Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Кластеризация идеального газа в наноструктурах как явление типа бозе-конденсации в асимптотически вероятностно квантованном пространстве, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 3, 468–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 03:11:20

© 2008 г.

В. П. Маслов*

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В НАНОСТРУКТУРАХ КАК ЯВЛЕНИЕ ТИПА БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИИ В АСИМПТОТИЧЕСКИ ВЕРОЯТНОСТНО КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Приводится модель квантования пространства, на основе которой можно трактовать явление кластеризации частиц идеального газа в наноструктурах с фрактальной размерностью.

Ключевые слова: квантование пространства, фрактальная размерность, наноструктуры, кластеризация, идеальный газ, бозе-конденсация, универсальная константа.

Посвящается Василию Сергеевичу Владимирову

Не уменьшая общности, мы можем считать, что сосуд, в котором сосредоточен газ в наноструктуре, имеет форму шара. Если размерность наноструктуры d фрактальная, причем $2 < d \leq 3$, то для шара радиуса R это означает, что объем его наноструктуры V_d равен

$$V_d = 4\pi^2 \int_0^R r^{d-1} dr = \frac{4}{d} \pi^2 R^d, \quad 2 < d \leq 3. \quad (1)$$

Разобьем пространство импульсов на большое число областей аналогично формуле (13) работы [1]:

$$E_l \leq \frac{p^2}{2m} \leq E_{l+1}, \quad l = 1, \dots, s,$$

где $E_{l+1} - E_l = E_0 > 0$, $p \in \mathbb{R}^d$, так, что

$$4\pi^2 \int_{E_l}^{E_{l+1}} \frac{p^2}{2m} |p|^{d-1} d|p| \approx \text{const} (E_{l+1}^{(d+2)/2} - E_l^{(d+2)/2}).$$

Пусть $\{N_l\}$, $l = 1, \dots, s$, – неупорядоченная выборка с возвращением в ячейку $E_{l+1} - E_l$, т.е. неупорядоченная выборка с возвращением из N шаров по ячейкам (“энергетическим ящикам”). Для фиксированного достаточно большого M положим

$$\sum_{l=1}^s N_l E_l q_l \leq M, \quad M \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty, \quad q_l = \begin{cases} \lfloor l^{d/2} \rfloor & \text{при четном } l, \\ \lfloor l^{d/2} \rfloor + 1 & \text{при нечетном } l. \end{cases}$$

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Пусть $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало и $b = b(M)$ – положительное решение уравнения

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j q_j}{e^{bj} - 1}. \quad (2)$$

В работе [2] (предложения 6 и 7) доказано, что при $M \rightarrow \infty$

$$M \simeq b^{-d/2-1}, \quad d \geq 1 + \varepsilon, \\ \bar{N}_j = \frac{q_j}{e^{bj} - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \mathbf{N} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{e^{bj} - 1} \simeq C(d) b^{-d}. \quad (3)$$

Более точно

$$\mathbf{N} = M^{\frac{d}{2}/(\frac{d}{2}+1)} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\zeta(\frac{d}{2})}{(\Gamma(\frac{d}{2}+1)\zeta(\frac{d}{2}+1))^{\frac{d}{2}/(\frac{d}{2}+1)}}. \quad (4)$$

Из приведенных выше соотношений и теорем, доказанных в работе [3], следует

ТЕОРЕМА. *Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка*

$$\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^l \frac{j(N_j - \bar{N}_j)}{M} > \sqrt{\frac{\ln \mathbf{N}}{\mathbf{N}}} \Psi(\mathbf{N})\right) \leq C_k \mathbf{N}^{-k}, \quad (5)$$

где $\Psi(x)$ – фиксированная положительная функция, которая стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$.

Отсюда следует, что $\mathbf{N}$ определено с точностью до $\sqrt{\mathbf{N} \ln \mathbf{N}} \Psi(\mathbf{N})$ (т.е. уточнено правило $\sqrt{\mathbf{N}}$ Шредингера [4], [5]).

Положим $b = \varsigma/R^2\Theta$, где Θ – температура, ς – универсальная константа, зависящая только от E_0 и M . Если для всех размерностей выбирать одни и те же M и E_0 , то ς не будет зависеть от фрактальной размерности. Тогда

$$\mathbf{N} \sim C(d) \frac{R^d}{\varsigma^{d/2}} \Theta^{d/2}.$$

А в силу того, что $R^d/d \sim V$,

$$\mathbf{N} = \frac{dC(d)V_d\Theta^{d/2}}{\varsigma^{d/2}}.$$

В этом случае можно сказать, что объем V_d “асимптотически вероятно” проквантован, поскольку имеется $\mathbf{N}$ не склеенных друг с другом точек внутри этого объема, которые как бы являются узлами каркаса объема. Частицы, которые заполняют объем, могут располагаться только в узлах каркаса, и новые дополнительные частицы $\mathbf{N} + \Delta\mathbf{N}$, если $\Delta\mathbf{N} \sim \mathbf{N}^\alpha$, $\alpha > 1/2$, могут добавиться только в эти узлы, т.е. образовывать димеры, тримеры и другие кластеры [1].

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 251–272.
- [2] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 232–263.
- [3] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, *Матем. заметки*, **83**:3 (2008), 381–401.
- [4] Э. Шредингер, *Что такое жизнь? С точки зрения физика*, Атомиздат, М., 1972.
- [5] В. П. Маслов, *Квантовая экономика*, Наука, М., 2006.