Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Зеленов, Об эквивалентности коммутационных соотношений, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 3, 406–412

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:03:10

© 2008 г.

Е. И. Зеленов*

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассматриваются C^* -алгебры коммутационных соотношений над полями $\mathbb{Q}_p$, $p = 2, 3, 5, \dots, \infty$. Описаны все неприводимые сепарабельные представления вышеуказанных алгебр. Доказано, что алгебры не изоморфны при различных p .

Ключевые слова: коммутационные соотношения, p -адическая топология, неприводимые представления, эквивалентность представлений.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – поля рациональных, вещественных и комплексных чисел соответственно. Через $\mathbb{Q}_p$, $p = 2, 3, 5, \dots$, обозначим поля p -адических чисел, $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ (т.е. “ ∞ -адический” всюду в дальнейшем будет означать “вещественный”). Аддитивная группа поля обозначается таким же символом, что и поле. Все поля снабжены стандартной топологией. Если будет рассматриваться другая топология, отличная от стандартной, то это будет особо отмечаться.

Пусть G – локально-компактная абелева группа, $\hat{G}$ – группа характеров группы G (двойственная по Понтрягину). Группу G будем записывать аддитивно, группу $\hat{G}$ – мультипликативно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Представлением коммутационных соотношений над группой G назовем пару $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над $\mathbb{C}$, $\mathcal{W}$ – отображение из $G \times \hat{G}$ в множество унитарных операторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – алгебра ограниченных операторов на $\mathcal{H}$), удовлетворяющее следующим условиям:*

- 1) $\mathcal{W}(0, 1) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$;
- 2) отображение $(g, \hat{g}) \mapsto \mathcal{W}(g, \hat{g})$ непрерывно в слабой операторной топологии;
- 3) $\mathcal{W}(g, \hat{g})\mathcal{W}(h, \hat{h}) = \hat{g}(h)\hat{h}(g)\mathcal{W}(h, \hat{h})\mathcal{W}(g, \hat{g})$.

Понятия цикличности, неприводимости, унитарной эквивалентности и прямой суммы представлений коммутационных соотношений определяются естественным образом. Известно (теорема единственности Стоуна–фон Неймана–Макки) [1], [2],

*E-mail: evgeny.zelenov@gmail.com

что существует единственное с точностью до унитарной эквивалентности неприводимое представление коммутационных соотношений, а любое представление коммутационных соотношений есть прямая сумма неприводимых представлений (это доказано для более общего случая произвольной локально-компактной группы).

В дальнейшем мы также будем рассматривать разрывные представления коммутационных соотношений (т.е. представления, для которых свойство непрерывности 2 из определения 1 не выполняется).

Докажем простое следствие определения коммутационных соотношений, которое показывает, что любое представление является точным.

ЛЕММА 1. Пусть $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ – представление коммутационных соотношений над группой G . Справедливо следующее утверждение. Если $\mathcal{W}(g, \hat{g}) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$, то $g = 0$, $\hat{g} = 1$, т.е. $(g, \hat{g})$ – единичный элемент группы $G \times \hat{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(g, \hat{g}) \in G \times \hat{G}$, $g \neq 0$, $\hat{g} \neq 1$, $\mathcal{W}(g, \hat{g}) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$. Найдется такой элемент $\hat{h} \in \hat{G}$, что $\hat{h}(g) \neq 1$ (т.е. множество характеров разделяет точки в G). Поскольку $\mathcal{W}(g, \hat{g}) = \text{Id}_{\mathcal{H}}$, равенство $\langle \mathcal{W}(g, \hat{g})\phi, \phi \rangle_{\mathcal{H}} = 1$ верно для любого элемента $\phi \in \mathcal{H}$, $\|\phi\| = 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \mathcal{W}(g, \hat{g})\phi, \phi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{W}(0, \hat{h})\mathcal{W}(g, \hat{g})\phi, \mathcal{W}(0, \hat{h})\phi \rangle_{\mathcal{H}} = \\ &= \hat{h}(g) \langle \mathcal{W}(g, \hat{g})\mathcal{W}(0, \hat{h})\phi, \mathcal{W}(0, \hat{h})\phi \rangle_{\mathcal{H}} = \hat{h}(g) \neq 1. \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что $g = 0$. Аналогичными рассуждениями доказывается, что $\hat{g} = 1$.

