Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Марчук, Модельные уравнения Дирака–Максвелла с псевдоунитарной симметрией, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 3, 425–435

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:48:03

© 2008 г.

Н. Г. Марчук*

МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА–МАКСВЕЛЛА С ПСЕВДОУНИТАРНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Вводится новая система уравнений, называемая модельной системой уравнений Дирака–Максвелла. Эта система уравнений воспроизводит основные свойства стандартной системы уравнений Дирака–Максвелла. В то же время модельная система уравнений имеет ряд отличий от стандартной системы уравнений, в частности она является тензорной и обладает новой симметрией по отношению к псевдоунитарной группе. Предложен также вариант модельной системы уравнений Дирака–Максвелла с локальной (калибровочной) псевдоунитарной симметрией. Показано, что любое спинорное решение стандартной системы уравнений Дирака–Максвелла может быть получено из соответствующего тензорного решения модельной системы уравнений Дирака–Максвелла.

Ключевые слова: уравнение Дирака, уравнения Максвелла, спиноры, псевдоунитарная симметрия, калибровочная симметрия, спиноризация.

В математической и теоретической физике уравнение Дирака [1]–[3] используется для описания частиц спина 1/2. Уравнения Максвелла описывают электромагнитное поле (фотоны). Система уравнений Дирака–Максвелла моделирует взаимодействие электрона с электромагнитным полем.

Зоммерфельд обнаружил ([4], с. 219–229), что возможны два подхода к доказательству ковариантности уравнения Дирака для электрона при лоренцевых заменах координат. В первом случае предполагается, что матрицы Дирака γ^μ преобразуются как компоненты вектора, а волновая функция электрона ψ не меняется. При этом все математические объекты, входящие в уравнение Дирака, являются тензорными полями (векторами, ковекторами, скалярами). Во втором случае предполагается, что γ -матрицы Дирака не меняются, а волновая функция электрона ψ преобразуется по спинорному представлению группы Лоренца, т.е. ψ является спинором Дирака.

Соответственно можно говорить о наличии двух представлений уравнения Дирака для электрона – тензорном и спинорном. Из рассуждений Зоммерфельда можно сделать вывод о том, что он не видит оснований считать одно представление правильным, а другое – ошибочным. Отметим, что Усачев [5] рассмотрел вопрос о спине частиц, описываемых уравнением Дирака в тензорном представлении. Он

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: nmarchuk@mi.ras.ru

показал, что это уравнение описывает частицы спина $1/2$, как и уравнение Дирака в спинорном представлении. В современной теоретической и математической физике спинорное представление уравнения Дирака является общепринятым.

Работы [6]–[22] посвящены разработке нового подхода к уравнению Дирака и к системам уравнений Дирака–Максвелла и Дирака–Янга–Миллса, основанного на использовании алгебры Клиффорда и тензорного представления уравнения Дирака.

В настоящей работе предложена и рассмотрена модельная система уравнений Дирака–Максвелла, построенная на основе матричной техники и тензорного представления уравнения Дирака для электрона. Показано, что, в отличие от ранее рассмотренных уравнений, эта система уравнений обладает новой глобальной симметрией по отношению к псевдоунитарной группе $SU(2, 2)$. Рассмотрен также вариант модельной системы уравнений Дирака–Максвелла с локальной (калибровочной) псевдоунитарной симметрией.

С помощью псевдоунитарной симметрии установлена связь между решениями модельной (тензорной) системы уравнений Дирака–Максвелла и решениями стандартной (спинорной) системы уравнений Дирака–Максвелла. А именно, показано, что любое спинорное решение стандартной системы уравнений Дирака–Максвелла может быть получено из соответствующего тензорного решения модельной системы уравнений Дирака–Максвелла.

Вопросы, связанные с физической интерпретацией модельных уравнений Дирака–Максвелла и их решений, в настоящей статье не обсуждаются. Автор надеется, что модельные уравнения Дирака–Максвелла найдут применение в электродинамике.

1. СТАНДАРТНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДИРАКА–МАКСВЕЛЛА

1.1. Пространство Минковского и тензорные поля. Пусть $\mathbb{R}^{1,3}$ – пространство Минковского¹⁾ с декартовыми координатами x^μ , где $\mu = 0, 1, 2, 3$. Индексы, соответствующие координатам, обозначаются малыми греческими буквами $\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots$, пробегаящими значения от 0 до 3. Метрика Минковского задается диагональной матрицей

$$\eta = \|\eta_{\mu\nu}\| = \|\eta^{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Линейная замена координат

$$x^\mu \rightarrow \acute{x}^\mu = p^\mu_\nu x^\nu \quad (1)$$

называется *лоренцевой* (преобразование Лоренца координат), если не зависящие от x вещественные величины p^μ_ν удовлетворяют соотношениям

$$p^\mu_\alpha p^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu}, \quad (2)$$

¹⁾Необходимые сведения из геометрии пространства Минковского и тензорного анализа содержатся, например, в [23].

которые можно записать в виде матричного равенства

$$P^T \eta P = \eta, \quad P = \|p_\nu^\mu\|$$

(P^T – транспонированная матрица), определяющего группу Лоренца $O(1, 3)$ и ее ортохронную подгруппу:

$$\begin{aligned} O(1, 3) &= \{P \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}) : P^T \eta P = \eta\}, \\ O_+(1, 3) &= \{P \in O(1, 3) : p_0^0 \geq 1\}; \end{aligned}$$

$\text{Mat}(4, \mathbb{R})$ и $\text{Mat}(4, \mathbb{C})$ – алгебры вещественных и комплексных матриц четвертого порядка.

Обозначим через T_s^r множество тензорных полей типа (r, s) и ранга $r + s$ в пространстве Минковского. Рассмотрим тензорное поле из T_s^r , которое в точке $x \in \mathbb{R}^{1,3}$ в заданных координатах x^μ имеет компоненты $u_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}$. При лоренцевой замене координат (1) компоненты тензорного поля преобразуются следующим образом:

$$u_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} \rightarrow u'_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} = p_{\beta_1}^{\mu_1} \dots p_{\beta_r}^{\mu_r} q_{\nu_1}^{\alpha_1} \dots q_{\nu_s}^{\alpha_s} u_{\alpha_1 \dots \alpha_s}^{\beta_1 \dots \beta_r},$$

где q_β^μ – элементы матрицы $Q = \eta P^T \eta$, обратной к матрице $P = \|p_\beta^\alpha\|$.

Наряду с выражением “ $u_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}$ – компоненты тензорного поля” допускается выражение “ $u_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}$ – тензорное поле”. Будем использовать эквивалентную запись: $u \in T_s^r$ и $u_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} \in T_s^r$.

Обозначим через $\text{Mat}(n, \mathbb{C})T_s^r$ множество тензорных полей типа (r, s) со значениями в алгебре матриц $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$ (речь идет о тензорном произведении тензорной алгебры на алгебру матриц).

Ниже предполагается, что все рассматриваемые зависящие от $x \in \mathbb{R}^{1,3}$ величины являются гладкими функциями от x (их гладкость достаточна для справедливости проводимых рассуждений).

1.2. Система уравнений Дирака–Максвелла. Пусть скорость света, постоянная Планка и заряд позитрона равны единице. Обозначим $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, $i = \sqrt{-1}$, m – вещественная константа (масса электрона); $a_\mu = a_\mu(x) \in T_1$, $f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x) \in T_2$ – вещественные ковариантные вектор и тензор второго ранга, описывающие потенциал и напряженность электромагнитного поля соответственно.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu (\partial_\mu \psi - ia_\mu \psi) - m\psi &= 0, \\ \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu &= f_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu f^{\mu\nu} &= -\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu \psi, \end{aligned} \tag{3}$$

в которой $\psi = \psi(x)$ – столбец из четырех комплекснозначных функций (спинор Дирака); $\gamma^\mu \in \text{Mat}(4, \mathbb{C})$ – четыре матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad \partial_\mu \gamma^\nu = 0, \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \tag{4}$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица четвертого порядка, $\dagger$ – операция эрмитова сопряжения матрицы. В частности, в качестве матриц γ^μ можно взять следующие матрицы [3]:

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5}$$

Предположим, что при лоренцевой замене координат (1) матрицы γ^μ не меняются, а столбец ψ преобразуется согласно правилу $\psi \rightarrow S\psi$, где матрица $S \in \text{Mat}(4, \mathbb{C})$ удовлетворяет равенствам

$$p_\nu^\mu \gamma^\nu = S^{-1} \gamma^\mu S.$$

В этом случае система уравнений (3) называется *системой уравнений Дирака–Максвелла*. Эта система уравнений ковариантна при ортохронных лоренцевых заменах координат [3].

