Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Харнад, А. Ю. Орлов, Фермионный подход к вычислению интегралов от рациональных симметрических функций, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 1, 23–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:41:20

© 2009 г.

Дж. Харнад*, А. Ю. Орлов†

ФЕРМИОННЫЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Фермионная конструкция для статистической суммы двухматричной модели используется для вычисления интегралов от рациональных симметрических функций. Этот подход дополнителен к подходу, использованному в предыдущей работе авторов, в которой эти интегралы вычислялись напрямую. Детерминантные выражения, полученные с помощью теоремы Вика, совпадают с выражениями, полученными в терминах биортогональных многочленов.

Ключевые слова: случайные матрицы, двухматричные модели, многократные интегралы, факторизация, метод одевания, характеристические полиномы, свободные фермионы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассмотрим следующий интеграл:

$$\mathbf{I}_N^{(2)}(\xi, \zeta, \eta, \mu) := \frac{1}{\mathbf{Z}_N^{(2)}} \iint d\mu(x_1, y_1) \cdots \iint d\mu(x_N, y_N) \Delta_N(x) \Delta_N(y) \times \\ \times \prod_{a=1}^N \frac{\prod_{\alpha=1}^{L_1} (\xi_\alpha - x_a) \prod_{\beta=1}^{L_2} (\zeta_\beta - y_a)}{\prod_{j=1}^{M_1} (\eta_j - x_a) \prod_{k=1}^{M_2} (\mu_k - y_a)}, \quad (1.1)$$

где

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{M_1}), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{L_1}), \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_{M_2}), \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{L_2}),$$

а

$$\Delta_N(x) := \prod_{i>j}^N (x_i - x_j), \quad \Delta_N(y) := \prod_{i>j}^N (y_i - y_j)$$

– определители Вандермонда,

$$\mathbf{Z}_N^{(2)} := \iint d\mu(x_1, y_1) \cdots \iint d\mu(x_N, y_N) \Delta_N(x) \Delta_N(y), \quad (1.2)$$

*Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal; Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, Montréal, Québec, Canada.
E-mail: harnad@crm.umontreal.ca

†Институт Океанологии РАН, Москва, Россия. E-mail: orlovs@wave.sio.rssi.ru

– константа нормировки, которая в контексте двухматричных моделей интерпретируется как статистическая сумма. Здесь $d\mu(x, y)$ представляет собой меру (в общем случае комплексную), заданную на конечном множестве произведений кривых в плоскостях комплексных переменных x и y .

Известно (см., например, [1]), что этот интеграл представим в виде определителя матрицы размера $N \times N$:

$$\mathbf{I}_N^{(2)}(\xi, \zeta, \eta, \mu) = \frac{N!}{\mathbf{Z}_N^{(2)}} \det \left(\iint \frac{\prod_{\alpha=1}^{L_1} (\xi_\alpha - x) \prod_{\beta=1}^{L_2} (\zeta_\beta - y)}{\prod_{j=1}^{M_1} (\eta_j - x) \prod_{k=1}^{M_2} (\mu_k - y)} d\mu(x, y) x^j y^k \right)_{0 \leq j, k \leq N-1}, \quad (1.3)$$

тем не менее для некоторых целей оказывается более полезным выразить его в виде детерминанта матрицы, размер которой не зависит от N .

Задача вычисления интегралов от таких симметрических функций N переменных оказывается важной в контексте матричных моделей [2], в которых N определяет число собственных значений. Представление интегралов, задающих корреляционные функции и математические ожидания, в виде определителей матриц, размер которых не зависит от N , оказывается полезным, например, при исследовании пределов при $N \rightarrow \infty$. Такие интегралы в случае одноматричных моделей исследовались в работах [3]–[7], а в случае комплексных, нормальных или двухматричных моделей [8] – в работах [6], [9], [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Чтобы сравнить наши результаты с результатами работ [6], [9] о комплексных интегралах, переменные $\{x_a, y_a\}_{1 \leq a \leq N}$ необходимо заменить на комплексно сопряженные пары $\{z_a, \bar{z}_a\}_{1 \leq a \leq N}$, а области интегрирования выбрать лежащими в N копиях комплексной плоскости.