Заметим, что при доказательстве мы не использовали непрерывность операторов $\mathcal{W}(g, \hat{g})$.

Из теоремы единственности следует корректность следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ – неприводимое представление коммутационных соотношений. C^* -алгеброй $\mathcal{A}(G)$ коммутационных соотношений над G назовем C^* -подалгебру $\mathcal{B}(H)$, порожденную одномерным проектором и семейством операторов $\{\mathcal{W}(g, \hat{g}), g \in G, \hat{g} \in \hat{G}\}$.

В силу теоремы Стоуна–фон Неймана–Макки алгебра коммутационных соотношений $\mathcal{A}(G)$ над G не зависит от выбора представления (различные представления определяют изоморфные алгебры). Представление $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ из определения 2 будем называть представлением коммутационных соотношений, порождающим алгебру $\mathcal{A}_p$. Заметим, что условие неприводимости коммутационных соотношений в определении алгебры можно не учитывать.

2. АЛГЕБРА $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}(\mathbb{Q}_p)$

Для случая $\mathbb{Q}_p$, $p = 2, 3, 5, \dots, \infty$, группы $\mathbb{Q}_p$ и $\hat{\mathbb{Q}}_p$ изоморфны. Изоморфизм задается формулой $\mathbb{Q}_p \ni y \rightarrow \hat{y}(x) = \chi_p(yx) \in \hat{\mathbb{Q}}_p$, $x \in \mathbb{Q}_p$, где χ_p – произвольный (фиксированный) невырожденный характер группы $\mathbb{Q}_p$. В качестве χ_p можно выбрать характер $\chi_p(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}$, где $\{x\}_p$ – p -адическая дробная часть x . В случае

$G = \mathbb{Q}_p$ коммутационные соотношения имеют вид

$$\mathcal{W}(x, y)\mathcal{W}(x', y') = \chi_p(xy' - yx')\mathcal{W}(x', y')\mathcal{W}(x, y).$$

Удобно ввести следующее обозначение. Пусть $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$. Обозначим через B симплектическую форму на $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$: $B(z, z') = xy' - yx'$.

Пусть непрерывные коммутационные соотношения $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ порождают алгебру $\mathcal{A}_p$. Представление $(\pi_0, \mathcal{H})$ алгебры $\mathcal{A}_p$ в алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограниченных операторов на $\mathcal{H}$, задаваемое соотношением $\pi_0(\mathcal{W}(z)) = \mathcal{W}(z)$, будем называть *тождественным представлением алгебры $\mathcal{A}_p$* .

Условие непрерывности коммутационных соотношений приводит к следующему существенному свойству алгебры $\mathcal{A}_p$.

ЛЕММА 2. Пусть $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ – произвольное непрерывное представление коммутационных соотношений (не обязательно неприводимое), порождающее алгебру $\mathcal{A}_p$. Тогда алгебра фон Неймана, порожденная тождественным представлением $\mathcal{A}_p$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, сепарабельна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ – представление коммутационных соотношений, порождающее алгебру $\mathcal{A}_p$. Поскольку отображение

$$z \mapsto \mathcal{W}(z), \quad z \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p,$$

слабо непрерывно, то счетное семейство операторов $\{\mathcal{W}(q), q \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$ образует плотное подмножество в алгебре фон Неймана, порожденной операторами $\{\mathcal{W}(z), z \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p\}$. Следовательно, указанная выше алгебра фон Неймана счетно порождена и тем самым сепарабельна.

Важным классом представлений алгебры $\mathcal{A}_p$ являются представления, содержащие одномерный проектор. Они имеют ясный физический смысл. А именно, это фоковские представления, а указанный выше проектор – это проектор на вакуумное состояние. Неприводимые представления, содержащие одномерный проектор, содержат алгебру компактных операторов $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ [3].

