Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Сергеев, Твисторное квантование пространств петель компактных групп Ли, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 3, 450–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:11:50

© 2008 г.

А. Г. Сергеев*

ТВИСТОРНОЕ КВАНТОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВ ПЕТЕЛЬ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

Рассмотрена задача твисторного квантования для пространства петель $\Omega_T G$ компактной группы Ли G . Показано, что эта задача разрешима в критической размерности.

Ключевые слова: твисторное квантование, пространство петель, фоковское расслоение, аффинные алгебры, действие Гудмана–Уолаха.

*Посвящается Василию Сергеевичу Владимирову
в связи с 85-летием*

Пространство петель $\Omega_T G = LG/T$ является фактором группы петель $LG := C^\infty(S^1, G)$ компактной группы Ли G по модулю постоянных отображений $S^1 \rightarrow T$ в максимальный тор T группы G . Это пространство, которое можно рассматривать как естественный бесконечномерный аналог многообразия полных флагов $F = G/T$, играет в теории представлений групп петель такую же роль, какую многообразие полных флагов играет в теории представлений компактных групп Ли. В частности, неприводимые представления группы петель LG реализуются с помощью конструкции Бореля–Вейля в пространствах голоморфных сечений комплексных линейных расслоений над $\Omega_T G$. Указанная конструкция лежит в основе твисторного квантования пространства $\Omega_T G$. Кроме того, пространство $\Omega_T G$ тесно связано с теорией струн, будучи фазовым многообразием этой теории, что делает геометрическое квантование указанного пространства важной и интересной задачей. Твисторное квантование пространства $\Omega_T G$, составляющее основной предмет настоящей статьи, можно рассматривать как промежуточный этап в построении геометрического квантования $\Omega_T G$.

Напомним, что твисторное квантование фазового многообразия M означает построение гильбертова расслоения над пространством допустимых комплексных структур на M вместе с плоской эрмитовой связностью на нем. В нашем случае роль фазового пространства играет пространство петель $\Omega_T G$. Мы наделяем это бесконечномерное многообразие алгеброй наблюдаемых $\mathcal{A}$, задаваемой полупрямым

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: sergeev@mi.ras.ru

произведением $L\mathfrak{g} \rtimes \text{Vect}(S^1)$ алгебры петель $L\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G , и алгебры $\text{Vect}(S^1)$ касательных векторных полей на окружности. Допустимые комплексные структуры на $\Omega_T G$ получаются из стандартной комплексной структуры действием группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$, задаваемым репараметризацией петель. Пространство допустимых комплексных структур отождествляется с фактором $\mathcal{S} := \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$ этой группы по модулю автоморфизмов Мёбиуса единичного круга, суженных на S^1 . Гильбертово расслоение квантования $\mathcal{H}$ на $\mathcal{S}$ совпадает с фоковским расслоением полуформ над $\mathcal{S}$. Его можно снабдить естественным проективным действием группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$, построенным в работе Гудмана–Уолаха [1]. Это действие порождает эрмитову связность на $\mathcal{H}$, которая является плоской в критической размерности.

Коротко о содержании статьи. В разделе 1 вводится пространство петель $\Omega_T G$ и определяются его комплексная и симплектическая структуры. Затем рассматривается действие группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$ на $\Omega_T G$ и изучается пространство допустимых комплексных структур на $\Omega_T G$. В разделе 2 мы напоминаем хорошо известные факты о квантовании Дирака и предквантовании Костанта–Сурьо (KS-предквантование). Раздел 3 содержит базисные сведения о структуре аффинных алгебр и их представлениях старшего веса. Раздел 4 посвящен конструкции Бореля–Вейля для групп петель [2]. В разделе 5 представлена конструкция Гудмана–Уолаха, с помощью которой строится проективно плоская унитарная связность на фоковском расслоении. Раздел завершается построением расслоения квантования, отождествляемого с фоковским расслоением полуформ на $\mathcal{S}$. Это расслоение наделяется эрмитовой связностью, которая является плоской в критической размерности.

1. КЭЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА $\Omega_T G$

1.1. Пространство $\Omega_T G$. Пусть G – компактная связная группа Ли, T – максимальный тор в G . Рассмотрим пространство петель $\Omega_T G$, являющееся однородным пространством группы петель $LG = C^\infty(S^1, G)$ вида

$$\Omega_T G = LG/T. \quad (1)$$

Группа петель $LG = C^\infty(S^1, G)$ есть группа гладких отображений окружности $S^1 = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ в группу G , а T отождествляется с группой постоянных отображений $S^1 \rightarrow g_0 \in T$. Пространство петель $\Omega_T G$ есть однородное пространство группы Ли–Фреше LG с естественным действием LG левыми сдвигами.

С теоретико-групповой точки зрения группа петель LG является полупрямым произведением группы G и подгруппы $L_1 G$ отображений из LG , переводящих $1 \in S^1$ в единицу $e \in G$. Как многообразие Фреше группа петель LG диффеоморфна прямому произведению $G \times \Omega G$, где

$$\Omega G = LG/G.$$

Заметим, что ΩG можно отождествить (как однородное пространство) с подгруппой $L_1 G$, сопоставляя классу $[\gamma]$ петли $\gamma \in LG$ отображение $\gamma(1)^{-1}\gamma \in L_1 G$. При

таким отождествлении пространство ΩG реализуется в виде замкнутого подмногообразия (корузмерности 1) в многообразии Фреше LG и поэтому является многообразием Фреше. Следовательно, многообразием Фреше является и пространство петель $\Omega_T G$, диффеоморфное

$$\Omega_T G = LG/T = G/T \times \Omega G. \quad (2)$$

Пространство $\Omega_T G$ обладает естественной симплектической структурой, которую можно ввести с помощью диффеоморфизма (2). Инвариантную (относительно левых сдвигов группы LG) симплектическую структуру на ΩG можно определить с помощью инвариантного (относительно присоединенного действия) скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Инвариантная симплектическая структура на ΩG полностью определяется ее сужением на касательное пространство $T_o(\Omega G)$ в начале o . Это касательное пространство совпадает с

$$T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g} := L\mathfrak{g}/\mathfrak{g},$$

где $L\mathfrak{g} := C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$ – алгебра петель со скобкой Ли, определяемой поточечно. Элементы $\xi \in \Omega \mathfrak{g}$ можно задавать их разложениями Фурье

$$\xi(e^{i\theta}) = \sum_{k \neq 0} \xi_k e^{ik\theta},$$

где $\xi_k \in \mathfrak{g}^\mathbb{C}$, $\xi_{-k} = \bar{\xi}_k$.

