Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Козырев, К ультраметрической теории турбулентности, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 3, 413–424

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:34:38

© 2008 г.

С. В. Козырев*

К УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Обсуждается связь ультраметрического анализа, теории всплесков и каскадных моделей турбулентности. Построены в явном виде решения нелинейного ультраметрического интегрального уравнения с квадратичной нелинейностью. Эти решения строятся при помощи рекуррентной иерархической процедуры, аналогичной используемой в каскадных моделях турбулентности.

Ключевые слова: ультраметрические всплески, ультраметрический анализ, каскадные модели турбулентности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблемы p -адического анализа и математической физики привлекают большое внимание [1]–[3]. В частности, изучаются p -адические псевдодифференциальные операторы (например, оператор Владимирова D^α) и псевдодифференциальные уравнения (аналоги уравнений математической физики). Были введены p -адические всплески и описана их связь со спектральным анализом p -адических псевдодифференциальных операторов [4]. Анализ псевдодифференциальных операторов и всплесков на общих (локально-компактных) ультраметрических пространствах был развит в работах [5]–[7]. Нелинейная теория p -адических обобщенных функций рассмотрена в [8], [9].

В настоящей работе мы строим семейство явных решений для следующего нелинейного интегро-дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \iint F(\sup(x, \xi, \eta)) v(\xi, t) (v(\eta, t) - v(x, t)) d\nu(\xi) d\nu(\eta) + \\ + \int G(\sup(x, \xi)) (v(x, t) - v(\xi, t)) d\nu(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где аргумент x принадлежит ультраметрическому пространству X , время t есть вещественный параметр. Для исследования этого уравнения будем использовать методы ультраметрического анализа всплесков (см. разделы 3 и 5).

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: kozyrev@mi.ras.ru

Покажем, что уравнение (1) имеет решения в виде произведения ультраметрического всплеска и экспоненты времени

$$v(x, t) = e^{\omega t} \psi_{I_J}(x),$$

и построим для него более общие решения. Мы строим единственное решение задачи Коши с начальным условием в пространстве $D_0(X)$ основных функций с нулевым средним при помощи рекуррентной иерархической процедуры. Процедуры такого вида связаны с каскадными моделями турбулентности. Учитывая вышесказанное, будем называть уравнение (1) квадратичным каскадным уравнением. Впервые ультраметрический (p -адический) анализ был применен к описанию каскадных моделей турбулентности в [10].

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 мы строим решения задачи Коши для квадратичного каскадного уравнения (1). В разделе 3 излагаются конструкции ультраметрического анализа. В разделе 4 доказывается ключевая лемма. В разделе 5 обсуждаются каскадные модели турбулентности.

2. КВАДРАТИЧНОЕ КАСКАДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим квадратичное каскадное уравнение (1). Комплекснозначные функции F и G в (1) на дереве шаров $\mathcal{T}(X)$ в (локально-компактном) ультраметрическом пространстве X с борелевской мерой ν должны удовлетворять условию сходимости

$$\sum_{J>I} |F(J)|(\nu(J) - \nu(J, I)) < \infty \quad (2)$$

(аналогично для G), где $\nu(J, I)$ есть мера максимального подшара в J , содержащего шар I . Второе слагаемое в левой части (1) есть интегральный оператор с квадратичной нелинейностью, а третье слагаемое содержит ультраметрический псевдодифференциальный оператор (см. раздел 3).

Имеет место следующая важная лемма.

