&= \sum_{j,n} \left(T_{-n} \circ (\partial_{u_n^i} f^j) \circ \partial_{u^j} \circ \sum_m T_{n-m} + (T_n f^j) \circ \partial_{u_n^j} \circ \partial_{u^i} \circ \sum_m T_{-m} \right) = \\
&= \sum_j (f^*)_i^j \circ \delta_{u^j} + \text{ev}_f \circ \delta_{u^i} \quad \text{для всех } i \in I.
\end{aligned}$$

3. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ НА РЕШЕТКЕ

3.1. Эволюционные системы. Введем новую независимую переменную $t \in \mathbb{R}$ и новые пространства:

- 1) $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbb{R} \times \mathbb{L} \times \mathbf{V}; W) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbf{V}; W));$
- 2) $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{L} \times \mathbf{V}) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbf{V}));$
- 3) $\mathcal{F} = \mathcal{N}(\mathbb{R} \times \mathbb{L} \times \mathbf{V}; V) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbf{V}; V));$
- 4) $\mathcal{F}^* = \mathcal{N}(\mathbb{R} \times \mathbb{L} \times \mathbf{V}; V^*) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbf{V}; V^*));$
- 5) $\Phi = \Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{L}; V) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; V)),$

где

$$\text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbf{V}; W)) = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{ind} \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbf{V}^p; W)).$$

Ради простоты обозначений, для пары функций $f = f(t, m, \mathbf{u}) \in \mathcal{N}$ и $\phi = \phi(t, m) \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{V}))$ будем писать

$$f|_\phi = f|_\phi(t, m) = f(t, m, \phi(t, m)) \in \text{Map}(\mathbb{L}; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; W)).$$

Введенные выше вариационные операции действуют и на пространствах $\mathcal{N}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$ и Φ , переменная t является в этой ситуации параметром.

Объект нашего изучения – дифференциально-разностные системы уравнений

$$\partial_t u^i = f^i(t, m, \mathbf{u}), \quad i \in I,$$

коротко $\partial_t u = f$, где функция $f \in \mathcal{F}$, ∂_t – частная производная по t . Решения этой системы – функции $\phi = \phi(t, m) \in \Phi$ такие, что

$$\partial_t \phi^i(t, m) = f^i(t, m, \mathbf{j}(\phi)(t, m)) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{L}, \quad i \in I,$$

коротко $\partial_t \phi = f|_{\mathbf{j}(\phi)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть $\phi \in \Phi$ есть решение системы $\partial_t u = f$. Тогда для любого $n \in \mathbb{L}$ функция $\phi_n = T_n \phi \in \Phi$ есть решение сдвинутой системы $\partial_t u_n = T_n f$, т.е. $\partial_t (T_n \phi) = (T_n f)|_{\mathbf{j}(\phi)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу предложения 2

$$\partial_t (T_n \phi) = T_n (\partial_t \phi) = T_n (f|_{\mathbf{j}(\phi)}) = (T_n f)|_{\mathbf{j}(\phi)}.$$

С каждой системой $u_t = f$ ассоциируется оператор полной эволюции

$$\text{Ev}_f = \partial_t + \text{ev}_f = \partial_t + \sum_{i,n} (T_n f^i) \partial_{u_n^i}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Для данной функции $\phi \in \Phi$ равенство

$$(\text{Ev}_f F)|_{\mathbf{j}(\phi)} = \partial_t(F|_{\mathbf{j}(\phi)})$$

имеет место для всех $F \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда ϕ есть решение системы $u_t = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, с одной стороны,

$$\begin{aligned} (\text{Ev}_f F)|_{\mathbf{j}(\phi)} &= (\partial_t F)|_{\mathbf{j}(\phi)} + \sum_{i,n} (\partial_{u_n^i} F)|_{\mathbf{j}(\phi)} (T_n f^i)|_{\mathbf{j}(\phi)} = \\ &= (\partial_t F)|_{\mathbf{j}(\phi)} + \sum_{i,n} (\partial_{u_n^i} F)|_{\mathbf{j}(\phi)} T_n(f^i|_{\mathbf{j}(\phi)}), \end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} \partial_t(F|_{\mathbf{j}(\phi)}) &= (\partial_t F)|_{\mathbf{j}(\phi)} + \sum_{i,n} (\partial_{u_n^i} F)|_{\mathbf{j}(\phi)} \partial_t(T_n \phi^i) = \\ &= (\partial_t F)|_{\mathbf{j}(\phi)} + \sum_{i,n} (\partial_{u_n^i} F)|_{\mathbf{j}(\phi)} T_n(\partial_t \phi^i). \end{aligned}$$

Следовательно, требуемое равенство имеет место тогда и только тогда, когда $f^i|_{\mathbf{j}(\phi)} = \partial_t \phi^i$ для всех $i \in I$, т.е. когда ϕ есть решение системы $u_t = f$.

