Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Михайлов, Достаточное условие существования предельных значений на границе у решений эллиптического уравнения, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 3, 436–449

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6291>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:40:19

© 2008 г.

В. П. Михайлов*

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ У РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Установлено достаточное условие существования предельного значения на границе области у решения эллиптического уравнения.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, граница области, предельное значение на границе.

Настоящая работа примыкает к работе автора [1].

В полосе $\Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 < y < 1\}$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается уравнение

$$\mathfrak{P}(\Delta)u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Pi, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, а $\mathfrak{P}(z)$ – многочлен степени $m \geq 1$ с постоянными комплексными коэффициентами. Пусть $z_1, \dots, z_k$ – попарно различные корни этого многочлена, $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$, а $m_1, \dots, m_k$ – соответствующие кратности, $m_1 + \dots + m_k = m$, тогда

$$\mathfrak{P}(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_k)^{m_k}.$$

Уравнение (1) является эллиптическим уравнением порядка $2m$, у которого главной частью оператора $\mathfrak{P}(\Delta)$ является m -гармонический оператор Δ^m .

Решения уравнения (1), о которых будет идти речь в работе, будем считать принадлежащими при любом $a \in (0, 1)$ пространству $W_2^{2m}(\Pi_a)$, где $\Pi_a = \{x \in \mathbb{R}^n, a < y < 1\}$. Решение $u(x, y)$ называется L_2 -ограниченным, если

$$\sup_{0 < y < 1} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty;$$

решение $u(x, y)$ называется *имеющим L_2 -предел* на границе $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n, y = 0\}$ полосы Π , если существует функция $u_0(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\|u(\cdot, y) - u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow +0.$$

Целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: vpmih@mi.ras.ru

ТЕОРЕМА. Для того чтобы решение $u(x, y)$ уравнения (1) имело L_2 -предел на границе Γ_0 , достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_{\Pi} |\nabla u|^2 y \, dx \, dy < \infty \quad (2)$$

(здесь $\nabla u = (\nabla_x u, u_y) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_y)$).

В работе [1] показано (см. лемму 3 этой работы), что любое из интересующих нас решений $u(x, y)$ представимо в виде

$$u(x, y) = U(x, y) + \sum_{i=1}^m u_i(x, y), \quad (x, y) \in \Pi, \quad (3)$$

где $U(x, y)$ и $u_i(x, y)$, $i = 1, \dots, m$, также являются решениями в полосе Π уравнения (1), причем функция $U(x, y) \in W_{2^m}^{2m}(\Pi)$ и тем самым имеет интересующий нас предел на Γ_0 ; функции $u_i(x, y)$, $i = 1, \dots, m$, при любом a принадлежат пространству $W_2^{2m}(\Pi_a)$, и их преобразования Фурье по переменным $x \in \mathbb{R}^n$ при произвольно фиксированном $y \in (0, 1)$,

$$\tilde{u}_i(\xi, y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} u_i(x, y) \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

имеют вид (см. лемму 2 работы [1])

$$\tilde{u}_i(\xi, y) = A_i(\xi)(1 - \chi_R(\xi))w_i(\xi, y), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad y \in (0, 1), \quad (4)$$

в котором функция $A_i(\xi) \in L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\chi_R(\xi)$ – характеристическая функция шара $\{|\xi| < R\}$, где $R > \sqrt{\max_{1 \leq i \leq m} |z_i| + 1}$.

Система функций $\{w_s(x, y), s = 1, \dots, m\}$ при каждом $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| > R$, как система функций переменной $y \in (0, 1)$ представляет собой специальную фундаментальную систему решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$\prod_{j=1}^k \left(\frac{d}{dy} + \lambda_j(\xi) \right)^{m_j} w(\xi, y) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad y \in [0, 1], \quad (5)$$

в котором

$$\lambda_j(\xi) = \lambda_j = \sqrt{|\xi|^2 + z_j}, \quad j = 1, \dots, k, \quad |\xi| > R,$$

причем под $\sqrt{z + z_j}$ понимается та ветвь функции $\sqrt{z + z_j}$ на комплексной z -плоскости, разрезанной вдоль луча $z = -z_j + t$, $-\infty < t \leq 0$, для которой $(\sqrt{z + z_j} - \sqrt{z})|_{\text{Im } z=0} \rightarrow 0$ при $\text{Re } z \rightarrow +\infty$, где $\sqrt{z}|_{\text{Im } z=0, \text{Re } z>0}$ есть положительное значение $\sqrt{\text{Re } z}$.