Настоящая работа дополняет работу [10], в которой такие интегралы вычислялись “прямым” методом, основанным на разложениях на простые дроби и на тождестве Коши–Бине. В работе [10] и в настоящей статье мы даем сжатое изложение и новые выводы как ранее известных, так и новых результатов с помощью двух различных методов.

Подход настоящей работы основан на построении фермионных представлений для интегралов от рациональных симметрических функций, введенных в работе [11], с помощью двухкомпонентных фермионов (описание в терминах свободных двухкомпонентных фермионов, используемое в работе, взято из статьи [12]). Двухкомпонентные фермионы были использованы в работе [13] при описании одноматричной модели (модели эрмитовых матриц, также называемой унитарным ансамблем случайных матриц)¹⁾. Это представление отличается от представлений, использованных ранее в контексте матричных моделей в работах [14]–[16], в которых представления были основаны на описании в терминах однокомпонентных фермионов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Хотя имеет место тесная связь между матричными интегралами, ортогональными многочленами и подходом спектрального преобразования

¹⁾ Авторы благодарны А. Д. Миронову за это замечание.

в теории интегрируемых систем, в данной работе мы не уделяем большого внимания этому факту, связанному с теорией деформаций мер. Наша отправная точка тем не менее схожа с той, которая была выбрана в статье [11], где рассматривалась теория деформаций и использовался фермионный подход к интегрируемым системам, развитый в [12]. Связь этих результатов с объектами, возникающими в подходе спектрального преобразования, вкратце объясняется в приложениях, в которых биортогональные многочлены и их образы при преобразовании Гильберта интерпретируются как функции Бейкера и присоединенные функции Бейкера.

Пусть мера $d\mu(x, y)$ такова, что элементы матрицы бимоментов конечны:

$$B_{nm} := \iint d\mu(x, y) x^n y^m < \infty, \quad n, m \geq 0. \quad (1.4)$$

Мы предполагаем, что интегралы вычисляются на специальных линейных комбинациях произведений кривых интегрирования. Предположим, что $(N \times N)$ -подматрица $(B_{nm})_{0 \leq n, m \leq N-1}$ несингулярна для всех $N \geq 1$. Тогда можно использовать процесс Грама–Шмидта для построения бесконечной последовательности пар биортогональных многочленов $\{P_n(x), S_n(y)\}_{n \geq 0}$, удовлетворяющих условиям

$$\iint d\mu(x, y) P_n(x) S_m(y) = \delta_{nm} \quad (1.5)$$

и нормированных так, чтобы обеспечить равенство коэффициентов при ведущих членах:

$$P_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{h_n}} + O(x^{n-1}), \quad S_n(y) = \frac{y^n}{\sqrt{h_n}} + O(y^{n-1}). \quad (1.6)$$

Предположим, что преобразования Гильберта от этих биортогональных многочленов,

$$\tilde{P}_n(\mu) := \iint d\mu(x, y) \frac{P_m(x)}{\mu - y}, \quad \tilde{S}_n(\eta) := \iint d\mu(x, y) \frac{S_m(x)}{\eta - x}, \quad (1.7)$$

существуют при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда легко показать, что имеет место следующая формула, выражающая $\mathbf{Z}_N^{(2)}$ через нормировочные множители h_n при постоянных ведущих членах (см., например, [2]):

$$\mathbf{Z}_N^{(2)} = N! \det(B_{jk})_{1 \leq j, k \leq N} = N! \prod_{n=0}^{N-1} h_n. \quad (1.8)$$

Положив $N_1 := N + L_1 - M_1$, $N_2 := N + L_2 - M_2$, рассмотрим различные случаи. В каждом случае ответ для $\mathbf{I}_N^{(2)}(\xi, \zeta, \eta, \mu)$ записывается в виде определителя некоторой матрицы G .