Рассмотрим 2-форму ω_0 на алгебре петель $L\mathfrak{g}$, задаваемую формулой

$$\omega_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \xi(e^{i\theta}), \frac{d\eta(e^{i\theta})}{d\theta} \right\rangle d\theta \quad (3)$$

на векторах $\xi = \xi(e^{i\theta})$, $\eta = \eta(e^{i\theta})$ из алгебры петель $L\mathfrak{g} = C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$. Это кососимметричная билинейная замкнутая форма на $L\mathfrak{g}$, которая обращается в нуль, если хотя бы одно из отображений ξ, η постоянно. Опуская форму ω_0 на $\Omega \mathfrak{g}$, получим невырожденную кососимметричную билинейную замкнутую 2-форму ω на $\Omega \mathfrak{g}$, инвариантную относительно присоединенного действия группы G на $\Omega \mathfrak{g}$. Эта форма продолжается (с помощью левых сдвигов) до LG -инвариантной симплектической формы ω на ΩG .

Кроме того, мы можем использовать скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$, чтобы отождествить однородное пространство G/H с орбитой коприсоединенного представления группы G в пространстве $\mathfrak{g}^*$, двойственном к алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Такие орбиты обладают канонической симплектической структурой, задаваемой формой Кириллова [3]. Симплектические структуры на ΩG и G/H порождают с помощью диффеоморфизма (2) симплектическую структуру на пространстве петель $\Omega_T G$.

Пространство $\Omega_T G$ можно также наделить инвариантной комплексной структурой J , которая индуцируется “комплексным” представлением $\Omega_T G$ в виде однородного пространства комплексифицированной группы петель $LG^\mathbb{C}$. Это представление имеет вид

$$\Omega_T G = LG^\mathbb{C}/B_+ G^\mathbb{C}, \quad (4)$$

где $B_+G^{\mathbb{C}}$ – подгруппа $L_+G^{\mathbb{C}} = \text{Hol}(\Delta, G^{\mathbb{C}})$, состоящая из отображений $\gamma \in C^\infty(S^1, G^{\mathbb{C}})$, продолжающихся до голоморфных и гладких вплоть до S^1 отображений $\gamma: \Delta \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ единичного круга Δ , которые удовлетворяют дополнительному условию: $\gamma(0) \in B_+$, где B_+ – стандартная подгруппа Бореля в G . Доказательство этого утверждения можно найти в работе [2]. Кроме того, можно ввести комплексную структуру на $\Omega_T G$, пользуясь диффеоморфизмом (2). Искомая комплексная структура будет порождаться инвариантными комплексными структурами на ΩG и однородном пространстве G/H , рассматриваемом как многообразие флагов [4].

Введенная комплексная структура J на $\Omega_T G$ совместима с симплектической формой ω и тем самым определяет на $\Omega_T G$ структуру кэлера многообразия Фреше. Главной целью статьи является твисторное квантование этого многообразия.

1.2. Действие группы диффеоморфизмов на $\Omega_T G$. Группа $\text{Diff}_+(S^1)$ диффеоморфизмов S^1 , сохраняющих ориентацию, действует на группе петель LG заменой переменной

$$T_f(\gamma) := \gamma \circ f - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(f(\theta)) d\theta$$

при $\gamma \in \Omega G$, $f \in \text{Diff}_+(S^1)$. Это действие порождает симплектическое действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на ΩG . Мы продолжаем его тривиальным образом на второй множитель G/T в произведении $\Omega_T G = \Omega G \times G/T$.

Диффеоморфизм $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ преобразует комплексную структуру J в комплексную структуру

$$J_f := f_*^{-1} \circ J \circ f_*,$$

где f_* – отображение, касательное к f . Эта новая комплексная структура J_f эквивалентна исходной комплексной структуре J тогда и только тогда, когда $f \in \text{Möb}(S^1)$. Здесь $\text{Möb}(S^1)$ есть группа дробно-линейных автоморфизмов единичного круга, суженных на S^1 .

Будем называть комплексные структуры $J_f = f_*^{-1} \circ J \circ f_*$ на ΩG , полученные из J действием группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$, *допустимыми*. Пространство допустимых комплексных структур на $\Omega_T G$ отождествляется с многообразием $\mathcal{S} := \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$.

Напомним, что комплексная структура J на $\Omega_T G$ инвариантна относительно левых LG -сдвигов на $\Omega_T G$ и совместима с симплектической структурой ω . С учетом инвариантности ω относительно действия группы $\text{Diff}_+(S^1)$ комплексные структуры J_f также инвариантны относительно левых LG -сдвигов и совместимы с ω .

1.3. Пространство допустимых комплексных структур. Пространство допустимых комплексных структур

$$\mathcal{S} := \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$$

является кэлеровым многообразием Фреше. Для того чтобы показать это, введем комплексную структуру I на $\mathcal{S}$, инвариантную относительно действия группы $\text{Diff}_+(S^1)$ левыми сдвигами. Ввиду инвариантности достаточно определить ее в начале $o \in \mathcal{S}$.

Касательное пространство $T_o\mathcal{S}$ отождествляется с факторпространством алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ касательных векторных полей на S^1 по модулю подалгебры $sl(2, \mathbb{R})$. В терминах разложений Фурье векторные поля $v = v(\theta) d/d\theta \in T_o\mathcal{S}$ задаются рядами вида

$$v(\theta) = \sum_{n \neq -1, 0, 1} v_n e^{in\theta}, \quad v_n \in \mathbb{C},$$

удовлетворяющими условию $v_{-n} = \bar{v}_n$. В этих терминах сужение $\text{Diff}_+(S^1)$ -инвариантной комплексной структуры I на $T_o\mathcal{S}$ определяется формулой

$$Iv(\theta) = -i \sum_{n>1} v_n e^{in\theta} + i \sum_{n<-1} v_n e^{in\theta}$$

для $v = v(\theta) d/d\theta \in T_o\mathcal{S}$. Эта комплексная структура совместима с симплектической структурой w на $\mathcal{S}$, которая определяется в терминах разложений Фурье следующим образом.

На касательных векторах $u, v \in T_o\mathcal{S}$ с разложениями Фурье

$$u = \sum_{n \neq -1, 0, 1} u_n e_n, \quad v = \sum_{n \neq -1, 0, 1} v_n e_n \quad (5)$$

значение w равно

$$w(u, v) = 2 \text{Im} \sum_{n=2}^{\infty} u_n \bar{v}_n (n^3 - n).$$

Симплектическая форма w вместе с комплексной структурой I определяют кэлерову метрику g на $\mathcal{S}$. В терминах разложений Фурье указанная метрика задается формулой

$$g(u, v) = 2 \text{Re} \sum_{n=2}^{\infty} u_n \bar{v}_n (n^3 - n)$$

на касательных векторах $u, v \in T_o\mathcal{S}$ с разложениями Фурье (5).