Функции $w_s(x, y) \in C^{(0, m)}(|\xi| > R, 0 \leq y \leq 1)$, $s = 1, \dots, m$, удовлетворяют уравнению (5) и следующим начальным условиям: при $s = 1$

$$w_1(x, y)|_{y=0} = 1,$$

а при $s > 1$

$$w_s(\xi, y)|_{y=0} = \dots = \frac{\partial^{s-2} w_s(\xi, y)}{\partial y^{s-2}} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^{s-1} w_s(\xi, y)}{\partial y^{s-1}} \Big|_{y=0} = 1.$$

Для любого целого s , принадлежащего сегменту $[1, m]$, определим число $\kappa = \kappa(s)$, $1 \leq \kappa \leq k$, как номер того полуинтервала из $(0, m_1]$, $(m_1, m_1 + m_2]$, $\dots$, $(m_1 + \dots + m_{k-1}, m]$ (напомним, что $m = m_1 + \dots + m_k$), в котором содержится s . Тогда (см. работу [1])

$$w_s(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=|\xi|+R} \frac{e^{zy} dz}{(z + \lambda_1)^{m_1} \dots (z + \lambda_{\kappa-1})^{m_{\kappa-1}} (z + \lambda_{\kappa})^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}}, \quad (6)$$

$$1 \leq s \leq m, \quad \kappa = \kappa(s) \in [1, k], \quad |\xi| > R, \quad y \in [0, 1]$$

(при любом $p = 1, \dots, k$ имеет место неравенство $|\lambda_p| \leq \sqrt{|\xi|^2 + |z_p|} \leq |\xi| + \sqrt{|z_p|} < |\xi| + R$, поэтому все полюсы функции, стоящей под знаком интеграла в (6), находятся в круге $\{|z| < |\xi| + R\}$).

Поскольку, как уже отмечалось выше, главным оператором в дифференциальном уравнении (1) является полигармонический оператор Δ^m , естественно, что при больших значениях $|\xi|$ функция $w_s(\xi, y)$ будет достаточно близка к соответствующей функции фундаментальной системы, построенной для оператора Δ^m , т.е. к функции $e^{-y|\xi|} y^{s-1} / (s-1)!$, а именно справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Для каждого $s = 1, 2, \dots, m$ существуют ограниченные на множестве $\{|\xi| > R, 0 \leq y \leq 1\}$ функции $a_s(\xi, y)$ и $b_s(\xi, y)$ такие, что

$$w_s(\xi, y) = \frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \left(1 + \frac{a_s(\xi, y)}{|\xi|} \right), \quad |\xi| \geq R, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (7)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y} w_s(\xi, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \right) \left(1 + \frac{a_s(\xi, y)}{|\xi|} \right) + e^{-y|\xi|} y^{s-1} \frac{b_s(\xi, y)}{|\xi|}. \quad (8)$$

Тем самым имеют место следующие равномерные по $y \in [0, 1]$ асимптотические разложения при $|\xi| \rightarrow \infty$:

$$w_s(\xi, y) = \frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\xi|} \right) \right) \quad (7a)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y} w_s(\xi, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{|\xi|} \right) \right) + e^{-y|\xi|} y^{s-1} O\left(\frac{1}{|\xi|} \right). \quad (8a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (7) установлено в работе [1] (доказательству его посвящена лемма 1 работы [1]). Докажем равенство (8). Прежде всего заметим, что при любом $j = 1, \dots, k$ для всех $|\xi| \geq R$

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \lambda_j(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + z_j} = |\xi| \sqrt{1 + \frac{z_j}{|\xi|^2}} = \\ &= |\xi| \left(1 + \frac{z_j}{2|\xi|^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s (2s-1)!!}{2^{s+1} (s+1)!} \frac{z_j^{s+1}}{|\xi|^{2(s+1)}} \right), \end{aligned}$$

и, следовательно, для всех $i, j = 1, \dots, k$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_i &= |\xi| + \frac{z_i}{2|\xi|} + O\left(\frac{1}{|\xi|^3}\right), \\ \lambda_i - \lambda_j &= \frac{z_i - z_j}{2|\xi|} + O\left(\frac{1}{|\xi|^3}\right).\end{aligned}\tag{9}$$

При доказательстве равенства (8) рассмотрим сначала случай $s \leq m_1$. В этом случае

$$\begin{aligned}w_s(\xi, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=|\xi|+R} \frac{e^{yz} dz}{(z + \lambda_1)^s} = \operatorname{res}_{z=-\lambda_1} \frac{e^{yz}}{(z + \lambda_1)^s} = \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 y} y^{s-1}}{(s-1)!} = \frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} e^{(|\xi|-\lambda_1)y}\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial y} w_s(\xi, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \right) e^{(|\xi|-\lambda_1)y} + \frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} (|\xi| - \lambda_1) e^{(|\xi|-\lambda_1)y},$$

т.е. для $s \in [1, m_1]$ в силу соотношений (9) имеет место равенство (8), в котором

$$a_s(\xi, y) = (e^{(|\xi|-\lambda_1)y} - 1)|\xi|, \quad b_s(\xi, y) = \frac{|\xi|(|\xi| - \lambda_1) e^{(|\xi|-\lambda_1)y}}{(s-1)!}.$$

Пусть теперь $s > m_1$. Делая под знаком интеграла в (6) замену переменной $z = \zeta|\xi|$, а затем обозначая ζ через $z - 1$, получим

$$\begin{aligned}w_s(\xi, y) &= \frac{1}{2\pi i |\xi|^{s-1}} \int_{|\zeta|=1+\frac{R}{|\xi|}} \frac{e^{y|\xi|\zeta} d\zeta}{\left(\zeta + \frac{\lambda_1}{|\xi|}\right)^{m_1} \dots \left(\zeta + \frac{\lambda_\kappa}{|\xi|}\right)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} = \\ &= \frac{e^{-y|\xi|}}{2\pi i |\xi|^{s-1}} \int_{|z-1|=1+\frac{R}{|\xi|}} \frac{e^{y|\xi|z} dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} = \\ &= \frac{e^{-y|\xi|}}{2\pi i |\xi|^{s-1}} \int_{|z|=1} \frac{e^{y|\xi|z} dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}},\end{aligned}$$

где $\mu_i = 1 - \lambda_i/|\xi|$, $i = 1, \dots, k$, причем мы считаем число R настолько большим, что согласно (9) при всех $i = 1, \dots, k$ имеет место неравенство $|\mu_i| < 1$.