3.2. Симметрии. Согласно общим принципам алгебро-геометрического подхода (группового анализа) [1], [3], [5], [6] (инфинитезимальные) симметрии данной эволюционной системы $\partial_t u = f$ суть эволюционные дифференцирования, коммутирующие с оператором полной эволюции Ev_f . Подробнее, функция $g \in \mathcal{F}$ задает симметрию эволюционной системы $\partial_t u = f$, если коммутатор $[\text{Ev}_f, \text{ev}_g] = 0$.

Определим отображение $\text{Ev}_f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ по правилу: $\text{Ev}_f(g)^i = \text{Ev}_f(g^i)$ для всех $i \in I$, $g = (g^i) \in \mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Функция $g \in \mathcal{F}$ задает симметрию эволюционной системы $\partial_t u = f$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений

$$(\text{Ev}_f - f_*)(g) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, коммутатор

$$\begin{aligned} [\text{Ev}_f, \text{ev}_g] &= \sum_{i,m} (\text{Ev}_f(T_m g^i) - \text{ev}_g(T_m f^i)) \partial_{u_m^i} = \\ &= \sum_{i,m} T_m (\text{Ev}_f(g^i) - \text{ev}_g(f^i)) \partial_{u_m^i}. \end{aligned}$$

Остается лишь воспользоваться определениями отображений Ev_f и f_* .

3.3. Законы сохранения. Как известно (см., например, [7]), пара $(\varrho, J) \in \mathcal{B}^{1+D}$, где плотность $\varrho \in \mathcal{B}$, вектор $J = (J^\alpha) \in \mathcal{B}^D$ (напомним, что D – размерность решетки $\mathbb{L}$), называется *сохраняющимся током* для системы $\partial_t u = f$, если она удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\operatorname{Ev}_f \varrho + \operatorname{Div} J = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Пусть (ϱ, J) – сохраняющийся ток, а ϕ – решение системы $\partial_t u = f$. Если функции $\varrho|_{j(\phi)}, J^1|_{j(\phi)}, \dots, J^D|_{j(\phi)}$ суммируемые, то

$$\partial_t \left(\sum_m \varrho|_{j(\phi)}(t, m) \right) = 0.$$

Другими словами, функционал $R(\phi)(t) = \sum_m \varrho|_{j(\phi)}(t, m)$ сохраняется на решениях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу предложения 14

$$\partial_t \sum_{m \in \mathbb{L}} \varrho|_{j(\phi)}(t, m) = \sum_{m \in \mathbb{L}} \partial_t (\varrho|_{j(\phi)}(t, m)) = \sum_{m \in \mathbb{L}} (\operatorname{Ev}_f \varrho)|_{j(\phi)}(t, m),$$

в то время как в силу предложений 2 и 4

$$\sum_{m \in \mathbb{L}} (\Delta_\alpha J^\alpha)|_{j(\phi)}(t, m) = \sum_{m \in \mathbb{L}} \Delta_\alpha (J^\alpha|_{j(\phi)}(t, m)) = 0 \quad \text{для всех } 1 \leq \alpha \leq D,$$

так что достаточно воспользоваться уравнением неразрывности.

Токи (ϱ, J) вида

$$\varrho = \operatorname{Div} A = \sum_\alpha \Delta_\alpha A^\alpha, \quad J^\alpha = -\operatorname{Ev}_f A^\alpha + \sum_\beta \Delta_\beta B^{\alpha\beta},$$

где $A^\alpha, B^{\alpha\beta} \in \mathcal{B}$, $B^{\alpha\beta} + B^{\beta\alpha} = 0$, $1 \leq \beta, \alpha \leq D$, называются *тривиальными*, поскольку в этом случае функционал $R(\phi) = 0$ для всех функций $\phi \in \Phi$ в силу предложений 2 и 4. Для данной системы $\partial_t u = f$ множество $\mathcal{CC}_f$ всех сохраняющихся токов является линейным пространством, а множество всех тривиальных токов $\mathcal{TCC}_f$ – его подпространством, так что определено факторпространство $\mathcal{CL}_f = \mathcal{CC}_f / \mathcal{TCC}_f$ *законов сохранения* данной системы.

Определено линейное отображение

$$\operatorname{char}: \mathcal{CC}_f \rightarrow \mathcal{F}^*, \quad (\varrho, J) \mapsto \delta_u \varrho,$$

где величина $\chi = \delta_u \varrho$ называется *характеристикой* тока (ϱ, J) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Ток $(\varrho, J) \in \mathcal{TCC}_f$ тогда и только тогда, когда его характеристика $\delta_u \varrho = 0$. Иначе говоря, ядро $\operatorname{Ker} \operatorname{char} = \mathcal{TCC}_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ток (ϱ, J) тривиальный, так что $\varrho = \operatorname{Div} A$, где $A \in \mathcal{B}^D$. Тогда согласно предложению 7 $\delta_u \varrho = \delta_u (\operatorname{Div} A) = 0$. Если $(\varrho, J) \in \mathcal{CC}_f$ и $\delta_u \varrho = 0$,