2. КВАНТОВАНИЕ ДИРАКА

2.1. Квантование классических систем. Напомним, что классическая (или механическая) система задается парой $(M, \mathcal{A})$, где M – фазовое пространство системы, $\mathcal{A}$ – ее алгебра наблюдаемых (или гамильтонианов). С математической точки зрения фазовое пространство M есть симплектическое многообразие размерности $2n$, наделенное симплектической 2-формой ω . Локально оно эквивалентно симплектическому пространству $M_0 := (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, где ω_0 – стандартная симплектическая форма на $\mathbb{R}^{2n}$, задаваемая в канонических координатах (p_i, q_i) , $i = 1, \dots, n$, на $\mathbb{R}^{2n}$ выражением

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Хорошо известными примерами фазовых пространств являются кокасательные расслоения и коприсоединенные орбиты групп Ли.

Алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ с математической точки зрения является произвольной подалгеброй Ли в алгебре Пуассона $C^\infty(M, \mathbb{R})$ гладких вещественнозначных функций на фазовом пространстве M со скобкой Пуассона, определяемой симплектической 2-формой ω . В частности, можно взять в качестве $\mathcal{A}$ всю алгебру Пуассона $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

В случае стандартной модели $M_0 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ важным примером алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ является алгебра Гейзенберга $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$. Это алгебра Ли, порождаемая единицей и координатными функциями $p_i, q_i, i = 1, \dots, n$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Приведем еще один пример. Предположим, что Γ есть группа Ли, состоящая из симплектоморфизмов, действующих на фазовом пространстве M , так что алгебру Ли $\text{Lie}(\Gamma)$ можно рассматривать как подалгебру алгебры Ли гамильтоновых векторных полей на M . Если M односвязно, то $\text{Lie}(\Gamma)$ можно также рассматривать двойственным образом как подалгебру алгебры Пуассона $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Указанная подалгебра совпадает с алгеброй $\text{Ham}(\Gamma)$ гамильтонианов (гладких вещественных функций) на M , порождающих симплектоморфизмы из Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квантованием Дирака классической системы $(M, \mathcal{A})$ называется неприводимое представление*

$$r: \mathcal{A} \rightarrow \text{End}^* H$$

алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ в алгебре линейных самосопряженных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H , называемом пространством квантования. Алгебра $\text{End}^* H$ наделяется скобкой Ли, задаваемой коммутатором линейных операторов вида

$$\frac{\hbar}{i} [A, B] = \frac{\hbar}{i} (AB - BA).$$

Другими словами, требуется, чтобы

$$r(\{f, g\}) = \frac{\hbar}{i} (r(f)r(g) - r(g)r(f))$$

для любых $f, g \in \mathcal{A}$. Мы также предполагаем выполненным следующее условие нормировки:

$$r(1) = \text{id}.$$

Если представление r удовлетворяет всем этим требованиям, за исключением неприводимости, оно называется *предквантованием системы $(M, \mathcal{A})$* .

Обычно мы полагаем для простоты $\hbar = 1$. Иногда полезно рассматривать комплексифицированную алгебру наблюдаемых $\mathcal{A}^\mathbb{C}$ вместо $\mathcal{A}$. Ее квантование Дирака задается неприводимым представлением

$$r: \mathcal{A}^\mathbb{C} \rightarrow \text{End } H,$$

удовлетворяющим условию нормировки и правилу сопряжения: $r(\bar{f}) = r(f)^*$ для любых $f \in \mathcal{A}$.

В случае бесконечномерных алгебр наблюдаемых более естественно иметь дело с проективными представлениями алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$. Имея такое представление алгебры $\mathcal{A}$, мы можем построить квантование расширенной системы $(M, \tilde{\mathcal{A}})$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ – подходящее центральное расширение алгебры $\mathcal{A}$.

Предположим, что M – гладкое симплектическое многообразие размерности $2n$ с симплектической формой ω , $C^\infty(M, \mathbb{R})$ – алгебра Пуассона. Нам хотелось бы проквантовать классическую систему, задаваемую парой $(M, C^\infty(M, \mathbb{R}))$.

Справедливо следующее хорошо известное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Предположим, что многообразие M удовлетворяет следующему условию квантования: класс когомологий $[\omega/(2\pi)]$ является целочисленным в $H^2(M, \mathbb{R})$. Тогда существует эрмитово линейное расслоение $L \rightarrow M$, называемое расслоением предквантования, с эрмитовой связностью ∇ , кривизна которой равна ω .*

Допустим, что наше фазовое пространство M удовлетворяет условию квантования, так что выполняется утверждение предложения. Определим пространство предквантования в виде

$$H = L^2(M, L; \omega^n),$$

т.е. как гильбертово пространство квадратично-интегрируемых сечений расслоения $L \rightarrow M$ со скалярным произведением, задаваемым формулой

$$(s_1, s_2) := \int_M \langle s_1(x), s_2(x) \rangle \omega^n,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает эрмитово произведение. Тогда KS-предквантование алгебры $\mathcal{A} = C^\infty(M, \mathbb{R})$ в пространстве H задается формулой

$$r_{\text{KS}}: \mathcal{A} \ni f \mapsto r(f) = f - i\nabla_{X_f}, \quad (6)$$

где X_f обозначает гамильтоново векторное поле, ассоциированное с наблюдаемой f . Формула (6) задает представление алгебры $\mathcal{A} = C^\infty(M, \mathbb{R})$ в пространстве предквантования H . К сожалению, это представление приводимо. “Физическое” объяснение его приводимости основано на принципе неопределенности Гейзенберга, согласно которому “физическое” пространство квантования не может содержать функций, зависящих от обеих переменных p_j, q_j в какой-либо паре (p_j, q_j) локальных канонических переменных (как это имеет место в пространстве предквантования $H = L^2(M, L; \omega^n)$).

2.2. Действие Костанта–Сурьо на пространствах Фока. Мы можем попытаться сделать представление (6) алгебры $\mathcal{A} = C^\infty(M, \mathbb{R})$ в пространстве предквантования H неприводимым, сужая его на “половину” пространства H , задаваемую каким-либо подпространством H , содержащим функции, зависящие только

от одной переменной из каждой пары (p_i, q_i) локальных канонических координат $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$.