ЛЕММА. Пусть ϕ и ψ – ультраметрические всплески, для которых J и I суть минимальные шары, содержащие носители всплесков ψ и ϕ соответственно. Пусть ядро интегрирования F в (1) удовлетворяет условию (2). Тогда интеграл

$$\mathcal{I}[\phi, \psi](x) = \iint F(\sup(x, \xi, \eta)) \phi(\xi) (\psi(\eta) - \psi(x)) d\nu(\xi) d\nu(\eta) \quad (3)$$

сходится и имеет вид

$$\mathcal{I}[\phi, \psi](x) = \psi(x) \phi(x) \Phi_{IJ},$$

где коэффициент Φ_{IJ} может быть не равен нулю только при $J < I$, т.е. когда шар J есть строгое подмножество шара I . В этом случае

$$\Phi_{IJ} = \nu^2(I, J)F(I) - \nu^2(J)F(J) - \sum_{L: J < L < I} (\nu^2(L) - \nu^2(L, J))F(L). \quad (4)$$

Доказательство этой леммы изложено в разделе 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если мы зададим в (3) порядок интегрирования следующим образом:

$$\int \left[\int F(\sup(x, \xi, \eta)) \phi(\xi) (\psi(\eta) - \psi(x)) d\nu(\xi) \right] d\nu(\eta),$$

то интеграл (3) будет сходиться для любых ϕ, ψ из $D_0(X)$ без наложения дополнительных условий (2).

ПРИМЕР 1. Согласно лемме можно построить частное решение уравнения (1) в виде

$$v(x, t) = e^{-\eta_I t} \psi(x),$$

где ψ есть всплеск (с носителем в шаре I) и η_I есть соответствующее собственное значение псевдодифференциального оператора в третьем слагаемом в (1):

$$\eta_I = G(I)\nu(I) + \sum_{J>I} G(J)(\nu(J) - \nu(J, I)).$$

Функция $v(x, t)$ будет решением уравнения (1), поскольку функция $\mathcal{I}[\psi, \psi](x)$, где ψ есть всплеск, тождественно равна нулю.

ПРИМЕР 2. Найдем решение уравнения (1) в виде

$$v(x, t) = v_1(t)\psi(x) + v_2(t)\phi(x),$$

где ψ и ϕ суть всплески с носителями в шарах J и I соответственно.

Если шары I и J не пересекаются или $I = J$, то $\mathcal{I}[\phi, \psi] = \mathcal{I}[\psi, \phi] = 0$, и соответствующее решение уравнения (1) принимает вид

$$v(x, t) = v_1(0)e^{-\eta_J t}\psi(x) + v_2(0)e^{-\eta_I t}\phi(x).$$

Пусть теперь шары I и J сравнимы и различны, например $J < I$. Тогда соответствующее решение уравнения (1) принимает вид

$$v(x, t) = v_1(0) \exp[-\eta_J t + \phi(x)\Phi_{IJ}v_2(0)\eta_I^{-1}(e^{-\eta_I t} - 1)]\psi(x) + v_2(0)e^{-\eta_I t}\phi(x).$$

Здесь Φ_{IJ} задается формулой (4) и мы предполагаем $\eta_I \neq 0$.

Мы построили нетривиальное решение нелинейного уравнения (1). Это решение содержит двойную экспоненту (экспоненту экспоненты) времени.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) при $v = v(x, t) \in D_0(X) \otimes C^1([0, \infty))$. Пространство $D_0(X) \otimes C^1([0, \infty))$ есть индуктивный предел пространств $D_0(\mathcal{S}) \otimes C^1([0, \infty))$. Это значит, что любая функция $v \in D_0(X) \otimes C^1([0, \infty))$ для любого t принадлежит некоторому пространству $D_0(\mathcal{S})$, где $\mathcal{S}$ не зависит от t , и $v(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t для любого x .

Будем говорить, что $v \in D_0(X) \otimes C^1([0, \infty))$ есть решение задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $v_0 \in D_0(X)$, если $v(x, 0) = v_0(x)$ и v удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$.

Следующая теорема описывает решения задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями в пространстве $D_0(X)$.