1. При $N_2 \geq N_1 \geq 0$ ответ получается с помощью формул (5.5)–(5.7). При этом G представляет собой матрицу размера $(L_2 + M_1) \times (L_2 + M_1)$.

2. При $N_1 \leq 0 \leq N_2$ ответ получается с помощью формул (5.24), (5.25). При этом G представляет собой матрицу размера $(L_2 + M_1) \times (L_2 + M_1)$.

3. При $N_1 \leq N_2 \leq 0$ ответ получается с помощью формул (5.31), (5.32). При этом G представляет собой матрицу размера $(M_1 + M_2 - N) \times (M_1 + M_2 - N)$.

Случаи $N_1 \geq N_2 \geq 0$, $N_2 \leq 0 \leq N_1$ и $N_2 \leq N_1 \leq 0$ сводятся к указанным выше с помощью взаимных замен $L_1 \leftrightarrow L_2$, $M_1 \leftrightarrow M_2$, $N_1 \leftrightarrow N_2$, $\xi \leftrightarrow \zeta$, $\mu \leftrightarrow \eta$, $P_n \leftrightarrow S_n$ и $\tilde{P}_n \leftrightarrow \tilde{S}_n$ в окончательных выражениях, ср. соответственно формулы (5.5)–(5.7) с (5.14)–(5.16), формулы (5.24), (5.25) с (5.26), (5.27) и формулы (5.31), (5.32) с (5.33), (5.34).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Мы предполагаем, что кривые носителя меры в интегралах не проходят через точки $\{\eta_j, \mu_k\}_{1 \leq j \leq M_1, 1 \leq k \leq M_2}$. Интегралы как функции параметров можно расширить в комплексную плоскость этих параметров с помощью аналитического продолжения, но они при этом могут стать многозначными. Однако если меры $d\mu(x, y)$ убывают достаточно быстро при приближении точек $\{\eta_j, \mu_k\}$ к кривым носителя, то интегралы, рассматриваемые в данной работе, оказываются однозначными. Если произвести замены $\{x_a, y_a\}_{1 \leq a \leq N} \mapsto \{z_a, \bar{z}\}_{1 \leq a \leq N}$, то для сравнения наших результатов с результатами работ [6], [9] необходимо предположить, что соответствующие меры $d\mu(z, \bar{z})$ в комплексной плоскости убывают в точках $\{z = \eta_j, \bar{z} = \mu_k\}$ достаточно быстро, чтобы обеспечить сходимость интегралов.

В следующих разделах интеграл (1.1) представляется как вакуумное ожидание от некоторого фермионного выражения, использующего двухкомпонентные фермионы (см. формулу (3.3) ниже). Для вычисления этого вакуумного ожидания применяется теорема Вика, выражающая вакуумные средние от произведений линейных комбинаций фермионов через определитель матрицы, элементы которой представляют собой попарные вакуумные ожидания. Поскольку выражение (3.3) не приведено к виду вакуумного ожидания от произведения фермионов, мы используем набор приемов (производим канонические преобразования фермионов и переписываем заряженные вакуумные векторы в подходящем виде), которые также помогают уменьшить окончательное число фермионов под знаком вакуумного среднего и тем самым уменьшить, насколько возможно, размер матрицы G .