Если фазовое пространство (M, ω) является кэлеровым, т.е. обладает комплексной структурой J , совместимой с ω , то имеется естественный выбор для указанной “половины” H . А именно, расслоение предквантования L в этом случае можно наделить голоморфной структурой, определяемой $\bar{\partial}$ -оператором, задаваемым $(0, 1)$ -компонентой $\nabla^{0,1}$ связности ∇ . Возьмем теперь в качестве “половины” H подпространство $L^2_{\bar{\partial}}(M, L; \omega^n)$ голоморфных квадратично-интегрируемых сечений расслоения $L \rightarrow M$. Тогда мы можем надеяться получить неприводимое представление алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$, сужая отображение KS-предквантования на подпространство $L^2_{\bar{\partial}}(M, L; \omega^n)$. К сожалению, этот простой подход оказывается эффективным только для весьма специальных систем, так как в большинстве случаев подпространство $L^2_{\bar{\partial}}(M, L; \omega^n)$ не будет инвариантно относительно действия операторов представления Костанта–Сурьо (KS-операторов). Примером специальной системы, для которой указанный подход приводит к успеху, может служить стандартная модель $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, наделенная гейзенберговой алгеброй наблюдаемых $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n}) =: \text{heis}(\mathbb{C}^n)$. Сужение представления Костанта–Сурьо на подпространство $L^2_{\bar{\partial}}(\mathbb{C}^n; \omega^n)$ голоморфных квадратично-интегрируемых сечений приводит в этом случае к хорошо известному неприводимому представлению Баргмана–Фока алгебры Гейзенберга $\text{heis}(\mathbb{C}^n)$ в пространстве $L^2_{\bar{\partial}}(\mathbb{C}^n; \omega^n)$.

Однако описанный метод неприменим для общих алгебр наблюдаемых, поскольку операторы KS-предквантования в общем случае не будут сохранять фоковские пространства голоморфных сечений. Продемонстрируем это на примере кэлерова фазового пространства (M, ω) , наделенного совместимой комплексной структурой J . Предположим, что (M, ω) удовлетворяет условию квантования и $L \rightarrow M$ – расслоение предквантования с эрмитовой связностью ∇ . Введем на L определенную выше голоморфную структуру, задаваемую $(0, 1)$ -компонентой связности ∇ . По определению фоковское пространство

$$F(M, J) := L^2_{\bar{\partial}}(M, L; \omega^n)$$

состоит из квадратично-интегрируемых сечений расслоения $L \rightarrow M$, голоморфных относительно указанной голоморфной структуры. Обозначим через $\mathcal{A}$ алгебру Ли гамильтонианов на M , которую можно отождествить (при условии, что M односвязно) с алгеброй Ли гамильтоновых векторных полей на M . Любая наблюдаемая $f \in \mathcal{A}$ порождает (локальную) однопараметрическую группу Γ симплектоморфизмов M , определяемую следующим образом:

$$\varphi_f^t := e^{2\pi i t X_f},$$

где X_f – гамильтоново векторное поле, соответствующее наблюдаемой f . Действие группы Γ на M может быть поднято до действия ее центрального расширения $\tilde{\Gamma}$ на L , порождаемого KS-оператором $r(f) \equiv r_{\text{KS}}(f)$. Точнее, поднятое действие задается в виде

$$\Phi_f^t := e^{2\pi i t r(f)} : L^2(M, L; \omega^n) \rightarrow L^2(M, L; \omega^n).$$

Однако эти операторы не сохраняют, вообще говоря, фоковское пространство $F(M, J)$, поскольку Φ_f^t отображает фоковское пространство $F(M, J)$ в фоковское пространство $F(M, J_f^t)$, ассоциированное с преобразованной комплексной структурой $J_f^t := \varphi_{f,\star}^t \circ J \circ \varphi_{f,\star}^{-t}$, которая в общем случае не эквивалентна J . Если структура J_f^t не эквивалентна структуре J , то соответствующий KS -оператор $r_{KS}(f)$ не допускает сужения на $F(M, J)$. Значит, если мы хотим построить квантование $(M, \mathcal{A})$ с помощью KS -представления, то необходимо найти метод канонического отождествления фоковских пространств $F(M, J)$ с различными J .

На этом строится основная идея твисторного квантования, представленная более подробно в разделе 3. Вместо того чтобы выбирать конкретную комплексную структуру на фазовом пространстве M , мы рассматриваем твисторное пространство всех допустимых комплексных структур на M . Исходная задача квантования допускает в твисторных терминах следующую переформулировку. С каждой допустимой комплексной структурой J на M связывается фоковское пространство $F(M, J)$, так что возникает фоковское расслоение $\mathcal{F}$ над пространством допустимых комплексных структур со слоем $F(M, J)$ в точке J . Предположим, что нам удалось построить плоскую эрмитову связность на этом расслоении. Тогда, пользуясь этой связностью, мы можем каноническим образом отождествить слои расслоения $\mathcal{F}$, т.е. фоковские пространства $F(M, J)$ с различными J .

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБР ПЕТЕЛЬ

3.1. Аффинные алгебры. Действие окружности S^1 играет важную роль в теории представлений алгебр петель. Для его учета удобно увеличить алгебру петель $L\mathfrak{g}$ до расширенной алгебры петель $\mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}$, где e_0 обозначает генератор вращения петель. Аналогичным образом мы увеличиваем группу петель LG до расширенной группы петель $U(1) \ltimes LG$, задаваемой полупрямым произведением LG с группой окружности $S^1 \equiv U(1)$.

Предположим, что $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ есть комплексная простая алгебра Ли, и зафиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Корневое разложение расширенной алгебры Ли $\mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно картановской подалгебры $\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ имеет вид

$$\mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}e_0 \oplus \left[\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} z^n \right] \oplus \left[\bigoplus_{(n, \alpha)} \mathfrak{g}_{\alpha} z^n \right], \quad (7)$$

где $\mathfrak{g}_{\alpha}$ – корневые подпространства алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Пары $a = (n, \alpha)$, в которых $n \in \mathbb{Z}$, а α – корень $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, называются корнями алгебры $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Их можно рассматривать как линейные функционалы на алгебре Ли $\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Если, в частности, ввести функционал $\delta \in (\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^*$, полагая

$$\delta(e_0) = 1, \quad \delta(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = 0,$$

то все множество корней алгебры $\mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно $\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ будет совпадать с

$$\hat{\Delta} = \{\alpha + n\delta : \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{n\delta : n \in \mathbb{Z}\},$$

где Δ – множество корней алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Соответственно множество положительных корней алгебры $\mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно $\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ отождествляется с

$$\hat{\Delta}^+ = \{\alpha + n\delta : \alpha \in \Delta, n > 0\} \cup \{n\delta : n > 0\} \cup \Delta^+,$$

где Δ^+ – множество положительных корней алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Если $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ есть система простых корней алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, A – старший вес в Δ^+ , то любой корень в $\hat{\Delta}^+$ будет записываться в виде

$$n_0\alpha_0 + n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$$

с целыми неотрицательными коэффициентами $n_0, n_1, \dots, n_l$, где $\alpha_0 := \delta - A$. Будем называть $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ *системой аффинных простых корней в $\hat{\Delta}$* .