ТЕОРЕМА 1. *Задача Коши с начальным условием $v_0 \in D_0(X)$ для интегро-дифференциального уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), имеет единственное решение $v \in D_0(X) \otimes C^1([0, \infty))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая функция $v \in D_0(X) \otimes C^1([0, \infty))$ имеет вид конечной линейной комбинации всплесков

$$v(x, t) = \sum_{Ij} v_{Ij}(t) \psi_{Ij}(x),$$

где v_{Ij} лежат в $C^1([0, \infty))$, I принадлежит некоторому множеству $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{\min}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(X)$. Подставляя это равенство для $v(x, t)$ в (1), получаем

$$\sum_{Ij} \psi_{Ij}(x) \left[\frac{d}{dt} v_{Ij}(t) + \eta_I v_{Ij}(t) + v_{Ij}(t) \sum_{Jj': J > I} v_{Jj'}(t) \psi_{Jj'}(x) \Phi_{JI} \right] = 0.$$

Поскольку всплески линейно независимы и всплески большего масштаба постоянны на носителях всплесков меньшего масштаба, вышеприведенное уравнение эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} v_{Ij}(t) = -v_{Ij}(t) \left[\eta_I + \sum_{Jj': J > I} v_{Jj'}(t) \psi_{Jj'}(x) \Phi_{JI} \right], \quad (5)$$

где суммирование производится по возрастающей последовательности шаров, больших шара I . Эта система нелинейна (квадратична). Отметим, что, так как $x \in I$ и всплеск ψ_{Jj} для $J > I$ постоянен на I , коэффициент $\psi_{Jj'}(x)$ не зависит от выбора $x \in I$.

Опишем рекуррентную процедуру построения решения системы (5). Начальное условие для (1), как функция из $D_0(X)$, имеет разложение по всплескам

$$v(x, 0) = \sum_{Ij} v_{Ij}(0) \psi_{Ij}(x). \quad (6)$$

Выберем максимальный шар I , для которого начальное условие $v_{Ij}(0)$ не равно нулю (такой шар I может быть не единственным). Поскольку для максимального I соответствующее уравнение в системе (5) линейно, мы получаем соответствующее экспоненциальное решение $v_{Ij}(t)$ задачи Коши:

$$v_{Ij}(t) = v_{Ij}(0) e^{-\eta_I t}.$$

Подставляя полученное решение для максимальных подшаров при $I' < I$ в соответствующие уравнения (5), получим уравнения для $v_{I'j'}$. Эти уравнения линейны и зависят от вычисленной на предыдущем шаге функции $v_{Ij}(t)$.

Затем мы итерируем эту процедуру и получаем решения для всех пар (I, j) :

$$v_{Ij}(t) = v_{Ij}(0) \exp \left[-\eta_I t - \int_0^t \sum_{Jj': J > I} v_{Jj'}(\tau) \psi_{Jj'}(x) \Phi_{JI} d\tau \right]. \quad (7)$$

Легко видеть, что если $v_{Ij}(0) = 0$, то $v_{Ij}(t) = 0$. Следовательно, поскольку начальное условие есть конечная линейная комбинация (6) всплесков, описанная рекуррентная процедура дает все ненулевые функции $v_{Ij}(t)$ за конечное число шагов.

Единственность решения следует из следующего наблюдения: любое уравнение в (5) линейно как уравнение для $v_{Ij}(t)$ и зависит только от функций $v_{Jj'}(t)$, связанных с большими масштабами. Это завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формула (7) дает явное решение задачи Коши для уравнения (1). Следовательно, это уравнение является точно решаемым, и решения могут быть описаны при помощи рекуррентной иерархической процедуры.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если начальное условие v_0 для уравнения (1) принадлежит некоторому (конечномерному) пространству $D_0(\mathcal{S})$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(X)$, то для любого момента времени t решение $v(x, t)$ соответствующей задачи Коши для уравнения (1) будет также принадлежать $D_0(\mathcal{S})$. Это наблюдение является частным случаем отмеченного в работе [11] общего явления существования локализованных решений для некоторых интегральных уравнений в ультраметрическом анализе. Заметим, что имеет место не только локализация в пространстве, но и локализация на дереве $\mathcal{T}(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Уравнение (1) для функции v из $D_0(X) \otimes C^1([0, \infty))$ эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений (5). Система (5) является примером каскадной модели. Модели такого вида используются для описания турбулентности (см. [12] и раздел 5). Впервые связь нелинейных ультраметрических интегральных уравнений и каскадных моделей турбулентности была рассмотрена в [10].