Поскольку для всех комплексных z при любом целом $r > 0$ справедливо равенство

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^r}{r!} + \frac{1}{r!} \int_0^z (z - \theta)^r e^\theta d\theta,$$

в котором интегрирование ведется, например, по лучу, соединяющему точки 0 и z , и, в силу того, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^p dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leq p \leq s-2, \\ 1 & \text{при } p = s-1, \end{cases}$$

мы имеем

$$\begin{aligned}
 w_s(\xi, y) &= \frac{e^{-y|\xi|}}{2\pi i |\xi|^{s-1}} \times \\
 &\times \int_{|z|=1} \frac{(1 + \frac{y|\xi|z}{1!} + \dots + \frac{(y|\xi|z)^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{1}{(s-1)!} \int_0^{y|\xi|z} (y|\xi|z - \theta)^{s-1} e^\theta d\theta) dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} = \\
 &= \frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \left(1 + \frac{y|\xi|}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^s \int_0^1 (1-t)^{s-1} e^{y|\xi|zt} dt dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} \right).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_s(\xi, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \right) \left(1 + \frac{y|\xi|}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^s \int_0^1 (1-t)^{s-1} e^{y|\xi|zt} dt dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} \right) + \\
 &+ \frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \frac{|\xi|}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^s \int_0^1 (1-t)^{s-1} e^{y|\xi|zt} dt dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} + \\
 &+ \frac{e^{-y|\xi|} y^{s-1}}{(s-1)!} \frac{y|\xi|^2}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^{s+1} \int_0^1 (1-t)^{s-1} t e^{y|\xi|zt} dt dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы установить справедливость формулы (8), достаточно показать, что равномерно по $y \in [0, 1]$ и по $t \in [0, 1]$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$\int_{|z|=1} \frac{z^s e^{y|\xi|zt} dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} = O\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right), \quad (10)$$

$$\int_{|z|=1} \frac{z^{s+1} e^{y|\xi|zt} dz}{(z - \mu_1)^{m_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1})}} = O\left(\frac{1}{|\xi|^4}\right). \quad (11)$$

Введем временные обозначения $m_1 = n_1, \dots, s-(m_1+\dots+m_{\kappa-1}) = n_\kappa$ и вычислим при целом $b = s$ или $b = s + 1$ интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^b e^{y|\xi|zt} dz}{(z - \mu_1)^{n_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{n_\kappa}} = \sum_{j=1}^{\kappa} \operatorname{res}_{z=\mu_j} \frac{z^b e^{y|\xi|zt}}{(z - \mu_1)^{n_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{n_\kappa}}. \quad (12)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}_{z=\mu_j} \frac{z^b e^{y|\xi|zt}}{(z - \mu_1)^{n_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{n_\kappa}} &= \frac{1}{(n_j - 1)!} \frac{d^{n_j-1}}{dz^{n_j-1}} \times \\
 &\times \left(\frac{z^b e^{y|\xi|zt}}{(z - \mu_1)^{n_1} \dots (z - \mu_{j-1})^{n_{j-1}} (z - \mu_{j+1})^{n_{j+1}} \dots (z - \mu_\kappa)^{n_\kappa}} \right) \Big|_{z=\mu_j} = \\
 &= \sum_{p+q+r=n_j-1} C_{pqr} \frac{d^p e^{y|\xi|zt}}{dz^p} \frac{d^q z^b}{dz^q} \times \\
 &\times \frac{d^r}{dz^r} \left(\frac{1}{(z - \mu_1)^{n_1} \dots (z - \mu_{j-1})^{n_{j-1}} (z - \mu_{j+1})^{n_{j+1}} \dots (z - \mu_\kappa)^{n_\kappa}} \right) \Big|_{z=\mu_j},
 \end{aligned}$$

где C_{pqr} – соответствующие мультиномиальные коэффициенты.