Сопоставим произвольному корню $a = (n, \alpha)$ корневое подпространство $\mathfrak{g}_{(n, \alpha)}$ в $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, задаваемое в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{(n, \alpha)} &= \mathfrak{g}_{\alpha} z^n \quad \text{при} \quad \alpha \neq 0, \\ \mathfrak{g}_{(n, 0)} &= \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} z^n \quad \text{при} \quad \alpha = 0. \end{aligned}$$

Петлевой аналог разложения алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$,

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-,$$

где $\mathfrak{n}^{\pm}$ – нильпотентные подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ вида

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

имеет вид

$$L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus N^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}},$$

где

$$N^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}^+ \oplus \left[\bigoplus_{n>0} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cdot z^n \right], \quad N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}^- \oplus \left[\bigoplus_{n<0} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cdot z^n \right].$$

Петлевые аналоги борелевских подалгебр задаются как

$$B^{\pm} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus N^{\pm} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.$$

Центральное расширение $\widetilde{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ алгебры петель $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ определяется 2-коциклом на алгебре Ли $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, задаваемым формулой

$$\omega(\xi, \eta) = \omega_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(e^{i\theta}), \eta'(e^{i\theta}) \rangle d\theta, \quad \xi, \eta \in L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Как векторное пространство,

$$\widetilde{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}c$$

с коммутационными соотношениями

$$[\xi + sc, \eta + tc] = [\xi, \eta] + \omega(\xi, \eta)c$$

для $\xi, \eta \in L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $s, t \in \mathbb{C}$. Пусть $\widetilde{LG}_{\mathbb{C}}$ – центральное расширение группы петель $LG_{\mathbb{C}}$, соответствующее указанному центральному расширению алгебры петель $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Рассматриваемые здесь представления алгебры петель $L\mathfrak{g}$ и группы петель LG являются проективными и согласованы с S^1 -действием. Это означает, что они возникают в действительности из представлений аффинной алгебры

$$\widehat{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}e_0 \oplus \widetilde{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}c$$

и аффинной группы

$$\widehat{LG}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}^* \ltimes \widetilde{LG}_{\mathbb{C}}.$$

Корневое разложение аффинной алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ имеет вид

$$\widehat{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = \widehat{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \oplus N^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}},$$

где

$$\widehat{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}e_0 \oplus \widetilde{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}c.$$

Соответственно

$$\widehat{B^{\pm} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = \widehat{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \oplus N^{\pm} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.$$

Имея корень $\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$, мы можем продолжить его на $\widehat{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}^*$, полагая $\alpha(c) = \alpha(e_0) = 0$. Продолжим также функционал $\delta \in (\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^*$ на $\widehat{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}^*$, полагая $\delta(c) = 0$. Введем функционал $\beta \in \widehat{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}^*$:

$$\beta(c) = 1, \quad \beta(e_0) = 0, \quad \beta(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = 0.$$

Мы можем сопоставить любой системе $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ аффинных простых корней отвечающую ей систему кокорней $\alpha_0^{\vee}, \alpha_1^{\vee}, \dots, \alpha_l^{\vee}$, где $\alpha_j^{\vee}$, $j = 1, \dots, l$, – кокорень, ассоциированный с простым корнем α_j алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, а

$$\alpha_0^{\vee} = -A^{\vee} + \frac{2c}{\langle A, A \rangle}$$

– аффинный кокорень, ассоциированный со старшим корнем $A \in \Delta^+$.

Обозначим через $\{\omega_1, \dots, \omega_l\}$ систему фундаментальных весов алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, двойственную к системе простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Ассоциированная система $\{\widehat{\omega}_0, \widehat{\omega}_1, \dots, \widehat{\omega}_l\}$ фундаментальных весов аффинной алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$, двойственная к системе $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ аффинных простых корней, определяется следующим образом:

$$\widehat{\omega}_i(\alpha_k^{\vee}) = \delta_{ik} \quad \text{для} \quad 0 \leq i, k \leq l, \quad \widehat{\omega}_i(e_0) = 0.$$

Тогда

$$\widehat{\omega}_0 = \frac{1}{2} \langle A, A \rangle \beta, \quad \widehat{\omega}_j = \omega_j + \langle \omega_j, A \rangle \beta, \quad 1 \leq j \leq l.$$

3.2. Представления старшего веса аффинных алгебр. Предположим, что $\rho: \widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} \rightarrow V$ есть представление алгебры петель $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, т.е. $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ -модуль. Рассмотрим для любой линейной формы на $\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}$, т.е. элемента $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}^*$, подпространство

$$V_{\lambda} = \{v \in V: \rho(h)v = \lambda(h)v \text{ для } h \in \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}\}.$$

Если $V_{\lambda} \neq 0$, то λ называется весом ρ , а подпространство V_{λ} – весовым подпространством ρ , отвечающим λ . Любой вектор $v \in V_{\lambda} \setminus \{0\}$ называется весовым вектором ρ .

Функционал $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}^*$ называется целочисленным доминантным весом, если $\lambda(\alpha_i^{\vee})$ является целым неотрицательным числом для любого аффинного корня $\alpha_i^{\vee}$, $0 \leq i \leq l$. Любой такой вес может быть записан в виде

$$\lambda = n_0 \widehat{\omega}_0 + \dots + n_l \widehat{\omega}_l + s\delta, \quad (8)$$

где $n_i = \lambda(\alpha_i^{\vee})$, $0 \leq i \leq l$, $s = \lambda(e_0) \in \mathbb{C}$. Соответственно антидоминантный целочисленный вес $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}^*$ принимает неположительные целочисленные значения на аффинных корнях $\alpha_i^{\vee}$, $0 \leq i \leq l$, и может быть записан в форме (8) с неположительными целочисленными коэффициентами n_i , $0 \leq i \leq l$.