Результаты настоящей работы показывают, что каскадные модели связаны с интегрируемыми нелинейными интегральными уравнениями и ультраметрическим анализом всплесков.

3. УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В настоящем разделе мы обсуждаем некоторые результаты ультраметрического анализа [5]–[7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ультраметрическое пространство* есть множество с ультраметрикой $d(x, y)$, где $d(x, y)$ – *расстояние* между x и y , т.е. функция двух переменных, удовлетворяющая свойствам положительности и невырожденности

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \implies x = y,$$

симметричности

$$d(x, y) = d(y, x)$$

и сильному неравенству треугольника

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z)) \quad \forall x, y, z.$$

Будем говорить, что ультраметрическое пространство X *регулярно*, если это пространство удовлетворяет следующим условиям:

- 1) множество всех шаров ненулевого диаметра в X конечно либо счетно;
- 2) для любой убывающей (бесконечной) последовательности шаров $\{I^{(k)}\}$, $I^{(k)} \supset I^{(k+1)}$, диаметры шаров стремятся к нулю;
- 3) любой шар ненулевого диаметра есть конечное объединение максимальных подшаров.

Ультраметрические пространства двойственны к направленным деревьям. Ниже мы частично описываем конструкцию двойственности.

Для регулярного ультраметрического пространства X рассмотрим множество $\mathcal{T}(X)$, содержащее все шары ненулевого диаметра в X , а также шары нулевого диаметра, являющиеся максимальными подшарами в шарах ненулевого диаметра. Такое множество имеет естественную структуру направленного дерева. Две вершины I и J в $\mathcal{T}(X)$ соединены ребром, если соответствующие шары упорядочены по вложению, например $I \supset J$ (т.е. один из шаров содержит другой), и не существует промежуточных шаров между I и J .

Частичный порядок в $\mathcal{T}(X)$ определяется вложением шаров. Такой частичный порядок есть направление. Напомним, что частично упорядоченное множество называется *направленным*, а частичный порядок – *направлением*, если для любой пары элементов существует единственная точная верхняя грань (супремум) относительно частичного порядка.

На направленном дереве $\mathcal{T}(X)$ имеется естественная возрастающая положительная функция, ставящая в соответствие вершине дерева диаметр соответствующего шара.

Пусть теперь мы имеем направленное дерево $\mathcal{T}$ с положительной возрастающей функцией F на этом дереве. Определим ультраметрику на множестве вершин дерева следующим образом: $d(I, J) = F(\sup(I, J))$, где $\sup(I, J)$ есть точная верхняя грань вершин I, J по отношению к направлению.

Затем возьмем пополнение множества вершин относительно введенной ультраметрики и удалим из этого пополнения все внутренние точки дерева¹⁾. Полученное множество есть ультраметрическое пространство, обозначаемое $X(\mathcal{T})$.

Ультраметрический псевдодифференциальный оператор определяется следующим образом. Рассмотрим σ -аддитивную борелевскую меру ν со счетным или конечным базисом на регулярном ультраметрическом пространстве X . Псевдодифференциальный оператор определяется формулой

$$Tf(x) = \int T(\sup(x, y))(f(x) - f(y)) d\nu(y),$$

где $T(I)$ – некоторая комплекснозначная функция на дереве $\mathcal{T}(X)$. Точная верхняя грань $\sup(x, y) = I$ точек $x, y \in X$ есть минимальный шар I в X , содержащий обе точки.

Построим базис в пространстве $L^2(X, \nu)$ комплекснозначных квадратично-интегрируемых по мере ν функций на регулярном ультраметрическом пространстве X .

¹⁾Вершина дерева называется *внутренней*, если она не принадлежит границе дерева.