Из равенств (9) следует, что при $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\mu_j = \mu_j(\xi) = 1 - \frac{\lambda_j(\xi)}{|\xi|} = O\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right),$$

$$\mu_j - \mu_i = \frac{z_j - z_i}{2|\xi|^2} + O\left(\frac{1}{|\xi|^4}\right), \quad i, j = 1, \dots, k,$$

поэтому при $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\left. \frac{d^p e^{y|\xi|zt}}{dz^p} \right|_{z=\mu_j} = y^p |\xi|^p t^p e^{y|\xi|t\mu_j} = O(|\xi|^p),$$

$$\frac{d^q z^b}{dz^q} = O\left(\frac{1}{|\xi|^{2(b-q)}}\right),$$

Далее,

$$\left. \frac{d^r}{dz^r} \left(\frac{1}{(z - \mu_1)^{n_1} \dots (z - \mu_{j-1})^{n_{j-1}} (z - \mu_{j+1})^{n_{j+1}} \dots (z - \mu_\kappa)^{n_\kappa}} \right) \right|_{z=\mu_j}$$

есть линейная комбинация с не зависящими от ξ коэффициентами выражений вида

$$\frac{1}{(\mu_j - \mu_1)^{c_1} \dots (\mu_j - \mu_{j-1})^{c_{j-1}} (\mu_j - \mu_{j+1})^{c_{j+1}} \dots (\mu_j - \mu_\kappa)^{c_\kappa}},$$

в которых $c_1 + \dots + c_{j-1} + c_{j+1} + \dots + c_\kappa = s - n_j + r$, поэтому

$$\left. \frac{d^r}{dz^r} \left(\frac{1}{(z - \mu_1)^{n_1} \dots (z - \mu_{j-1})^{n_{j-1}} (z - \mu_{j+1})^{n_{j+1}} \dots (z - \mu_\kappa)^{n_\kappa}} \right) \right|_{z=\mu_j} =$$

$$= O(|\xi|^{2(s-n_j+r)}), \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\operatorname{res}_{z=\mu_j} \frac{z^b e^{y|\xi|zt}}{(z - \mu_1)^{n_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{n_\kappa}} = O(|\xi|^{p-2(b-q)+2(s-n_j+r)}) =$$

$$= O(|\xi|^{2(p+q+r)-p-2b+2s-2n_j}) = O(|\xi|^{2n_j-2-p-2b+2s-2n_j}) =$$

$$= O(|\xi|^{-2-p+2(s-b)}) = O(|\xi|^{-2+2(s-b)}), \quad |\xi| \rightarrow \infty.$$

Поскольку полученное равенство для вычета в точке μ_j от j не зависит, для вычетов в других полюсах $\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_\kappa$ имеют место такие же равенства. Поэтому в силу (12) равномерно по $y \in [0, 1]$ и по $t \in [0, 1]$

$$\int_{|z|=1} \frac{z^b e^{y|\xi|zt} dz}{(z - \mu_1)^{n_1} \dots (z - \mu_\kappa)^{n_\kappa}} = O(|\xi|^{-2+2(s-b)}), \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

откуда при $b = s$ и $b = s + 1$ вытекают соотношения (10) и (11). Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,m}$ симметрическую вещественную матрицу размера $(m \times m)$ с элементами

$$a_{ij} = a_{ji} = \int_0^\infty t \frac{(e^{-t}t^{i-1})_t}{(i-1)!} \frac{(e^{-t}t^{j-1})_t}{(j-1)!} dt, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что

$$a_{11} = \frac{1}{4},$$

$$a_{ij} = \frac{\Gamma(i+j-2)(i+j-2-(i-j)^2)}{2^{i+j}\Gamma(i)\Gamma(j)}, \quad i+j > 2.$$

Квадратичная форма этой матрицы, т.е. функция $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(B)$, $B = (B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^m$, имеет вид

$$\mathfrak{K}(B) = (\mathfrak{A}B, B)_{\mathbb{C}^m} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} B_i \overline{B_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_i \overline{B_j} \int_0^\infty t \frac{(e^{-t}t^{i-1})_t}{(i-1)!} \frac{(e^{-t}t^{j-1})_t}{(j-1)!} dt.$$

Функция $\mathfrak{K}$ является вещественнозначной, неотрицательной,

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(B) &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^m B_i \sqrt{t} \frac{(e^{-t}t^{i-1})_t}{(i-1)!} \sum_{j=1}^m \overline{B_j} \sqrt{t} \frac{(e^{-t}t^{j-1})_t}{(j-1)!} dt = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^m B_i \sqrt{t} \frac{(e^{-t}t^{i-1})_t}{(i-1)!} \right\|_{L_2(0,\infty)}^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Минимальное собственное значение $\mathfrak{a}$ матрицы $\mathfrak{A}$ положительно, т.е.*

$$\inf_{\|B\|_{\mathbb{C}^m}=1} \mathfrak{K}(B) = \mathfrak{a} > 0. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в противоположность утверждению леммы $\mathfrak{a} = 0$. Тогда существует последовательность векторов $B^k = (B_1^k, \dots, B_m^k)$, $\|B^k\|_{\mathbb{C}^m} = 1$, $k = 1, 2, \dots$, для которой $\mathfrak{K}(B^k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Эту последовательность можно за счет возможного ее прореживания считать сходящейся в $\mathbb{C}^m$ к некоторому вектору $B^0 = (B_1^0, \dots, B_m^0)$, $\|B^0\|_{\mathbb{C}^m} = 1$. Тогда равномерно по $t \in [0, \infty)$

$$\sum_{i=1}^m B_i^k \sqrt{t} \frac{(e^{-t}t^{i-1})_t}{(i-1)!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m B_i^0 \sqrt{t} \frac{(e^{-t}t^{i-1})_t}{(i-1)!}$$

и, следовательно, в силу (14)

$$\sum_{i=1}^m B_i^0 \sqrt{t} \frac{(e^{-t}t^{i-1})_t}{(i-1)!} \equiv 0, \quad t \in [0, \infty),$$

тем самым

$$\sum_{i=1}^m B_i^0 \frac{e^{-t}t^{i-1}}{(i-1)!} = C, \quad t \in [0, \infty),$$

при некоторой постоянной C , т.е. имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^m B_i^0 \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = Ce^t, \quad t \in [0, \infty),$$

которое возможно только при $C = B_1^0 = \dots = B_m^0 = 0$. Но это противоречит условию $\|B^0\|_{\mathbb{C}^m} = 1$.