Мы можем продолжить вес $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}^*$ на борелевскую подалгебру $\widehat{B^+ \mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, полагая его равным нулю на $N^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Рассмотрим $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ -модуль вида

$$\widehat{V} \equiv \widehat{V}_{\lambda} = \mathcal{U}(\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}) \bigotimes_{\mathcal{U}(\widehat{B^+ \mathfrak{g}}_{\mathbb{C}})} \mathbb{C}_{\lambda},$$

где символ $\mathcal{U}$ обозначает универсальную обертывающую алгебру, $\mathbb{C}_{\lambda}$ – одномерный $\widehat{B^+ \mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ -модуль, т.е. комплексную прямую $\mathbb{C}$, наделенную действием борелевской подалгебры $\widehat{B^+ \mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, задаваемым соотношением $z \mapsto \lambda(b)z$ для $b \in \widehat{B^+ \mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}$. Поскольку

$$\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} = N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus \widehat{B^+ \mathfrak{g}}_{\mathbb{C}},$$

из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта вытекает, что

$$\mathcal{U}(\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{U}(N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{U}(\widehat{B^+ \mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}).$$

Тем самым имеется естественный изоморфизм

$$\widehat{V}_{\lambda} \cong \mathcal{U}(N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}_{\lambda}.$$

Обозначим через $V \equiv V_{\lambda}$ фактор $\widehat{V}$ по максимальному подмодулю в $\widehat{V}$, строго содержащемуся в $\widehat{V}$ (иными словами, по максимальному подмодулю, не содержащему $1 \otimes 1$). Это пространство V , наделенное естественным действием алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, называется стандартным представлением алгебры Ли $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ со старшим весом λ и весовым вектором $1 \otimes 1$.

Будем говорить, что представление $\rho: \widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End } V_{\lambda}$ аффинной алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ является представлением старшего веса $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}^*$, если существует вектор старшего веса $v_{\lambda} \in V_{\lambda}$ такой, что:

$$1) \rho(h)v_{\lambda} = \lambda(h)v_{\lambda} \text{ для любого } h \in \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}};$$

- 2) $\rho(n)v_\lambda = 0$ для любого $n \in N^+\mathfrak{g}_\mathbb{C}$;
 3) V_λ порождается векторами вида $\rho(b)v_\lambda$ с $b \in \widehat{B^-}\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

Вектор старшего веса v_λ играет роль, аналогичную вакууму для представления Гейзенберга.

Подобным же образом можно определить представления младшего веса аффинной алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$. Для этого нужно заменить в приведенном выше определении нильпотентную подалгебру $N^+\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ на нильпотентную подалгебру $N^-\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ и борелевскую подалгебру $\widehat{B^-}\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ на борелевскую подалгебру $\widehat{B^+}\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

Определенный выше стандартный $\widehat{L\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ -модуль V_λ является неприводимым представлением старшего веса алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$, если вес $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}_\mathbb{C}^*$ целочисленный доминантный. Более того, если значение $\lambda(e_0)$ вещественно, то V_λ допускает положительно определенное (контравариантное) эрмитово скалярное произведение. Обозначим через $H \equiv H_\lambda$ пополнение $V \equiv V_\lambda$ относительно этого скалярного произведения. Пространство H_λ будет играть роль фоковского пространства, ассоциированного с весом λ .

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ПЕТЕЛЬ

4.1. Неприводимые представления аффинных групп. Рассмотрим аффинную группу

$$\widehat{LG} := U(1) \ltimes \widetilde{LG}$$

и зафиксируем максимальный тор $\widehat{T}$ в $\widehat{LG}$ вида

$$\widehat{T} := U(1) \times T \times S.$$

Здесь $U(1) = S^1$ соответствует группе поворотов, T есть максимальный тор в группе G , а $S = S^1$ задает центральную подгруппу в группе $\widetilde{LG}$.

Любое неприводимое представление аффинной группы $\widehat{LG}$ обладает единственным старшим весом λ , являющимся характером максимального тора $\widehat{T}$. Указанный характер имеет вид

$$\lambda = (n, \lambda_0, h),$$

где $n \in \mathbb{Z}$ есть собственное значение оператора поворота e_0 , называемое энергией представления, λ_0 – характер T , $h \in \mathbb{Z}$ – собственное значение относительно действия центральной подгруппы, называемое уровнем представления. Старшие веса $\widehat{LG}$ являются целочисленными доминантными, классы изоморфизма неприводимых представлений группы $\widehat{LG}$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с множеством целочисленных доминантных весов.

Имеется аналогичное описание неприводимых представлений аффинной группы $\widehat{LG}$ в терминах младших весов.

4.2. Конструкция Бореля–Вейля. Рассмотрим пространство петель

$$\Omega_T G = LG/T = LG^\mathbb{C}/B^+G^\mathbb{C},$$

или, в терминах центральных расширений,

$$\Omega_T G = \widetilde{LG^{\mathbb{C}}} / \widetilde{B^+ G^{\mathbb{C}}}.$$

Предположим, что λ – младший вес максимального тора $\tilde{T} = T \times S$. Продолжим его на $\widetilde{B^+ G^{\mathbb{C}}}$, полагая $\lambda = 1$ на нильпотентной подгруппе $N^+ G^{\mathbb{C}}$ в

$$\widetilde{B^+ G^{\mathbb{C}}} = \widetilde{T^{\mathbb{C}}} \times N^+ G^{\mathbb{C}}.$$

Определим голоморфное линейное расслоение $L = L_\lambda$ над $\Omega_T G$ в виде

$$L = \widetilde{LG^{\mathbb{C}}} \times_{\widetilde{B^+ G^{\mathbb{C}}}} \mathbb{C} \rightarrow \Omega_T G = \widetilde{LG^{\mathbb{C}}} / \widetilde{B^+ G^{\mathbb{C}}},$$

где $\widetilde{B^+ G^{\mathbb{C}}}$ действует на комплексной прямой $\mathbb{C}$ с помощью характера λ :

$$\widetilde{B^+ G^{\mathbb{C}}} \ni b \mapsto \lambda(b)z.$$

Обозначим через $\Gamma = \Gamma_\lambda$ векторное пространство голоморфных сечений расслоения $L = L_\lambda$. Сечения $s \in \Gamma$ можно отождествить с голоморфными функциями $\dot{s}: \widetilde{LG^{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющими условию

$$\dot{s}(\gamma b^{-1}) = \lambda(b)\dot{s}(\gamma)$$

для любых $b \in \widetilde{B^+ G^{\mathbb{C}}}$, $\gamma \in \widetilde{LG^{\mathbb{C}}}$. Группа $\widetilde{LG^{\mathbb{C}}}$ действует естественным образом на расслоении L и на пространстве Γ , и это действие задает голоморфное представление группы $\widetilde{LG^{\mathbb{C}}}$ на Γ . Более того, пространство Γ является нетривиальным (т.е. содержит голоморфные сечения L , не равные тождественно нулю) тогда и только тогда, когда вес λ является целочисленным антидоминантным [2]. При этом условии можно показать, что соответствующее представление группы петель $\widetilde{LG}$ является неприводимым представлением $\widetilde{LG}$ младшего веса λ [2].