то в силу того же предложения 7 $\varrho = \operatorname{Div} A$, $A \in \mathcal{B}^D$. Положим $\tilde{J}^\alpha = J^\alpha + \operatorname{Ev}_f A^\alpha$, $1 \leq \alpha \leq D$. Тогда

$$\operatorname{Div} \tilde{J} = \operatorname{Div} J + \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha} (\operatorname{Ev}_f A^{\alpha}) = \operatorname{Div} J + \operatorname{Ev}_f (\operatorname{Div} A) = \operatorname{Div} J + \operatorname{Ev}_f \varrho = 0,$$

так как коммутатор $[\Delta_{\alpha}, \operatorname{Ev}_f] = 0$, $1 \leq \alpha \leq D$, и имеет место уравнение неразрывности для тока (ϱ, J) . Согласно предложению 8 $\tilde{J}^{\alpha} = \sum_{\beta} \Delta_{\beta} B^{\alpha\beta}$, $B^{\alpha\beta} + B^{\beta\alpha} = 0$, $1 \leq \beta, \alpha \leq D$, и, значит, ток (ϱ, J) тривиальный.

СЛЕДСТВИЕ. *Отображение $\operatorname{char}: \mathcal{CC}_f \rightarrow \mathcal{F}^*$ индуцирует мономорфизм (линейное отображение с тривиальным ядром)*

$$\operatorname{Char}: \mathcal{CL}_f \rightarrow \mathcal{F}^*, \quad [(\varrho, J)] \mapsto \delta_u \varrho.$$

Определим отображение $\operatorname{Ev}_f: \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$ по правилу $\operatorname{Ev}_f(\chi)_i = \operatorname{Ev}_f(\chi_i)$ для всех $i \in I$, $\chi = (\chi_i) \in \mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Функция $\chi \in \mathcal{F}^*$ есть характеристика некоторого тока $(\varrho, J) \in \mathcal{CC}_f$ тогда и только тогда, когда $\chi_* = \chi^*$ и $(\operatorname{Ev}_f + f^*)\chi = 0$. Другими словами, образ*

$$\operatorname{Im} \operatorname{char} = \operatorname{Im} \operatorname{Char} = \{\chi \in \mathcal{F}^*; \chi_* = \chi^*, (\operatorname{Ev}_f + f^*)\chi = 0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 10 функция $\chi = \delta_u \varrho$ тогда и только тогда, когда $\chi_* = \chi^*$. Далее, пусть $(\varrho, J) \in \mathcal{CC}_f$ и $\chi = \delta_u \varrho$, тогда в силу предложений 12 и 7

$$\begin{aligned} (\operatorname{Ev}_f + f^*)(\chi)_i &= \partial_t(\delta_{u^i} \varrho) + \operatorname{ev}_f(\delta_{u^i} \varrho) + \sum_j (f^*)_i^j(\delta_{u^j} \varrho) = \\ &= \delta_{u^i}(\partial_t \varrho + \operatorname{ev}_f \varrho) = \delta_{u^i}(\operatorname{Ev}_f \varrho) = -\delta_{u^i}(\operatorname{Div} J) = 0, \quad i \in I. \end{aligned}$$

Наоборот, пусть $\chi = \delta_u \varrho$ и $(\operatorname{Ev}_f + f^*)\chi = 0$, тогда аналогичным образом имеем

$$(\operatorname{Ev}_f + f^*)(\delta_u \varrho) = \delta_u(\operatorname{Ev}_f \varrho) = 0.$$

В силу предложения 7 $\operatorname{Ev}_f \varrho = -\operatorname{Div} J$ для некоторого $J \in \mathcal{B}^D$, так что пара $(\varrho, J) \in \mathcal{CC}_f$.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА. *Имеет место изоморфизм линейных пространств*

$$\operatorname{Char}: \mathcal{CL}_f \simeq \{\chi \in \mathcal{F}^*; \chi_* = \chi^*, (\operatorname{Ev}_f + f^*)\chi = 0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. По данной характеристике χ плотность ϱ восстанавливается по формуле (см. доказательство предложения 10)

$$\varrho(t, m, \mathbf{u}) = \int_0^1 \sum_j u^j \chi_j(t, m, \tau \mathbf{u}) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{L}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V}.$$

Вектор тока J в приложениях играет второстепенную роль, но в случае необходимости его можно восстановить с помощью предложения 7.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00144-а) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1).

Список литературы

- [1] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **68**:2 (1986), 163–171.
- [2] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [3] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [4] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [5] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Ser. Sov. and East Eur. Math., **9**, World Scientific, Singapore, 1992.
- [6] А. М. Виноградов, И. С. Красилицык (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, М., 1997.
- [7] W. Hereman, M. Colagrosso, R. Sayers et al., “Continuous and discrete homotopy operators and the computation of conservation laws”, *Differential Equations with Symbolic Computation*, Trends Math., eds. D. Wang, Z. Zheng, Birkhäuser, 2005, 255–290.
- [8] P. E. Hydon, E. L. Mansfield, *Found. Comput. Math.*, **4**:2 (2004), 187–217.
- [9] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [10] I. M. Anderson, *The variational bicomplex*, http://www.math.usu.edu/~fg_mp/Publications/VB/vb.pdf, 2004.

Поступила в редакцию 28.02.2008