ЛЕММА 3. Если решение $u(x, y)$ уравнения (1) удовлетворяет условию

$$\int_{\Pi} |u_y|^2 y \, dx \, dy < \infty, \quad (16)$$

то функции $A_i(\xi)$ из равенств (4) таковы, что

$$\frac{A_i(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{(i-1)/2}} \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad i = 1, \dots, m. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $U(x, y)$ из представления решения $u(x, y)$ по формуле (3) принадлежит $W_2^{2m}(\Pi)$, отсюда $\int_{\Pi} |U_y|^2 y \, dx \, dy = C_1 < \infty$, где C_1 – некоторая зависящая от $u(x, y)$ постоянная, следовательно, в силу (3)

$$\int_{\Pi} \left| \sum_{i=1}^m u_{iy}(x, y) \right|^2 y \, dx \, dy = C_2 = C_2(u) < \infty. \quad (18)$$

Из (4) вытекает, что для любого $y \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i=1}^m u_{iy}(x, y) \right|^2 dx &= \int_{|\xi| > R} \left| \sum_{i=1}^m A_i(\xi) w_{iy}(\xi, y) \right|^2 d\xi = \\ &= \int_{|\xi| > R} \left| \sum_{i=1}^m B_i(\xi) (|\xi|^{i-1} w_{iy}(\xi, y)) \right|^2 d\xi = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{|\xi| > R} B_i(\xi) \overline{B_j(\xi)} |\xi|^{i-1} |\xi|^{j-1} w_{iy}(\xi, y) \overline{w_{jy}(\xi, y)} d\xi, \end{aligned}$$

где

$$B_i(\xi) = \frac{A_i(\xi)}{|\xi|^{i-1}}, \quad |\xi| > R, \quad i = 1, \dots, m. \quad (19)$$

Следовательно, согласно (18)

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_{\Pi} \left| \sum_{i=1}^m u_{iy}(x, y) \right|^2 y \, dx \, dy = \\ &= \int_{|\xi| > R} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_i(\xi) \overline{B_j(\xi)} \int_0^1 y |\xi|^{i-1} |\xi|^{j-1} w_{iy}(\xi, y) \overline{w_{jy}(\xi, y)} dy \, d\xi = \\ &= \int_{|\xi| > R} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_i(\xi) \overline{B_j(\xi)} \frac{|\xi|^{i-1} |\xi|^{j-1}}{|\xi|^2} \times \\ &\quad \times \int_0^{|\xi|} \eta \left(\frac{\partial w_i(\xi, y)}{\partial y} \right) \bigg|_{y=\eta/|\xi|} \overline{\left(\frac{\partial w_j(\xi, y)}{\partial y} \right)} \bigg|_{y=\eta/|\xi|} d\eta \, d\xi. \end{aligned} \quad (20)$$

Из формул (7) и (8) леммы 1 вытекает, что

$$\begin{aligned}
 w_i(\xi, y)|_{y=\eta/|\xi|} &= \frac{e^{-\eta}\eta^{i-1}}{|\xi|^{i-1}(i-1)!} \left(1 + \frac{a_i(\xi, \eta/|\xi|)}{|\xi|}\right), \\
 \frac{\partial w_i(\xi, y)}{\partial y} \Big|_{y=\eta/|\xi|} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-y|\xi|}y^{i-1}}{(i-1)!} \right) \Big|_{y=\eta/|\xi|} \left(1 + \frac{a_i(\xi, y)}{|\xi|}\right) \Big|_{y=\eta/|\xi|} + \\
 &\quad + (e^{-y|\xi|}y^{i-1})|_{y=\eta/|\xi|} \frac{b_i(\xi, y)}{|\xi|} \Big|_{y=\eta/|\xi|} = \\
 &= \frac{|\xi|}{|\xi|^{i-1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{e^{-\eta}\eta^{i-1}}{(i-1)!} \right) \left(1 + \frac{a_i(\xi, \eta/|\xi|)}{|\xi|}\right) + \\
 &\quad + (e^{-\eta}\eta^{i-1}) \frac{b_i(\xi, \eta/|\xi|)}{|\xi|^i}
 \end{aligned}$$

(здесь $\eta \in \mathbb{R}^1$, $|\xi| > R$, $i = 1, \dots, m$). Следовательно, как продолжение равенства (20) имеем