Заметим, что Γ содержит одномерное подпространство сечений, инвариантных относительно действия нильпотентной подгруппы $N^- G^{\mathbb{C}}$. Действительно, из представления (4) вытекает, что в $\Omega_T G$ имеется открытая плотная орбита, содержащая начало $o \in \Omega_T G$, которую можно отождествить с подгруппой $N^- G^{\mathbb{C}}$. Следовательно, любое $N^- G^{\mathbb{C}}$ -инвариантное сечение из Γ однозначно определяется своим значением в начале. Выберем в качестве вакуума вектор младшего веса $v = v_\lambda$, который совпадает с $N^- G^{\mathbb{C}}$ -инвариантным сечением в Γ , равным единице в начале o .

На Γ имеется эрмитово скалярное произведение, определенное на плотном подмножестве. Действительно, рассмотрим антидвойственное пространство $\bar{\Gamma}^*$ и определим комплексно-линейное отображение $\beta: \bar{\Gamma}^* \rightarrow \Gamma$, значение которого на элементе $\xi \in \bar{\Gamma}^*$ является сечением $\beta(\xi) \in \Gamma$, отождествляемым с функцией $\dot{\beta}(\xi)$ на $\widetilde{LG^{\mathbb{C}}}$, задаваемой равенством

$$\dot{\beta}(\xi)(\gamma) := \xi(\gamma \cdot v) \quad \text{для} \quad \gamma \in \widetilde{LG^{\mathbb{C}}}.$$

С помощью этого отображения определим эрмитово скалярное произведение элементов $\xi, \eta \in \bar{\Gamma}^*$, полагая

$$\langle \xi, \eta \rangle := \eta(\overline{\beta(\xi)}).$$

Построенное скалярное произведение на $\bar{\Gamma}^*$ положительно определено. Обозначим через $H = H_\lambda$ замыкание $\bar{\Gamma}^*$ относительно этого скалярного произведения, так что $\bar{\Gamma}^* \subset H \subset \Gamma$. Пространство H играет роль фоковского пространства, ассоциированного с младшим весом λ .

5. ТВИСТОРНОЕ КВАНТОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА $\Omega_T G$

Наша цель – проквантовать классическую систему $(\Omega_T G, \widehat{L\mathfrak{g}} \rtimes \text{vir})$ с фазовым пространством $\Omega_T G$ и алгеброй наблюдаемых $\mathcal{A}$, задаваемой полупрямым произведением аффинной алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}}$ и алгебры Вирасоро vir , являющейся центральным расширением алгебры $\text{Vect}(S^1)$ касательных векторных полей на S^1 . Воспользуемся для этого конструкцией Гудмана–Уолаха, дающей проективное действие группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$ на представлениях аффинной алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ и аффинной группы $\widehat{LG}^{\mathbb{C}}$.

5.1. Конструкция Гудмана–Уолаха. Продолжим естественное правое действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на $L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ на алгебру $\widehat{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ так, чтобы действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на центральной подалгебре в $\widehat{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ было тривиально. Для $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ обозначим действие f на $\widehat{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ через $\xi \mapsto \xi_f$ при $\xi \in \widehat{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$.

Для заданного представления младшего веса $(V, \pi) \equiv (V_\lambda, \pi_\lambda)$ алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$ определим действие $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ на (V, π) , полагая

$$f: \pi \mapsto \pi_f,$$

где $\pi_f(\xi)v := \pi(\xi_f)v$ при $\xi \in \widehat{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$, $v \in V$. Основным результатом работы Гудмана–Уолаха [1] утверждает, что представления π и π_f унитарно эквивалентны. Точнее, существует унитарное проективное действие σ группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на $H \equiv H_\lambda$ такое, что на плотном подпространстве $H^\infty \subset H$ выполняется равенство $\sigma(f)\pi_f(\xi)v = \pi(\xi)\sigma(f)v$ для любых $v \in H^\infty$, $f \in \text{Diff}_+(S^1)$, $\xi \in \widehat{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$.

5.2. Твисторное квантование пространства $\Omega_T G$. В п. 4.2 мы построили для любого младшего веса λ алгебры петель $\widehat{L\mathfrak{g}}$ голоморфное линейное расслоение $L \equiv L_\lambda \rightarrow \Omega_T G$ и пространство $\Gamma \equiv \Gamma_\lambda$ его голоморфных сечений, на котором реализуется представление группы $\widehat{LG}$ младшего веса λ , и обозначили через $H \equiv H_\lambda$ пополнение $\bar{\Gamma}^*$ по естественной норме.

Указанная конструкция зависит от комплексной структуры на пространстве $\Omega_T G$, задаваемой комплексным представлением

$$\Omega_T G = LG^{\mathbb{C}}/B^+G^{\mathbb{C}}.$$

Обозначим эту комплексную структуру через J_0 , а отвечающие ей пространства Γ_λ и H_λ через Γ_0 и H_0 соответственно, так что у нас имеется представление π_0 группы $\widehat{LG}$ в пространстве Γ_0 .

Изменяя эту комплексную структуру на структуру J_f , полученную из J_0 действием диффеоморфизма $f \in \text{Diff}_+(S^1)$, мы можем снова, пользуясь конструкцией Бореля–Вейля, реализовать представление младшего веса π_f группы $\widetilde{LG}$, отвечающее младшему весу λ , в пространстве Γ_f сечений расслоения L , голоморфных относительно комплексной структуры J_f на $\Omega_T G$. Обозначим соответствующее пополнение пространства $\bar{\Gamma}_f^*$ через H_f .

Согласно конструкции Гудмана–Уолаха имеется проективное унитарное действие

$$U_f: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_f$$

группы $\text{Diff}_+(S^1)$, сплетающее представления π_0 и π_f . Оно однозначно определяется условием нормировки, налагаемым на векторы младшего веса: $U_f v_0 = v_f$.