Обозначим через $V(I)$ пространство функций на X , порождаемое характеристическими функциями максимальных подшаров в шаре I ненулевого диаметра. Соответственно обозначим через $V_0(I)$ подпространство коразмерности 1 в $V(I)$ функций с нулевым средним относительно меры ν . Пространства $V_0(I)$ для разных шаров I ортогональны. Пусть p_I — число максимальных подшаров в шаре I . Размерность $V_0(I)$ как евклидова пространства со скалярным произведением в $L^2(X, \nu)$ будет меньше или равна $p_I - 1$.

Введем в пространстве $V_0(I)$ некоторый ортонормированный базис $\{\psi_{Ij}\}$. Если меры всех максимальных подшаров в I положительны, индекс j принимает значения $1, 2, \dots, p_I - 1$. Следующая теорема показывает, как построить ортонормированный базис в пространстве $L^2(X, \nu)$ путем объединения базисов $\{\psi_{Ij}\}$ в пространствах $V_0(I)$ по всем неминимальным $I \in \mathcal{T}(X)$ (эквивалентно, по всем шарам I ненулевого диаметра).

ТЕОРЕМА 2. 1. Пусть мера $\nu(X)$ регулярного ультраметрического пространства X бесконечна. Тогда набор функций $\{\psi_{Ij}\}$, где I пробегает по всем неминимальным вершинам дерева $\mathcal{T}(X)$, есть ортонормированный базис в $L^2(X, \nu)$.

2. Пусть мера $\nu(X)$ регулярного ультраметрического пространства X конечна и равна $\nu(X) = A$. Тогда набор функций $\{\psi_{Ij}, A^{-1/2}\}$, где I пробегает по всем неминимальным вершинам дерева $\mathcal{T}(X)$, есть ортонормированный базис в $L^2(X, \nu)$.

Базис, введенный в теореме 2, называется базисом ультраметрических всплесков.

Следующая теорема показывает, что базис ультраметрических всплесков есть базис из собственных векторов для ультраметрических псевдодифференциальных операторов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для некоторого шара R следующий ряд сходится абсолютно:

$$\sum_{J>R} T(J)(\nu(J) - \nu(J, R)). \quad (8)$$

Тогда ультраметрический псевдодифференциальный оператор

$$Tf(x) = \int T(\sup(x, y))(f(x) - f(y)) d\nu(y)$$

имеет плотную область определения в $L^2(X, \nu)$ и ультраметрические всплески из теоремы 2 являются собственными функциями оператора T :

$$T\psi_{Ij}(x) = \lambda_I \psi_{Ij}(x) \quad (9)$$

с собственными значениями

$$\lambda_I = T(I)\nu(I) + \sum_{J>I} T(J)(\nu(J) - \nu(J, I)), \quad (10)$$

где (J, I) есть максимальный подшар в шаре J , содержащий шар I .

Функция f на ультраметрическом пространстве X называется *локально-постоянной*, если для любой точки $x \in X$ существует такое положительное число r , зависящее от x , что функция f постоянна на шаре с центром в x радиуса r :

$$f(x) = f(y) \quad \forall y: d(x, y) \leq r.$$

В частности, характеристическая функция χ_I шара I локально-постоянна.

Пространство основных функций $D(X)$ на ультраметрическом пространстве X определяется как пространство локально-постоянных функций с компактным носителем. Любая основная функция из $D(X)$ есть (конечная) линейная комбинация характеристических функций шаров.

Пространство $D(X)$ есть индуктивный предел конечномерных пространств $D(\mathcal{S})$, где $\mathcal{S}$ – регулярное поддерево в $\mathcal{T}(X)$, $D(\mathcal{S})$ – линейная оболочка характеристических функций шаров из $\mathcal{S}$. Здесь конечное поддерево $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(X)$ называется *регулярным*, если для любого возрастающего ребра IJ , $I, J \in \mathcal{S}$, $I < J$, поддерево $\mathcal{S}$ содержит все ребра KJ , $K < J$.