Система уравнений (3) используется в электродинамике.

2. МОДЕЛЬНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДИРАКА–МАКСВЕЛЛА

Введем диагональную матрицу $\beta = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. Предположим, что β не меняется при лоренцевых заменах координат.

Определим операцию псевдоэрмитова сопряжения матриц $\ddagger: \text{Mat}(4, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C})$ формулой

$$B^\ddagger = \beta B^\dagger \beta,$$

тогда $B^{\ddagger\ddagger} = B$, $(BC)^\ddagger = C^\ddagger B^\ddagger$.

Введем группу Ли специальных псевдоунитарных матриц (нулевой сигнатуры) и ее алгебру Ли:

$$\begin{aligned}SU(2, 2) &= \{W \in \text{Mat}(4, \mathbb{C}): W^\ddagger = W^{-1}, \det W = 1\}, \\ su(2, 2) &= \{w \in \text{Mat}(4, \mathbb{C}): w^\ddagger = -w, \text{tr } w = 0\},\end{aligned}$$

где $\text{tr } w$ – след матрицы w . Множество тензорных полей типа (r, s) со значениями в этой алгебре Ли обозначим через $su(2, 2)T_s^r$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}ih^\mu(\partial_\mu \phi - ia_\mu \phi) - m\phi &= 0, \\ \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu &= f_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu f^{\mu\nu} &= -\phi^\dagger \beta h^\nu \phi, \\ \partial_\mu h^\nu &= 0, \\ h^\mu h^\nu + h^\nu h^\mu &= 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1},\end{aligned}\tag{6}$$

где $ih^\mu \in su(2, 2)T^1$, $a_\mu = a_\mu(x) \in T_1$, $f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x) \in T_2$, m – вещественная константа, $\phi = \phi(x)$ – столбец из четырех комплекснозначных функций. Предположим, что ϕ не меняется при лоренцевых заменах координат (т.е. ϕ является совокупностью четырех скалярных функций). В этой системе уравнений m , β , η известны, h^μ , ϕ , a_μ , $f_{\mu\nu}$ – неизвестные, которые надо найти из системы уравнений (6); координаты x^μ – независимые переменные, h^μ , ϕ , a_μ , $f_{\mu\nu}$ – зависимые переменные, m , β , η – постоянные.

Систему уравнений (6) будем называть *модельной системой уравнений Дирака–Максвелла*.

Имеются три отличия системы уравнений (3) от модельной системы уравнений (6). Во-первых, все объекты, входящие в модельную систему уравнений (6), являются тензорными полями (векторы, ковекторы, скаляры, тензоры второго ранга), в то же время в уравнения Дирака–Максвелла (3) входят также и объекты другого типа – спиноры Дирака ψ . Во-вторых, в модельные уравнения входит матрица β , которая, вообще говоря, не равна матрице h^0 . В-третьих, в модельных уравнениях (6) $ih^\mu \in su(2, 2)T^1$ рассматриваются как неизвестные матрицы, в то же время в уравнениях (3) матрицы γ^μ рассматриваются как известные.

Второе различие двух систем уравнений влечет важное различие в свойствах этих систем уравнений. А именно, модельная система уравнений обладает новой симметрией по отношению к псевдоунитарной группе.

ТЕОРЕМА 1. *Уравнения (6) являются ковариантными относительно следующего глобального преобразования переменных, осуществляемого с помощью произвольной псевдоунитарной матрицы $W \in SU(2, 2)$, $\partial_\mu W = 0$:*

$$\phi \rightarrow \hat{\phi} = W^{-1}\phi, \quad h^\mu \rightarrow \hat{h}^\mu = W^{-1}h^\mu W. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость теоремы доказывают следующие формулы:

$$\begin{aligned} i\hat{h}^\mu(\partial_\mu\hat{\phi} - ia_\mu\hat{\phi}) - m\hat{\phi} &= W^{-1}(ih^\mu(\partial_\mu\phi - ia_\mu\phi) - m\phi), \\ \hat{\phi}^\dagger\beta\hat{h}^\nu\hat{\phi} &= \phi^\dagger\beta h^\nu\phi, \\ \hat{h}^\mu\hat{h}^\nu + \hat{h}^\nu\hat{h}^\mu &= W^{-1}(h^\mu h^\nu + h^\nu h^\mu)W. \end{aligned} \quad (8)$$

Перечислим некоторые другие свойства системы уравнений (6).