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \int_{|\xi| > R} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_i(\xi) \overline{B_j(\xi)} \times \\
 &\quad \times \int_0^{|\xi|} \eta \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{e^{-\eta}\eta^{i-1}}{(i-1)!} \right) \left(1 + \frac{a_i(\xi, \eta/|\xi|)}{|\xi|}\right) + (e^{-\eta}\eta^{i-1}) \frac{b_i(\xi, \eta/|\xi|)}{|\xi|} \right] \times \\
 &\quad \times \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{e^{-\eta}\eta^{j-1}}{(j-1)!} \right) \left(1 + \frac{\overline{a_j(\xi, \eta/|\xi|)}}{|\xi|}\right) + (e^{-\eta}\eta^{j-1}) \frac{\overline{b_j(\xi, \eta/|\xi|)}}{|\xi|} \right] d\eta d\xi. \quad (21)
 \end{aligned}$$

При любом ξ , $|\xi| > R$, комплексная $(m \times m)$ -матрица $\mathfrak{A}(\xi) = \|a_{ij}(\xi)\|_{i,j=1,\dots,m}$, в которой

$$\begin{aligned}
 a_{ij}(\xi) &= \int_0^{|\xi|} \eta \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{e^{-\eta}\eta^{i-1}}{(i-1)!} \right) \left(1 + \frac{a_i(\xi, \eta/|\xi|)}{|\xi|}\right) + (e^{-\eta}\eta^{i-1}) \frac{b_i(\xi, \eta/|\xi|)}{|\xi|} \right] \times \\
 &\quad \times \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{e^{-\eta}\eta^{j-1}}{(j-1)!} \right) \left(1 + \frac{\overline{a_j(\xi, \eta/|\xi|)}}{|\xi|}\right) + (e^{-\eta}\eta^{j-1}) \frac{\overline{b_j(\xi, \eta/|\xi|)}}{|\xi|} \right] d\eta,
 \end{aligned}$$

очевидно, является самосопряженной, $\mathfrak{A}(\xi) = \mathfrak{A}^*(\xi)$. Далее, при любых $i = 1, \dots, m$ функции $e^{-\eta}\eta^{i-1}$ и $|(e^{-\eta}\eta^{i-1})_\eta|$ интегрируемы на $[0, \infty)$, а функции $a_i(\xi, \eta/|\xi|)$ и $b_i(\xi, \eta/|\xi|)$ ограничены на множестве $\{|\xi| > R, 0 \leq \eta < |\xi|\}$, что вытекает из утверждения леммы 1 об ограниченности функций $a_i(\xi, y)$ и $b_i(\xi, y)$ на множестве $\{|\xi| > R, 0 \leq y \leq 1\}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 a_{ij}(\xi) &= \int_0^\infty \eta \frac{(e^{-\eta}\eta^{i-1})_\eta}{(i-1)!} \frac{(e^{-\eta}\eta^{j-1})_\eta}{(j-1)!} d\eta - \\
 &\quad - \int_{|\xi|}^\infty \eta \frac{(e^{-\eta}\eta^{i-1})_\eta}{(i-1)!} \frac{(e^{-\eta}\eta^{j-1})_\eta}{(j-1)!} d\eta + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad |\xi| \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

т.е. согласно (13) при всех $i, j = 1, \dots, m$

$$a_{ij}(\xi) \rightarrow a_{ij}, \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

где, напомним, a_{ij} – элементы матрицы $\mathfrak{A}$.

Следовательно, минимальное собственное значение $\mathfrak{a}(\xi)$ матрицы $\mathfrak{A}(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ стремится к минимальному собственному значению $\mathfrak{a}$ матрицы $\mathfrak{A}$, которое согласно лемме 2 положительно. Таким образом, существует такое $R_1 \geq R$, что для всех ξ , $|\xi| \geq R_1$, имеет место неравенство $\mathfrak{a}(\xi) \geq \mathfrak{a}/2$, и тем самым квадратичная форма $\mathfrak{K}(\xi, B) = (\mathfrak{A}(\xi)B, B)_{\mathbb{C}^m}$, $B \in \mathbb{C}^m$, матрицы $\mathfrak{A}(\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$\inf_{\|B\|_{\mathbb{C}^m}=1} \mathfrak{K}(\xi, B) \geq \frac{\mathfrak{a}}{2} \quad \text{при} \quad |\xi| \geq R_1,$$

из которого следует неравенство

$$\mathfrak{K}(\xi, B) \geq \frac{\mathfrak{a}}{2} \|B\|_{\mathbb{C}^m}^2 \quad \text{для всех} \quad \xi, \quad |\xi| \geq R_1, \quad \text{и всех} \quad B \in \mathbb{C}^m. \quad (22)$$

Продолжим равенство (21). С помощью (22) получим неравенство

$$\begin{aligned} C_2 &\geq \int_{|\xi| \geq R_1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi) B_i(\xi) \overline{B_j(\xi)} d\xi = \int_{|\xi| \geq R_1} \mathfrak{K}(\xi, B(\xi)) d\xi \geq \\ &\geq \frac{\mathfrak{a}}{2} \int_{|\xi| \geq R_1} \sum_{i=1}^m |B_i(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

из которого в силу (19) вытекает, что для всех $i = 1, \dots, m$

$$\int_{|\xi| \geq R_1} \frac{|A_i(\xi)|^2}{|\xi|^{i-1}} d\xi \leq \frac{2C_2}{\mathfrak{a}}$$

и тем более

$$\int_{|\xi| \geq R_1} \frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{(i-1)/2}} d\xi \leq \frac{2C_2}{\mathfrak{a}}.$$

Утверждение леммы 3 теперь следует из известного включения $A_i(\xi) \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, m$.