Пусть $V_0(\mathcal{S}) \subset D(\mathcal{S})$ – подпространство функций с нулевым средним в $D(\mathcal{S})$, $D_0(\mathcal{S})$ – факторпространство $V_0(\mathcal{S})/V_0^\perp(\mathcal{S})$ по подпространству $V_0^\perp(\mathcal{S}) \subset V_0(\mathcal{S})$ функций, отличных от нуля только на некоторых множествах нулевой меры ν . Пространство $D_0(\mathcal{S})$ можно отождествить с линейной оболочкой ультраметрических всплесков ψ_{Ij} , $I \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{\min}$, где $\mathcal{S}_{\min}$ – множество минимальных элементов в $\mathcal{S}$.

Пусть $D_0(X)$ – индуктивный предел конечномерных пространств $D_0(\mathcal{S})$; пространство $D_0(X)$ изоморфно линейной оболочке ультраметрических всплесков.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ

Рассмотрим интеграл (3) для случая, когда ϕ и ψ являются ультраметрическими всплесками. Условие (2) обеспечивает сходимость интеграла. Пусть I и J – минимальные шары, содержащие носители всплесков ϕ и ψ соответственно.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть шары J и I не пересекаются. Тогда интеграл по ξ равен нулю, так как ϕ есть функция с нулевым средним и ядро интегрирования F постоянно на шаре I .

2. Пусть шар I является строгим подшаром шара J . Тогда интеграл по ξ может быть ненулевым только для $x, \eta \in I$. В этом случае $\psi(\eta)$ и $\psi(x)$ взаимно уничтожаются и, следовательно, интеграл равен нулю.

3. Пусть $I = J$. Тогда интеграл по ξ может быть ненулевым только для $x, \eta \in I$ и, более того, для $\sup(x, \eta) < I$. В этом случае $\psi(\eta)$ и $\psi(x)$ взаимно уничтожаются, и интеграл обращается в нуль.

4. Пусть шар J есть строгий подшар шара I , тогда:

а) если $x \notin J$, то $\psi(x) = 0$ и ядро интегрирования постоянно на J , следовательно, интеграл по η равен нулю;

б) при $x \in J < I$ интеграл (3) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}[\phi, \psi](x) &= \int_{\xi \in I} \int_{\eta} F(\sup(x, \xi, \eta)) \phi(\xi) (\psi(\eta) - \psi(x)) d\nu(\eta) d\nu(\xi) = \\
 &= \int_{\xi \in I} \int_{\eta: \sup(x, \eta) < I} F(\sup(x, \xi, \eta)) \phi(\xi) (\psi(\eta) - \psi(x)) d\nu(\eta) d\nu(\xi) = \\
 &= \left[\int_{\xi: \sup(x, \xi) = I} + \int_{\xi: \sup(x, \xi) < I} \right] \int_{\eta: \sup(x, \eta) < I} F(\sup(x, \xi, \eta)) \phi(\xi) \times \\
 &\quad \times (\psi(\eta) - \psi(x)) d\nu(\eta) d\nu(\xi) = \\
 &= -\phi(x) \nu(I, J) F(I) \int_{\eta: \sup(x, \eta) < I} (\psi(\eta) - \psi(x)) d\nu(\eta) + \\
 &\quad + \phi(x) \left[\int_{\xi: \sup(x, \xi) \leq J} + \int_{\xi: J < \sup(x, \xi) < I} \right] \times \\
 &\quad \times \int_{\eta: \sup(x, \eta) < I} F(\sup(x, \xi, \eta)) (\psi(\eta) - \psi(x)) d\nu(\eta) d\nu(\xi) = \\
 &= \psi(x) \phi(x) \nu^2(I, J) F(I) + \\
 &\quad + \phi(x) \nu(J) \int_{\eta: J \leq \sup(x, \eta) < I} F(\sup(x, \eta)) (\psi(\eta) - \psi(x)) d\nu(\eta) - \\
 &\quad - \psi(x) \phi(x) \int_{\xi: J < \sup(x, \xi) < I} \int_{\eta: \sup(x, \eta) < I} F(\sup(x, \xi, \eta)) d\nu(\eta) d\nu(\xi) = \\
 &= \psi(x) \phi(x) \left[\nu^2(I, J) F(I) - \nu^2(J) F(J) - \right. \\
 &\quad - \nu(J) \sum_{L: J < L < I} F(L) (\nu(L) - \nu(L, J)) - \\
 &\quad - \sum_{L: J < L < I} (\nu(L) - \nu(L, J)) \left(F(L) \nu(J) + \right. \\
 &\quad \left. + F(\sup(L, K)) \sum_{K: J < K < I} (\nu(K) - \nu(K, J)) \right) \left. \right] = \\
 &= \psi(x) \phi(x) \left[\nu^2(I, J) F(I) - \nu^2(J) F(J) - \right. \\
 &\quad - 2\nu(J) \sum_{L: J < L < I} F(L) (\nu(L) - \nu(L, J)) - \\
 &\quad \left. - \sum_{L: J < L < I} (\nu(L) - \nu(L, J)) \sum_{K: J < K < I} (\nu(K) - \nu(K, J)) F(\sup(L, K)) \right];
 \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} & \sum_{L: J < L < I} (\nu(L) - \nu(L, J)) \sum_{K: J < K < I} (\nu(K) - \nu(K, J)) F(\sup(L, K)) = \\ & = \sum_{L: J < L < I} (\nu(L) - \nu(L, J))^2 F(L) + \\ & + 2 \sum_{L: J < L < I} (\nu(L) - \nu(L, J)) F(L) (\nu(L, J) - \nu(J)), \end{aligned}$$