1. Система уравнений (6) является тензорной, поэтому она ковариантна относительно замены координат из группы Лоренца $O(1, 3)$.

2. Компоненты пяти контравариантных кососимметрических тензоров (квадратными скобками обозначена операция альтернирования)

$$j^{\mu_1 \dots \mu_k} = j^{\mu_1 \dots \mu_k}(x) = i^{k(k-1)/2} \phi^\dagger \beta h^{[\mu_1} \dots h^{\mu_k]} \phi \in T^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

являются вещественными.

3. Вещественный вектор

$$j^\mu = j^\mu(x) = \phi^\dagger \beta h^\mu \phi \quad (9)$$

удовлетворяет закону сохранения $\partial_\mu j^\mu = 0$ и его нулевая компонента положительна $j^0 > 0$ (при $\phi \neq 0$). Поэтому использование модельных уравнений не противоречит вероятностной интерпретации квантовой механики.

4. Уравнения (6) являются ковариантными относительно следующего локального (калибровочного) преобразования из унитарной группы $U(1)$, задаваемого вещественной скалярной функцией $\lambda = \lambda(x)$:

$$\phi \rightarrow e^{i\lambda} \phi, \quad a_\mu \rightarrow a_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad f_{\mu\nu} \rightarrow f_{\mu\nu}, \quad h^\mu \rightarrow h^\mu.$$

Ковариантные преобразования, указанные в теореме 1 и в пп. 1, 4, являются симметриями модельной системы уравнений Дирака–Максвелла.

3. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА–МАКСВЕЛЛА С КАЛИБРОВОЧНОЙ ПСЕВДОУНИТАРНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} ih^\mu (\partial_\mu \phi - ia_\mu \phi - C_\mu \phi) - m\phi &= 0, \\ \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu &= f_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu f^{\mu\nu} &= -\phi^\dagger \beta h^\nu \phi, \\ \partial_\mu h^\nu - [C_\mu, h^\nu] &= 0, \\ h^\mu h^\nu + h^\nu h^\mu &= 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $ih^\mu = ih^\mu(x) \in su(2,2)T^1$, $C_\mu = C_\mu(x) \in su(2,2)T_1$, $a_\mu = a_\mu(x) \in T_1$, $f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x) \in T_2$, $\phi = \phi(x)$ – столбец из четырех скалярных комплекснозначных функций. В системе уравнений (10) вещественная константа m и матрицы β , η известны, h^μ , ϕ , C_μ , a_μ , $f_{\mu\nu}$ – неизвестные, x^μ – независимые переменные, h^μ , ϕ , C_μ , a_μ , $f_{\mu\nu}$ – зависимые переменные, m , β , η – постоянные.

ТЕОРЕМА 2. Уравнения (10) являются ковариантными относительно следующего локального (калибровочного) преобразования переменных, осуществляемого с помощью произвольной псевдоунитарной матрицы $W = W(x) \in SU(2,2)$:

$$\phi \rightarrow \hat{\phi} = W^{-1} \phi, \quad h^\mu \rightarrow \hat{h}^\mu = W^{-1} h^\mu W, \quad C_\mu \rightarrow \hat{C}_\mu = W^{-1} C_\mu W - W^{-1} \partial_\mu W.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость теоремы доказывают следующие формулы:

$$\begin{aligned} i\hat{h}^\mu (\partial_\mu \hat{\phi} - ia_\mu \hat{\phi} - \hat{C}_\mu \hat{\phi}) - m\hat{\phi} &= W^{-1} (ih^\mu (\partial_\mu \phi - ia_\mu \phi - C_\mu \phi) - m\phi), \\ \hat{\phi}^\dagger \beta \hat{h}^\nu \hat{\phi} &= \phi^\dagger \beta h^\nu \phi, \\ \partial_\mu \hat{h}^\nu - [\hat{C}_\mu, \hat{h}^\nu] &= W^{-1} (\partial_\mu h^\nu - [C_\mu, h^\nu]) W, \\ \hat{h}^\mu \hat{h}^\nu + \hat{h}^\nu \hat{h}^\mu &= W^{-1} (h^\mu h^\nu + h^\nu h^\mu) W. \end{aligned} \tag{11}$$

Четыре свойства, сформулированные в разделе 2 для системы уравнений (6), справедливы также и для системы уравнений (10).