ЛЕММА 4. Пусть $u(x, y)$ – решение уравнения (1). Тогда условия (2) и (16) эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что из условия (2) вытекает условие (16), очевидно, поскольку $|\nabla u|^2 = |\nabla_x u|^2 + |u_y|^2 \geq |u_y|^2$ для всех $(x, y) \in \Pi$.

Пусть выполнено условие (16). Для доказательства соотношения (2) следует проверить, что

$$\int_{\Pi} |\nabla_x u|^2 y dx dy < \infty. \quad (23)$$

Поскольку функция $U(x, y)$ в (3) принадлежит $W_2^1(\Pi)$, для этого достаточно показать, что при любом $i = 1, \dots, m$

$$\int_{\Pi} |\nabla_x u_i|^2 y \, dx \, dy < \infty,$$

другими словами, с учетом (4) установить, что для всех $i = 1, \dots, m$

$$\int_0^1 y \, dy \int_{|\xi| > R} |A_i(\xi)|^2 |\xi|^2 |w_i(\xi, y)|^2 \, d\xi < \infty. \quad (24)$$

Для доказательства неравенства (24) воспользуемся равенством (7) (или (7a)) из леммы 1; при этом, как и при доказательстве леммы 3, достаточно проверить, что при некотором (достаточно большом) $R_1 \geq R$ для всех $i = 1, \dots, m$

$$\int_0^1 y \, dy \int_{|\xi| > R_1} |A_i(\xi)|^2 |\xi|^2 e^{-2y|\xi|} y^{2(i-1)} \, d\xi < \infty.$$

Проверка последнего неравенства осуществляется непосредственно с помощью леммы 3:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 y \, dy \int_{|\xi| > R_1} |A_i(\xi)|^2 |\xi|^2 e^{-2y|\xi|} y^{2(i-1)} \, d\xi = \\ &= \int_{|\xi| > R_1} |A_i(\xi)|^2 |\xi|^2 \int_0^1 e^{-2y|\xi|} y^{2i-1} \, dy \, d\xi = \\ &= \int_{|\xi| > R_1} |A_i(\xi)|^2 |\xi|^2 \frac{1}{(2|\xi|)^{2i}} \int_0^{2|\xi|} e^{-t} t^{2i-1} \, dt \, d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{2i}} \int_{|\xi| > R_1} \frac{|A_i(\xi)|^2}{|\xi|^{2(i-1)}} \int_0^\infty e^{-t} t^{2i-1} \, dt \, d\xi \leq \\ &\leq \frac{\Gamma(2i)}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{i-1}} \, d\xi < \infty, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы нам понадобится еще одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 5. Если функция $A_i(\xi)$ из равенства (4) при $i = 2, \dots, m$ удовлетворяет условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{i-1}} \, d\xi = 0,$$

то функция $u_i(x, y)$ из (3) при этих i имеет на границе Γ_0 L_2 -предел, равный нулю.

Утверждение этой леммы является одним из утверждений леммы 7 работы [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть для решения $u(x, y)$ уравнения (1) выполнено условие (2). Тогда по лемме 4 выполнено условие (16). Следовательно, согласно лемме 3 функции $A_i(\xi)$ в равенствах (4) таковы, что

$$\frac{A_i(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{(i-1)/2}} \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad i = 1, \dots, m. \quad (25)$$

Отсюда при $i = 1$ имеем $A_1(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что функция $u_1(x, y)$ из формулы (3) имеет L_2 -предел на Γ_0 , равный функции

$$f_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} A_1(\xi) (1 - \chi_R(\xi)) d\xi.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|u_1(\cdot, y) - f_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|\tilde{u}_1(\cdot, y) - A_1(\cdot)(1 - \chi_R(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |A_1(\xi)(1 - \chi_R(\xi))(1 - e^{-y|\xi|})|^2 d\xi \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +0, \end{aligned}$$

поскольку подынтегральная функция для почти всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ стремится к нулю при $y \rightarrow +0$ и имеет интегрируемую мажоранту $|A_1(\xi)(1 - \chi_R(\xi))|^2$.

Из (25) вытекает, что

$$\frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{(i-1)/2}} \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad i = 2, \dots, m.$$

Следовательно, для $i = 2, \dots, m$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{N < |\xi| < 2N} \frac{|A_i(\xi)|^2}{(1 + |\xi|^2)^{i-1}} d\xi = 0,$$

а тогда по лемме 5 функции $u_i(x, y)$, $i = 2, \dots, m$, имеют нулевые L_2 -пределы на Γ_0 . Функция $U(x, y) \in W_2^1(\Pi)$, поэтому $u(x, y)$ имеет L_2 -предел на Γ_0 . Теорема доказана.