мы получаем для интеграла (3)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[\phi, \psi](x) &= \psi(x)\phi(x) \left[\nu^2(I, J)F(I) - \nu^2(J)F(J) - \sum_{L: J < L < I} (\nu(L) - \nu(L, J))^2 F(L) - \right. \\ & \quad \left. - 2 \sum_{L: J < L < I} (\nu(L) - \nu(L, J)) F(L) \nu(L, J) \right] = \\ &= \psi(x)\phi(x) \left[\nu^2(I, J)F(I) - \nu^2(J)F(J) - \sum_{L: J < L < I} (\nu^2(L) - \nu^2(L, J)) F(L) \right]. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы.

5. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В настоящем разделе мы обсуждаем иерархические (или каскадные) модели турбулентности, рассмотренные в работе [12]. Такие модели являются примерами систем гидродинамического типа, обсуждение которых можно найти в [13]. Конструкция каскадных моделей выглядит следующим образом.

1. Строится *иерархический базис* в $L^2(\mathbb{R}^3)$, подобный базису всплесков. Иерархический базис строится с использованием сдвигов и растяжений некоторого конечного числа функций с нулевым средним.

2. Иерархический базис применяется к исследованию уравнения Навье–Стокса

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (11)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость, ρ – плотность, p – давление, μ – вязкость, $\mathbf{f}$ – внешняя сила. Это означает, что мы подставляем в уравнение (11) разложение скорости по иерархическому базису и исследуем полученную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения:

$$\frac{\partial v_N(t)}{\partial t} = \sum_{IJ} A_{NIJ} v_I(t) v_J(t) + \sum_K B_{NK} v_K(t) + C_N. \quad (12)$$

3. В полученной на предыдущем шаге системе обыкновенных дифференциальных уравнений большинство коэффициентов оказываются малыми, более того, коэффициенты будут убывать при увеличении расстояния от главной диагонали, т.е. A_{NIJ} убывает при $|N - I| \rightarrow \infty$ или $|N - J| \rightarrow \infty$, B_{NK} убывает при $|N - K| \rightarrow \infty$.

Определим каскадную систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующим образом: положим в (12) коэффициенты A_{NIJ} , B_{NK} , отвечающие достаточно большим $|N - I|$, $|N - J|$, $|N - K|$, равными нулю. Мы получаем систему уравнений со слагаемыми, отвечающими конечному числу главных диагоналей тензоров A_{NIJ} , B_{NK} . В частности, любое уравнение в полученной системе будет содержать конечное число членов. В этом смысле каскадная модель строится путем обрезания системы (12).