Среди решений системы уравнений (10) можно рассматривать такие решения, что $\partial_\mu h^\nu = 0$, $C_\mu = 0$. Эти решения удовлетворяют модельной системе уравнений (6).

4. ФОРМУЛЫ ДЛЯ МАТРИЦ C_μ

Покажем, что соотношения

$$h^\mu h^\nu + h^\nu h^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad \partial_\mu h^\nu - [C_\mu, h^\nu] = 0$$

позволяют найти формулу, выражающую $C_\mu \in su(2, 2)T_1$ через $ih^\mu \in su(2, 2)T^1$.

4.1. Тетрада. Четверка вещественных векторов $y_a^\mu \in T^1$, занумерованных латинским (тетрадным) индексом $a = 0, 1, 2, 3$ и удовлетворяющих соотношениям

$$y_a^\mu y_b^\nu \eta^{ab} = \eta^{\mu\nu},$$

называется *тетрадой*.

Из одной тетрады y_a^μ можно получить другую тетраду с помощью преобразования Лоренца по тетрадному индексу:

$$y_a^\mu \rightarrow \hat{y}_a^\mu = q_a^b y_b^\mu, \quad (12)$$

где $Q = \|q_a^b\| \in O(1, 3)$. Легко убедиться, что

$$\hat{y}_a^\mu \hat{y}_b^\nu \eta^{ab} = \eta^{\mu\nu},$$

т.е. четверка векторов $\hat{y}_a^\mu$ тоже является тетрадой.

В дальнейшем будем считать тетраду y_a^μ известной и не зависящей от x .

4.2. Матрицы e^a . С помощью тетрады и вектора $ih^\mu \in su(2, 2)T^1$ определим матрицы

$$e^a = y_\mu^a h^\mu, \quad a = 0, 1, 2, 3,$$

где $y_\mu^a = \eta_{\mu\nu} \eta^{ab} y_b^\nu$. Матрицы e^a удовлетворяют соотношениям

$$e^a e^b + e^b e^a = \eta^{ab} \mathbf{1}, \quad (e^a)^\dagger = e^a, \quad \text{tr } e^a = 0,$$

поэтому $ie^a \in su(2, 2)$.

Шестнадцать матриц с упорядоченными индексами $a < b < \dots$

$$\mathbf{1}, e^a, e^a e^b, e^a e^b e^c, e^0 e^1 e^2 e^3 \quad (13)$$

линейно независимы и образуют базис в алгебре матриц $\text{Mat}(4, \mathbb{C})$. Определим операцию эрмитава скалярного произведения в алгебре матриц $\text{Mat}(4, \mathbb{C})$:

$$(A, B) = \frac{1}{4} \text{tr}(e^0 A^\dagger e^0 B).$$

Базис (13) является ортонормированным по отношению к этому скалярному произведению [24].

Возьмем разложение произвольной матрицы $B \in \text{Mat}(4, \mathbb{C})$ по базису (13):

$$B = b\mathbf{1} + \sum_{k=1}^4 \sum_{a_1 < \dots < a_k} b_{a_1 \dots a_k} e^{a_1} \dots e^{a_k},$$

где

$$b = \frac{1}{4} \operatorname{tr} B, \quad b_{a_1 \dots a_k} = \frac{1}{4} \operatorname{tr}(e_{a_k} \dots e_{a_1} B) = (e^{a_1} \dots e^{a_k}, B).$$

Пусть π_k , $k = 0, 1, 2, 3, 4$, – операторы проектирования пространства матриц $\operatorname{Mat}(4, \mathbb{C})$ на подпространства, натянутые на базисные матрицы $e^{a_1} \dots e^{a_k}$, $a_1 < \dots < a_k$. Имеем

$$\pi_0(B) = b\mathbf{1}, \quad \pi_k(B) = \sum_{a_1 < \dots < a_k} b_{a_1 \dots a_k} e^{a_1} \dots e^{a_k}.$$

Применяя теорему 5 из работы [24] к уравнениям $\partial_\mu h^\nu - [C_\mu, h^\nu] = 0$, получаем

$$\begin{aligned} C_\mu = & \frac{1}{6} \pi_1((\partial_\mu h^\nu) h_\nu) + \frac{1}{4} \pi_2((\partial_\mu h^\nu) h_\nu) + \\ & + \frac{1}{2} \pi_3((\partial_\mu h^\nu) h_\nu) + \frac{1}{8} \pi_4((\partial_\mu h^\nu) h_\nu). \end{aligned} \quad (14)$$

Эту формулу (в символическом виде ее удобнее записывать в виде $C_\mu = C_\mu(h)$) можно подставить в уравнения (10) и тем самым исключить C_μ из числа неизвестных системы уравнений (10).