Тождественное представление π_0 – единственное представление, содержащее компактные операторы. А именно, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3. Пусть $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ – непрерывное неприводимое представление, порождающее алгебру $\mathcal{A}_p$, $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ – произвольное неприводимое представление алгебры $\mathcal{A}_p$. Тогда либо π эквивалентно π_0 , либо $\pi(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ и $\pi(K) \neq 0$. Тогда $\pi(\mathcal{A}_p)$ содержит компактный оператор. В силу неприводимости представления π образ $\pi(\mathcal{A}_p)$ содержит алгебру компактных операторов $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi) \subseteq \pi(\mathcal{A}_p)$ [3]. Поскольку алгебра компактных операторов имеет единственное с точностью до эквивалентности неприводимое представление, то

$$\pi|_{\mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)} \simeq \pi_0|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})}.$$

В силу единственности продолжения представления π с алгебры $\mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi)$ на $\pi(\mathcal{A}_p)$ получаем требуемое утверждение.

Из леммы 3 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Алгебры $\mathcal{A}_p$ и $\mathcal{A}_{p'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $p = p'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mathcal{W}, \mathcal{H}), (\mathcal{W}', \mathcal{H}')$ – неприводимые представления коммутационных соотношений, порождающие алгебры $\mathcal{A}_p$ и $\mathcal{A}_{p'}$ соответственно, и пусть $\pi: \mathcal{A}_p \rightarrow \mathcal{A}_{p'}$ – изоморфизм. Поскольку $\pi(\mathcal{W}(z)), z \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$, удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $\mathcal{A}_{p'}$, то $(\pi, \mathcal{H}')$ – неприводимое представление алгебры $\mathcal{A}_p$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$, при этом $\text{Ker}(\pi) = 0$. Следовательно (см. лемму 3), π эквивалентно тождественному представлению и $\mathcal{W}(z)$ и $\mathcal{W}'(z)$ должны удовлетворять одним и тем же коммутационным соотношениям. Значит, для любого рационального числа q должно выполняться равенство $\chi_p(q) = \chi_{p'}(q)$, что возможно только при $p = p'$.

Несложно построить пример разрывного представления коммутационных соотношений. Действительно, пусть $\lambda: \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ – разрывный характер аддитивной группы $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$, а $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ – непрерывное представление коммутационных соотношений. Рассмотрим представление коммутационных соотношений $(\mathcal{W}_\lambda, \mathcal{H})$, где $\mathcal{W}_\lambda(z) = \lambda(z)\mathcal{W}(z), z \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$. Легко видеть, что операторы из семейства $\{\mathcal{W}_\lambda(z), z \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p\}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям, но при этом отображение $z \mapsto \mathcal{W}_\lambda(z)$ не является непрерывным в слабой топологии. Кроме того, поскольку представление $(\mathcal{W}_\lambda, \mathcal{H})$ разрывно, оно не является унитарно-эквивалентным исходному представлению $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$.

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Пусть λ – характер (возможно, разрывный) группы $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$. Представление коммутационных соотношений $(\mathcal{W}_\lambda, \mathcal{H})$ неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо исходное представление $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – произвольный ограниченный оператор на $\mathcal{H}$. Справедлива формула

$$[A, \mathcal{W}_\lambda(z)] = \lambda(z)[A, \mathcal{W}(z)], \quad z \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p.$$

Поскольку $\lambda(z)$ не равно нулю ни при каких значениях $z \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$, оператор A коммутирует со всеми операторами $\mathcal{W}_\lambda(z)$ тогда и только тогда, когда он коммутирует со всеми операторами $\mathcal{W}(z)$. Дальнейшее следует из определения неприводимости коммутационных соотношений.

ЛЕММА 5. *Пусть $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ – непрерывное представление коммутационных соотношений, $\lambda, \tilde{\lambda}$ – характеры (возможно, разрывные) группы $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$. Представления коммутационных соотношений $(\mathcal{W}_\lambda, \mathcal{H}), (\mathcal{W}_{\tilde{\lambda}}, \mathcal{H})$ унитарно-эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lambda^{-1}\tilde{\lambda}$ – непрерывный характер группы $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно показать, что если λ – непрерывный характер группы $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$, то представления $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ и $(\mathcal{W}_\lambda, \mathcal{H})$ унитарно-эквивалентны. Поскольку λ – непрерывный характер, то существует

$(a, a') \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ такое, что для всех $z = (x, x') \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ справедливо равенство $\lambda(x, x') = \chi_p(-xa' + x'a)$ [4]. При этом, как легко заметить из определения коммутационных соотношений,

$$\mathcal{W}_\lambda(x, x') = \mathcal{W}(a, a')\mathcal{W}(x, x')\mathcal{W}^{-1}(a, a')$$

для всех $z = (x, x') \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$.