В заключение скажем несколько слов об условии (2). Впервые оно появилось в работах Литтлвуда и Пэли [2], [3]. В этих работах было доказано, что аналитическая в единичном круге $\{|z| < 1\}$ функция $u(z)$ одного комплексного переменного $z = x + iy$ тогда и только тогда имеет L_2 -предел на границе, когда выполнено условие

$$\int_{|z| < 1} |u'|^2 (1 - |z|) dx dy < \infty.$$

Этот результат был перенесен в работе [4] на случай, когда функция $u(x)$ является решением в n -мерной ограниченной области Q линейного (не обязательно однородного) эллиптического уравнения второго порядка; при этом коэффициенты уравнения и граница ∂Q области Q предполагались достаточно гладкими. В работе [4] доказано, что необходимым и достаточным условием существования L_2 -предела на границе функции $u(x)$ является условие

$$\int_Q |\nabla u(x)|^2 r(x) dx < \infty, \quad (26)$$

где $r(x)$ – расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Однако условие типа условия Литтлвуда–Пэли не может быть критерием существования L_2 -предела на границе области у всех решений линейного эллиптического

уравнения, если порядок этого уравнения выше 2. Доказанная в настоящей работе теорема утверждает, что для всех решений уравнения (1) условие (2) является достаточным условием для существования L_2 -предела на Γ_0 . Также можно показать, что для любого уравнения (1) при $m > 1$ существуют решения, имеющие L_2 -предел на Γ_0 , для которых условие (2) не выполняется. При построении соответствующего примера ограничимся случаем $\mathfrak{P}(z) = z^2$, т.е. случаем бигармонического уравнения.

Легко проверить, что функция

$$v(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} \frac{e^{-y|\xi|} d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{(n-2)/4} (1 + \ln(1 + |\xi|^2))^{1/2}}, \quad (x, y) \in \Pi,$$

является гармонической в Π , следовательно, функция

$$u(x, y) = yv(x, y), \quad (x, y) \in \Pi,$$

является в Π бигармонической.

Для любого $y \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 &= y^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-2y|\xi|} d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{(n-2)/2} (1 + \ln(1 + |\xi|^2))} = \\ &= y^2 \omega_n \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1} e^{-2y\rho} d\rho}{(1 + \rho^2)^{(n-2)/2} (1 + \ln(1 + \rho^2))} = \\ &= \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1} e^{-2r} dr}{(y^2 + r^2)^{(n-2)/2} (1 + \ln(1 + r^2/y^2))}, \end{aligned}$$

где $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$. Подынтегральное выражение в последнем интеграле стремится к нулю при $y \rightarrow +0$ для всех $r > 0$ и мажорируется интегрируемой функцией re^{-2r} , отсюда $\|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +0$, таким образом, функция $u(x, y)$ имеет L_2 -предел на Γ_0 , равный нулю.

Проверим, что условие (2) для функции $u(x, y)$ не выполняется. Для всех $y \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x, y)|^2 dx &= 2y^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^2 e^{-2y|\xi|} d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{(n-2)/2} (1 + \ln(1 + |\xi|^2))} = \\ &= 2y^2 \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n+1} e^{-2yr} dr}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} (1 + \ln(1 + r^2))}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} y |\nabla u(x, y)|^2 dx dy &= 2\omega_n \int_0^1 y^3 \int_0^\infty \frac{r^{n+1} e^{-2yr} dr}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} (1 + \ln(1 + r^2))} dy = \\ &= 2\omega_n \left\{ \frac{3}{8} \int_1^\infty \frac{r^{n-3} dr}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} (1 + \ln(1 + r^2))} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 y^3 \int_0^1 \frac{r^{n+1} e^{-2yr} dr}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} (1 + \ln(1 + r^2))} dy - \right. \\ &\quad \left. - \int_1^\infty \frac{e^{-2r} (1/2r + 3/4r^2 + 3/4r^3 + 3/8r^4)}{(1 + r^2)^{(n-2)/2} (1 + \ln(1 + r^2))} dr \right\} = \infty, \end{aligned}$$

поскольку первый интеграл в фигурной скобке равен ∞ , а последующие два интеграла сходятся.

Отметим, что аналогичный пример полигармонической функции в круге (двумерный случай) приведен в работе [5]. Другое достаточное условие существования L_2 -предельного значения на границе области у решений весьма общих эллиптических уравнений имеется в работе [6].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00144а) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1).

Список литературы

- [1] В. П. Михайлов, *Матем. сб.*, **190**:10 (1999), 17–48.
- [2] J. E. Littlewood, R. Paley, *Proc. London Math. Soc.*, **42**:1 (1936), 52–89.
- [3] J. E. Littlewood, R. Paley, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **43** (1937), 105–126.
- [4] В. П. Михайлов, *Матем. сб.*, **101(143)**:2(10) (1976), 163–188.
- [5] В. П. Михайлов, “Об одном достаточном условии существования предельных значений полигармонических функций на границе области”, *Тр. межд. семинара “Дифференциальные уравнения и их приложения”* (Самара, 1998).
- [6] Я. А. Ройтберг, *Докл. АН СССР*, **238**:6 (1978), 1303–1306.

Поступила в редакцию 13.03.2008