Можно проверить, что формула (14) является калибровочно-инвариантной по отношению к преобразованию

$$h^\mu \rightarrow \hat{h}^\mu = W^{-1} h^\mu W, \quad C_\mu \rightarrow \hat{C}_\mu = W^{-1} C_\mu W - W^{-1} \partial_\mu W$$

при $W = W(x) \in SU(2, 2)$. Отметим, что формула (14) не зависит от выбора тетрады.

5. СПИНОРИЗАЦИЯ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Спиноризация – это процедура, с помощью которой можно получать спинорные решения уравнения Дирака (системы уравнений Дирака–Максвелла) из тензорных решений модельного уравнения Дирака (модельной системы уравнений Дирака–Максвелла). В основе спиноризации лежит использование псевдоунитарной симметрии модельных уравнений Дирака–Максвелла²⁾. Спиноризация состоит из двух шагов. На первом шаге фиксируется произвольная декартова система координат³⁾. С помощью соответствующего псевдоунитарного преобразования модельные уравнения Дирака–Максвелла в этой системе координат приводятся к виду, который тождественно совпадает с видом стандартных (спинорных) уравнений Дирака–Максвелла. На втором шаге рассматривается преобразование тензорного решения модельной системы уравнений Дирака–Максвелла при ортохронном преобразовании Лоренца координат. Показывается, что если в дополнение к этому преобразованию Лоренца координат добавить соответствующее псевдоунитарное преобразование, то в результате получается в точности спинорный закон преобразования

²⁾Сделаем следующее предположение, характеризующее псевдоунитарную симметрию модельной системы уравнений: если одно решение модельной системы уравнений (6) описывает некоторую физическую ситуацию, то другое решение системы уравнений (6), получающееся из первого с помощью псевдоунитарного преобразования (7), описывает ту же самую физическую ситуацию.

³⁾В специальной теории относительности говорят об инерциальных системах отсчета.

для волновой функции ϕ . Таким образом, любое спинорное решение стандартного уравнения Дирака может быть получено из соответствующего тензорного решения модельного уравнения Дирака.

Зафиксируем произвольную декартову систему координат пространства Минковского. Покажем, что в этой системе координат модельная система уравнений (6) имеет подкласс решений, удовлетворяющих стандартной системе уравнений Дирака–Максвелла (3).

Зададим в системе уравнений (3) матрицы γ^μ вида (5). В этом случае

$$\gamma^0 = \beta, \quad i\gamma^\mu \in su(2, 2), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Теперь рассмотрим модельную систему уравнений (6). Имеем $ih^\mu \in su(2, 2)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, и два набора матриц γ^μ , h^μ , удовлетворяющих соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad h^\mu h^\nu + h^\nu h^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Согласно теореме Паули (см., например, [25]) существует обратимая матрица $T \in \text{Mat}(4, \mathbb{C})$ такая, что

$$h^\mu = T^{-1} \gamma^\mu T, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (15)$$

Из условий $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^\mu$, $(h^\mu)^\dagger = h^\mu$ получаем

$$(T^{-1} \gamma^\mu T)^\dagger = T^\dagger \gamma^\mu (T^{-1})^\dagger = T^{-1} \gamma^\mu T.$$

Умножим левую часть равенства на T , правую на $T^\dagger$ и воспользуемся свойством $(T^{-1})^\dagger = (T^\dagger)^{-1}$. Имеем

$$TT^\dagger \gamma^\mu = \gamma^\mu TT^\dagger, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

т.е. матрица $TT^\dagger$ коммутирует со всеми матрицами γ^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, и, следовательно,

$$TT^\dagger = \lambda \mathbf{1},$$

где λ – произвольное ненулевое комплексное число. Из формулы (15) видно, что матрица T определена с точностью до умножения на ненулевую комплексную постоянную. Поэтому можно взять такое T , что $TT^\dagger = \mathbf{1}$ и $\det T = 1$, т.е. $T \in SU(2, 2)$.