Разрывные характеры группы $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ удобно рассматривать как непрерывные характеры той же группы, но с дискретной топологией.

Пусть $\mathbb{Q}_p^d$ – аддитивная группа поля $\mathbb{Q}_p$ с дискретной топологией. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 6. *Группа $\mathbb{Q}_p^d$ изоморфна прямой сумме $\bigoplus_{\alpha \in \Omega} \mathbb{Q}$ континуума экземпляров аддитивной группы поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (множество Ω – континуум, $|\Omega| = c$).*

Доказательство для случая аддитивной группы поля вещественных чисел с дискретной топологией (в обозначениях настоящей работы – $\mathbb{Q}_\infty^d$) можно найти в работе [4]. Для произвольного p доказательство аналогично.

Удобно ввести следующее обозначение. Пусть $\mathbb{D}_p = \mathbb{Q}_p^d \times \mathbb{Q}_p^d$, $\widehat{\mathbb{D}}_p$ – соответствующая группа характеров. Согласно лемме 6 $\mathbb{D}_p$ изоморфны при разных p , в дальнейшем индекс p будем опускать. Заметим, что $\widehat{\mathbb{D}}$ компактна и изоморфна прямому произведению континуума экземпляров группы характеров поля рациональных чисел ($\widehat{\mathbb{D}}$ – компактификация Бора локально-компактной группы $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$). Непрерывные (в обычной топологии на $\mathbb{Q}_p$) характеры группы $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ образуют плотную подгруппу в $\widehat{\mathbb{D}}$, фактор-группа $\widehat{\mathbb{D}}/\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ имеет мощность 2^c [4].

Пространство $\mathbb{D}$ имеет следующую физическую интерпретацию. Одной из идей, лежащих в основе p -адической математической физики [5], является утверждение о том, что результатом физического измерения является рациональное (а не вещественное) число. В продолжение этой идеи можно утверждать, что результатом физического эксперимента, т.е. конечной серией измерений, является конечная последовательность рациональных чисел, а именно, элемент пространства $\mathbb{D}$ (см. лемму 6).

Пусть $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ – неприводимое представление коммутационных соотношений, порождающее алгебру $\mathcal{A}_p$. Отображение $\mathcal{A}_p \rightarrow \mathcal{A}_p: \mathcal{W}(x) \mapsto \lambda(x)\mathcal{W}(x)$, $x \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$, где $\lambda \in \widehat{\mathbb{D}}$, задает гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}_p$ в себя. Таким образом, определено представление $(\pi_\lambda, \mathcal{H})$ алгебры $\mathcal{A}_p$. Свойства построенных представлений перечислены в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ – неприводимое представление коммутационных соотношений, порождающее алгебру $\mathcal{A}_p$, $\lambda \in \widehat{\mathbb{D}}$ – характер группы $\mathbb{D}$, $(\pi_\lambda, \mathcal{H})$ – представление алгебры $\mathcal{A}_p$, задаваемое на образующих алгебры соотношением $\pi_\lambda(\mathcal{W}(z)) = \lambda(z)\mathcal{W}(z)$, $z \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$. Представление $(\pi_\lambda, \mathcal{H})$ обладает следующими свойствами:*

- 1) $(\pi_\lambda, \mathcal{H})$ неприводимо;

- 2) $\pi_\lambda \simeq \pi_{\lambda'}$ тогда и только тогда, когда $\lambda^{-1}\lambda'$ – непрерывный характер группы $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$;
- 3) $\pi_\lambda \simeq \pi_0$ тогда и только тогда, когда λ – непрерывный характер группы $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$;
- 4) если λ – разрывный характер, то $\pi_\lambda(K) = 0$ для любого $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 следует из леммы 4; утверждение 2 следует из леммы 5; утверждение 3 является прямым следствием утверждения 2; утверждение 4 вытекает из леммы 3 и утверждений 1 и 3. Теорема доказана.