Получаемые таким образом каскадные системы дифференциальных уравнений изучались при помощи численного моделирования [12]. Было обнаружено, что поведение некоторых каскадных моделей хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Иерархическая структура каскадных моделей приспособлена для описания каскада Ричардсона и самоподобия турбулентных потоков. Индексы иерархического базиса в системе (12) отвечают вихрям с различными масштабами и пространственными расположениями. Тензор A_{NIJ} описывает взаимодействие вихрей, а тензор B_{NK} – диссипацию энергии из-за вязкости.

Обсудим связь каскадных моделей и ультраметрического анализа. Естественно предположить, что каскадная система обыкновенных дифференциальных уравнений эквивалентна в некотором смысле одному интегральному уравнению, содержащему интегрирование по ультраметрическому аргументу. Первый результат такого рода был получен в работе [10], где построено p -адическое интегральное уравнение, описывающее каскад Ричардсона.

В настоящей работе мы вводим подход, связанный с ультраметрическим анализом всплесков. Мы строим интегро-дифференциальное уравнение (1) со следующим свойством: система (5), полученная разложением $v(x, t)$ по базису ультраметрических всплесков, является примером каскадной системы дифференциальных уравнений. При таком подходе вихри отвечают ультраметрическим всплескам, которые, в свою очередь, находятся в соответствии с элементами иерархического базиса в вещественном пространстве. Второе (квадратичное) слагаемое в (1) описывает взаимодействие вихрей, третье слагаемое в (1) описывает диссипацию. Процедура обрезания, примененная при построении каскадной модели, при нашем подходе принимает вид приближения уравнения Навье–Стокса (11) в режиме развитой турбулентности каскадным уравнением (1). Приближение здесь понимается как замена системы (12) системой (5).

Фактически в настоящей работе мы описали при помощи ультраметрических методов простейшую каскадную модель. Мы обнаружили, что такая каскадная модель точно решается. Это показывает наличие связи между каскадными моделями и теорией интегрируемых нелинейных интегральных ультраметрических уравнений.

Благодарности. Автор благодарен Е. И. Зеленову, И. В. Воловичу, В. С. Владимирову, А. Ю. Хренникову и С. Альбеверио за плодотворные обсуждения и ценные замечания. Работа была частично поддержана грантами DFG (Project 436 RUS 113/809/0-1) и DFG (Project 436 RUS 113/951), РФФИ (гранты № 05-01-04002-ННИО-а, № 08-01-00727), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1) и Программой ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Список литературы

- [1] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [2] A. Khrennikov, *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [3] A. N. Kochubei, *Pseudo-Differential Equations and Stochastics over Non-Archimedean Fields*, Pure Appl. Math., **244**, Dekker, New York, 2001.
- [4] С. В. Козырев, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 149–158; [arXiv:math-ph/0012019](#).
- [5] С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:5 (2005), 133–148; [arXiv:math-ph/0412062](#).
- [6] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **19**:1 (2005), 61–76.
- [7] С. В. Козырев, *Матем. сб.*, **198**:1 (2007), 103–126; [arXiv:math-ph/0412082](#).
- [8] С. Альбеверио, А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:2 (2005), 3–44.
- [9] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, *Math. Nachr.*, **278**:1–2 (2005), 3–16.
- [10] S. Fischenko, E. Zelenov, “*p*-Adic models of turbulence”, *p-Adic Mathematical Physics*, AIP Conf. Proc., **286**, eds. A. Yu. Khrennikov, Z. Rakic, I. V. Volovich, AIP, New York, 2006, 174–191.
- [11] С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, *Докл. РАН*, **411**:3 (2006), 319–322.
- [12] П. Г. Фрик, *Турбулентность: модели и подходы*, Курс лекций. Ч. I, ПГТУ, Пермь, 1998; Ч. II, 1999.
- [13] Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов, *Системы гидродинамического типа и их применение*, Наука, М., 1981.

Поступила в редакцию 17.03.2008