Теперь мы можем сделать замену переменных (7) с матрицей $W = T^{-1}$ и получить систему уравнений (6) с $h^\mu = \hat{h}^\mu = \gamma^\mu$ и $h^0 = \hat{h}^0 = \beta$. Эта система уравнений (в ней h^μ определены условием $h^\mu = \gamma^\mu$ и, следовательно, исключены из числа неизвестных) в заданной фиксированной системе координат x^μ тождественно совпадает со стандартной системой уравнений Дирака–Максвелла (3). Соответственно в этой системе координат каждое решение одной системы уравнений будет решением и другой системы уравнений.

Возьмем тождественно совпадающие решения систем уравнений (3) и (6) в фиксированной системе координат x^μ :

$$h^\mu = \gamma^\mu, \quad h^0 = \gamma^0 = \beta, \quad \phi = \phi(x) \equiv \psi = \psi(x), \quad a_\mu = a_\mu(x), \quad f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x).$$

Напомним, что величины $\{\phi, h^\mu, \beta\}$ и величины $\{\psi, \gamma^\mu, \gamma^0\}$ являются разными математическими объектами и разница между ними проявляется при переходе от одной системы координат к другой с помощью преобразования Лоренца. Покажем, как с использованием псевдоунитарной симметрии установить связь между тензорными решениями уравнений (6) и спинорными решениями уравнений (3) в любой системе координат, получающейся из исходной с помощью ортохронного преобразования Лоренца.

Рассмотрим ортохронное преобразование Лоренца координат

$$x^\mu \rightarrow \dot{x}^\mu = p_\nu^\mu x^\nu, \quad P = \|p_\nu^\mu\| \in O_+(1, 3).$$

Для него существует обратимая матрица⁴⁾ $S \in \text{Pin}_+(1, 3)$ (пара матриц $\pm S$) такая, что

$$S^{-1} \gamma^\mu S = p_\nu^\mu \gamma^\nu. \quad (16)$$

Входящие в уравнения (3) и (6) величины преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &\rightarrow \dot{\gamma}^\mu = \gamma^\mu, & \psi &\rightarrow \dot{\psi} = S\psi, \\ h^\mu &\rightarrow \dot{h}^\mu = p_\nu^\mu h^\nu = S^{-1} h^\mu S, & \phi &\rightarrow \dot{\phi} = \phi, \\ \beta &\rightarrow \dot{\beta} = \beta, & \partial_\mu &\rightarrow \dot{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} = q_\mu^\nu \partial_\nu, \\ a_\mu &\rightarrow \dot{a}_\mu = q_\mu^\nu a_\nu, & f_{\mu\nu} &\rightarrow \dot{f}_{\mu\nu} = q_\mu^\alpha q_\nu^\beta f_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

где $Q = \|q_\mu^\nu\| = P^{-1} \in O_+(1, 3)$. Теперь сделаем замену переменных $\dot{\phi}, \dot{h}^\mu$ (7)

$$\dot{\phi} \rightarrow \hat{\phi} = W^{-1} \dot{\phi}, \quad \dot{h}^\mu \rightarrow \hat{h}^\mu = W^{-1} \dot{h}^\mu W$$

с матрицей $W \in SU(2, 2)$, $\partial_\mu W = 0$. В монографии [27] показано, что группа $\text{Pin}_+(1, 3)$ является подгруппой псевдоунитарной группы $SU(2, 2)$. Поэтому можно взять $W = S^{-1}$, где S определено соотношением (16). В этом случае, сравнивая $\hat{\phi}$, $\hat{h}^\mu$ с $\dot{\psi}$, $\dot{\gamma}^\mu$ в системе координат $\dot{x}^\mu$, получаем

$$\hat{\phi} = \dot{\psi}, \quad \hat{h}^\mu = \dot{\gamma}^\mu.$$

Таким образом, при ортохронном преобразовании Лоренца координат преобразование переменных стандартной системы уравнений Дирака–Максвелла (3)

$$\psi \rightarrow \dot{\psi} = S\psi, \quad \gamma^\mu \rightarrow \dot{\gamma}^\mu = \gamma^\mu$$

эквивалентно суперпозиции двух синхронизованных ($W = S^{-1}$) преобразований переменных системы уравнений (6)

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \dot{\phi} = \phi, & \dot{\phi} &\rightarrow \hat{\phi} = W^{-1} \dot{\phi} = S\phi, \\ h^\mu &\rightarrow \dot{h}^\mu = S^{-1} h^\mu S, & \dot{h}^\mu &\rightarrow \hat{h}^\mu = W^{-1} \dot{h}^\mu W = h^\mu. \end{aligned}$$

Следовательно, тензорные решения системы уравнений (6) порождают спинорные решения системы уравнений (3) в любой системе координат, полученной из исходной системы координат ортохронным преобразованием Лоренца.