Заметим, что алгебра $\mathcal{A}_p$ не является простой, так как в противном случае она совпадала бы с алгеброй компактных операторов и имела бы единственное с точностью до эквивалентности неприводимое представление. Остается выяснить, является ли алгебра $\mathcal{A}_p/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ простой. Изучение алгебры $\mathcal{A}_p/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ представляет значительный интерес, поскольку именно эта алгебра описывает различия алгебр $\mathcal{A}_p$ при различных p . Некоторые свойства алгебры $\mathcal{A}_p/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ отражены в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$ – неприводимое представление коммутационных соотношений, порождающее алгебру $\mathcal{A}_p$. Множество классов унитарно-эквивалентных неприводимых представлений алгебры $\mathcal{A}_p/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ в сепарабельном гильбертовом пространстве находится во взаимно однозначном соответствии с элементами фактор-группы $\widehat{\mathbb{D}}/\mathbb{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mathcal{W}', \mathcal{H}')$ – неприводимое представление коммутационных соотношений (не обязательно непрерывное). Можно показать [6], что существует такой характер λ группы $\mathbb{D}$, что представление $(\mathcal{W}'_\lambda, \mathcal{H}')$ слабо измеримо. Слабо измеримое представление локально-компактной группы в сепарабельном гильбертовом пространстве слабо непрерывно. Заметим, что для несепарабельного пространства это неверно [4]. Таким образом, всякое неприводимое представление алгебры $\mathcal{A}_p$ в сепарабельном гильбертовом пространстве имеет вид π_λ . Дальнейшие свойства следуют из теоремы 2.

При каждом p отображение $\mathbb{D}_p \rightarrow \widehat{\mathbb{D}}$ задает однопараметрическую подгруппу в $\widehat{\mathbb{D}}$ [4], причем p -адическая топология определяет способ вложения $\mathbb{D}_p$ в $\widehat{\mathbb{D}}$. Таким образом, теорема 3 задает соответствие между однопараметрическими подгруппами в $\widehat{\mathbb{D}}$ и неприводимыми представлениями, содержащими вакуумный вектор. Вышеуказанные однопараметрические подгруппы можно интерпретировать как “время”. В этих терминах p -адическому “времени” соответствует непрерывное в p -адической топологии представление коммутационных соотношений, содержащее вакуумный вектор.

Несложно построить пример циклического слабо измеримого представления алгебры $\mathcal{A}_p/\mathcal{K}(\mathcal{H})$, которое не является непрерывным (см. пример Тома в [4]). В качестве пространства представления выберем несепарабельное пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{D})$,

циклический вектор $\phi_0(0) = 1$ и $\phi_0(z) = 0$ в остальных точках. Искомое представление на образующих $\mathcal{W}(z)$, $z \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$, алгебры $\mathcal{A}_p$ зададим соотношением

$$[\pi(\mathcal{W}(z))\phi](s) = \chi_p(B(z, s))\phi(s - z).$$

Построенное представление слабо измеримо относительно меры Хаара на $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$, поскольку для любых $\phi, \psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{D})$ функция $z \mapsto (\mathcal{W}(z)\phi, \psi)$ отлична от нуля не более чем в счетном числе точек, при этом она не является непрерывной. Осталось показать, что построенное представление является представлением алгебры $\mathcal{A}_p/\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Действительно, это представление является Гельфанда–Найма–Сигала представлением для состояния ρ на алгебре $\mathcal{A}_p$, где ρ на образующих алгебры определяется соотношением $\rho(\mathcal{W}(z)) = 1$, если $z = 0$, и равно нулю в других точках. Легко убедиться [6], что ρ является состоянием типа следа на $\mathcal{A}_p$, следовательно $\rho(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = 0$, поскольку на алгебре компактных операторов нет ненулевых состояний типа следа. Следовательно, построенное представление определяет представление алгебры $\mathcal{A}_p/\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Благодарности. Автор выражает благодарность сотрудникам отдела математической физики Математического института им. В. А. Стеклова РАН за плодотворные обсуждения и внимание к его работе. Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1).

Список литературы

- [1] G. W. Mackey, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 311–326.
- [2] M. Rieffel, *Duke Math. J.*, **39** (1972), 745–752.
- [3] Дж. Мёрфи, *C*-алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.
- [4] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, Т. 1, 2, Наука, М., 1975.
- [5] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [6] J. Slawny, *Comm. Math. Phys.*, **24**:2 (1972), 151–170.

Поступила в редакцию 7.04.2008