Тем самым имеется голоморфное гильбертово расслоение

$$H = \bigcup_{f \in \mathcal{S}} H_f$$

и проективное унитарное действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на H , задаваемое отображением $f \mapsto U_f$, которое накрывает естественное $\text{Diff}_+(S^1)$ -действие на $\mathcal{S}$. Инфинитезимальная версия этого действия дает проективное унитарное представление ρ младшего веса λ алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ в пространстве H_0 (явное описание этого представления дано в [1]).

Имея проективное представление ρ алгебры $\text{Vect}(S^1)$, мы можем построить $\text{Diff}_+(S^1)$ -инвариантную связность $\mathbf{A}$ на расслоении $H \rightarrow \mathcal{S}$, кривизна которой в начале $o \in \mathcal{S}$ совпадает с коциклом представления ρ . Указанный коцикл был вычислен в работах [5], [6]. Он задается в базисе $\{e_n := ie^{in\theta} d/d\theta\}$ комплексифицированной алгебры $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ формулой

$$[\rho(e_m), \rho(e_n)] - \rho([e_m, e_n]) = \frac{c(\mathfrak{g})}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n},$$

где

$$c(\mathfrak{g}) = \frac{h \dim \mathfrak{g}}{h + \kappa(\mathfrak{g})},$$

$\kappa(\mathfrak{g})$ есть двойственное число Кокстера алгебры $\mathfrak{g}$ (см., например, [7]).

Для построения связности $\mathbf{A}$ заметим, что имеется разложение алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ в прямую сумму

$$\text{Vect}(S^1) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{m}, \quad (9)$$

где $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ есть алгебра Ли группы $\text{Möb}(S^1)$, а $\mathfrak{m}$ отождествляется с касательным пространством $T_o \mathcal{S}$. Присоединенное действие группы $\text{Möb}(S^1)$ на $\text{Vect}(S^1)$ сохраняет подпространство $\mathfrak{m}$. Согласно общей теории инвариантных связностей ([8], гл. II.11) разложение (9) и проективное представление ρ определяют $\text{Diff}_+(S^1)$ -инвариантную связность $\mathbf{A}$ на расслоении H с кривизной, равной коциклу ρ .

5.3. Расслоение квантования. Обозначим через $K \rightarrow \mathcal{S}$ каноническое расслоение многообразия $\mathcal{S}$ [9]. Оно наделяется эрмитовой метрикой $\tilde{g}$, индуцированной кэлеровой метрикой g на $\mathcal{S}$. Кроме того, на K имеется естественное действие группы Вирасоро Vir , являющейся центральным расширением группы $\text{Diff}_+(S^1)$, которое накрывает действие $\text{Diff}_+(S^1)$ левыми сдвигами на $\mathcal{S}$. Каноническая связность на K , порождаемая метрикой $\tilde{g}$, инвариантна относительно указанного действия.

Обозначим через $K^{-1} \rightarrow \mathcal{S}$ двойственное антиканоническое расслоение на $\mathcal{S}$. Поскольку $\mathcal{S}$ стягиваемо, то антиканоническое расслоение K^{-1} допускает квадратный корень $K^{-1/2} \rightarrow \mathcal{S}$. Метрика $\tilde{g}$ на K индуцирует эрмитову метрику на $K^{-1/2}$. Группа Вирасоро Vir действует на $K^{-1/2}$, и каноническая связность $\mathbf{B}$ на $K^{-1/2} \rightarrow \mathcal{S}$, порождаемая указанной эрмитовой метрикой, инвариантна относительно этого действия. Кривизна связности $\mathbf{B}$ на $K^{-1/2} \rightarrow \mathcal{S}$ вычисляется в базисе $\{e_n\}$ по формуле [10]

$$R_{\mathbf{B}}(e_m, e_n) = -\frac{26}{12}(m^3 - m)\delta_{m, -n}. \quad (10)$$

Определим расслоение квантования $\mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{H} := H \otimes K^{-1/2} \rightarrow \mathcal{S}$$

и наделим его связностью тензорного произведения

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{B}.$$

Кривизна связности $\mathbf{C}$ в базисе $\{e_n\}$ равна

$$R_{\mathbf{C}}(e_m, e_n) = \frac{c(\mathfrak{g}) - 26}{12}(m^3 - m)\delta_{m, -n}$$

и равна нулю при $c(\mathfrak{g}) = 26$. При этом условии мы получаем плоскую эрмитову связность на расслоении $\mathcal{H}$, дающую решение задачи твисторного квантования для нашей классической системы $(\Omega_T G, \mathcal{A} = \widehat{L\mathfrak{g}} \rtimes \text{vir})$.

Как можно получить решение исходной задачи дираковского квантования для системы $(\Omega_T G, \mathcal{A})$ исходя из найденного решения задачи твисторного квантования? Как мы уже отмечали ранее, KS-операторы, ассоциированные с элементами алгебры Ли vir группы Вирасоро Vir , не сохраняют, вообще говоря, пространства H_0 и $\mathcal{H}_0$. Точнее, симплектоморфизмы φ^t , порожденные этими элементами, переводят указанные пространства в пространства H_t и $\mathcal{H}_t$ соответственно, отвечающие комплексной структуре $J_t := \varphi_*^t \circ J_0 \circ (\varphi_*^t)^{-1}$. Интегрируя построенную плоскую эрмитову связность на расслоении предквантования $\mathcal{H}$, можно определить унитарный оператор U_t , отождествляющий $\mathcal{H}_t$ с $\mathcal{H}_0$. Композиция U_t с элементами алгебры vir , действующая теперь в пространстве $\mathcal{H}_0$, даст нам после дифференцирования требуемое представление алгебры Вирасоро vir в пространстве $\mathcal{H}_0$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 06-02-04012, № 08-01-00014), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2008.1) и научной программы Президиума РАН “Нелинейная динамика”.

Список литературы

- [1] R. Goodman, N. R. Wallach, *J. Reine Angew. Math.*, **347** (1984), 69–133.
- [2] Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990.
- [3] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1978.
- [4] А. Г. Сергеев, *Кэлэрова геометрия пространства петель*, МНЦМО, М., 2001.
- [5] J. Mickelsson, *Comm. Math. Phys.*, **112**:4 (1987), 653–661.
- [6] J. Mickelsson, *Current Algebras and Groups*, Plenum Monogr. Nonlinear Phys., Plenum Press, New York, 1989.
- [7] А. Л. Онищик, Е. Б. Винберг, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.
- [8] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 1, 2, Наука, М., 1981.
- [9] G. Segal, *Comm. Math. Phys.*, **80**:3 (1981), 301–342.
- [10] M. J. Bowick, A. Lahiri, *J. Math. Phys.*, **29**:9 (1988), 1979–1981.

Поступила в редакцию 29.05.2008