⁴⁾Напомним, что пинорные группы $\text{Pin}(1, 3)$, $\text{Pin}_+(1, 3)$ дважды накрывают псевдоортогональные группы $O(1, 3)$, $O_+(1, 3)$ [26].

Благодарности. Автор благодарен И. Я. Арефьевой, В. С. Владимирову, И. В. Воловичу, В. Г. Кадышевскому, М. О. Катанаеву и В. П. Маслову за плодотворные обсуждения результатов. Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1).

Список литературы

- [1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **117**:778 (1928), 610–624; П. А. М. Дирак, “Квантовая теория электрона, I”, *К созданию квантовой теории поля*, Основные статьи 1925–1958 гг., Библиотека теоретической физики, **7**, Наука, М., 1990, 113–128.
- [2] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **118** (1928), 351–361; П. А. М. Дирак, “Квантовая теория электрона, II”, *К созданию квантовой теории поля*, Основные статьи 1925–1958 гг., Библиотека теоретической физики, **7**, Наука, 1990, 129–141.
- [3] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1973.
- [4] А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, Т. II, Техничко-Теорет. лит., М., 1956.
- [5] У. Д. Усачев, *ЖЭТФ*, **41**:2(8) (1961), 400–409.
- [6] Н. Г. Марчук, *Докл. РАН*, **354**:5 (1997), 604–606.
- [7] N. G. Marchuk, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, **8**:1 (1998), 181–225.
- [8] N. G. Marchuk, *Nuovo Cimento B*, **113**:10 (1998), 1287–1296.
- [9] N. G. Marchuk, *Nuovo Cimento B*, **115**:11 (2000), 1267–1301.
- [10] N. G. Marchuk, “The Dirac type tensor equation in Riemannian space”, *Clifford Analysis and its Applications*, NATO Sci. Ser. II, Math. Phys. Chem., **25**, eds. F. Brackx et al., Kluwer, Dordrecht, 2001, 223–230.
- [11] N. G. Marchuk, *Nuovo Cimento B*, **116**:11 (2001), 1225–1248.
- [12] N. G. Marchuk, *Nuovo Cimento B*, **117**:5 (2002), 511–520.
- [13] N. G. Marchuk, *Nuovo Cimento B*, **117**:1 (2002), 95–119.
- [14] N. G. Marchuk, *Nuovo Cimento B*, **117**:5 (2002), 613–614.
- [15] N. G. Marchuk, *Nuovo Cimento B*, **117**:7 (2002), 789–796.
- [16] N. G. Marchuk, *Nuovo Cimento B*, **117**:12 (2002), 1357–1388.
- [17] N. G. Marchuk, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:3 (2006), 299–314.
- [18] N. G. Marchuk, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:4 (2006), 397–413.
- [19] Н. Г. Марчук, *Докл. РАН*, **392**:3 (2003), 318–321.
- [20] N. G. Marchuk, *New forms of Dirac equation*, Preprint IMSc/93/7, Madras, 1993.
- [21] N. G. Marchuk, *A new representation of the Dirac equation using even and odd gamma-matrices*, Preprint CTS of IISc/94/1, Bangalore, 1994.
- [22] N. G. Marchuk, *The tensor Dirac equation in Riemannian space*, [arXiv: math-ph/0010045](https://arxiv.org/abs/math-ph/0010045).
- [23] С. П. Новиков, И. А. Тайманов, *Современные геометрические структуры и поля*, МЦНМО, М., 2005.
- [24] N. G. Marchuk, D. S. Shirokov, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, **18**:2 (2008), 237–254; [arXiv: 0705.1641v1](https://arxiv.org/abs/0705.1641v1).
- [25] В. А. Желнорович, *Теория спиноров и ее применения*, Август-Принт, М., 2001.
- [26] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **239**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [27] J. Snugg, *Clifford Algebra*, Oxford Univ. Press, New York, 1997.