Работа организована следующим образом. Сначала мы напомним некоторые факты, касающиеся алгебры свободных фермионов, в том числе теорему Вика. Потом мы отождествляем интеграл $\mathbf{I}_N^{(2)}(\xi, \zeta, \eta, \mu)$ с определенным вакуумным ожиданием (см. формулу (3.6)). После некоторых вводных замечаний мы вводим с помощью соотношений (4.15) одетые фермионы $b_\alpha, \bar{b}_\alpha$ для того, чтобы адаптировать формулу (3.6) к применению теоремы Вика в ее детерминантном виде. Затем отдельно рассматриваем каждый из трех случаев $N_2 \geq N_1 \geq 0$, $N_2 \leq 0 \leq N_1$ и $N_1 \leq N_2 \leq 0$. В первом случае (который оказывается наиболее трудным) вводим фермионные операторы $a_\alpha, \bar{a}_\alpha$. Они получаются из $b_\alpha, \bar{b}_\alpha$ с помощью некоторого сопряжения (см. (5.3)), и их вакуумные ожидания, вычисленные с помощью теоремы Вика, дают окончательный ответ, выражаемый формулами (5.5)–(5.7); этот ответ мы иллюстрируем шестью примерами. Во втором случае вместо $a_\alpha, \bar{a}_\alpha$ аналогичным образом используем операторы $b_\alpha, \bar{b}_\alpha$. Наконец, в третьем случае вместо операторов $a_\alpha, \bar{a}_\alpha$ применяем операторы $c_\alpha, \bar{c}_\alpha$, введенные в формулах (5.29).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Аналогично можно получить результаты для N -кратных интегралов, возникающих в одноматричных моделях, если считать меру пропорциональной дельта-функции Дирака $\delta(x - y)$. Так как этот специальный случай здесь подробно не рассматривается, далее мы будем писать $\mathbf{I}_N$ вместо $\mathbf{I}_N^{(2)}$.

2. ОБЗОР ТЕОРИИ СВОБОДНЫХ ФЕРМИОНОВ

В этом разделе приведены сведения об алгебре одно- и двухкомпонентных свободных фермионов. Мы следуем ввводной части работы [11]; более подробное изложение можно найти в работах [11] или [12], [17].

2.1. Однокомпонентные фермионы. Обозначим через $\mathcal{A}$ комплексную клиффордову алгебру над $\mathbb{C}$, порождаемую заряженными свободными фермионами $\{f_i, \bar{f}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющими антикоммутационным соотношениям

$$[f_i, f_j]_+ = [\bar{f}_i, \bar{f}_j]_+ = 0, \quad [f_i, \bar{f}_j]_+ = \delta_{ij}, \quad (2.1)$$

где $[\cdot, \cdot]_+$ – антикоммутатор. Будем называть элементы линейной части

$$W := \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} f_m \right) \oplus \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} \bar{f}_m \right) \quad (2.2)$$

свободными фермионами. Фермионные свободные поля

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k x^k, \quad \bar{f}(y) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{f}_k y^{-k-1} \quad (2.3)$$

можно рассматривать как производящие функции для $f_j, \bar{f}_j$.

У этой клиффордовой алгебры имеется стандартное представление пространства Фока F и дуального пространства $\bar{F}$ (см. [11]), которое содержит единственные вакуумные векторы $|0\rangle$ и $\langle 0|$ соответственно, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$\begin{aligned} f_m |0\rangle &= 0 \quad \text{при } m < 0, & \bar{f}_m |0\rangle &= 0 \quad \text{при } m \geq 0, \\ \langle 0| f_m &= 0 \quad \text{при } m \geq 0, & \langle 0| \bar{f}_m &= 0 \quad \text{при } m < 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Пространства Фока F и $\bar{F}$ взаимно дуальны с эрмитовым спариванием, задаваемым линейной формой $\langle 0| \cdot |0\rangle$ на $\mathcal{A}$, называемой *вакуумным ожиданием*. Вакуумное ожидание удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \langle 0|1|0\rangle &= 1, & \langle 0|f_m \bar{f}_m|0\rangle &= 1 \quad \text{при } m < 0, & \langle 0|\bar{f}_m f_m|0\rangle &= 1 \quad \text{при } m \geq 0, \\ \langle 0|f_n|0\rangle &= \langle 0|\bar{f}_n|0\rangle = \langle 0|f_m f_n|0\rangle = \langle 0|\bar{f}_m \bar{f}_n|0\rangle = \langle 0|f_m \bar{f}_n|0\rangle = 0 & \text{при } m \neq n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из теоремы Вика следует, что для всякого конечного набора элементов $\{w_k \in W\}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \langle 0|w_1 \dots w_{2n+1}|0\rangle &= 0, \\ \langle 0|w_1 \dots w_{2n}|0\rangle &= \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn } \sigma \langle 0|w_{\sigma(1)} w_{\sigma(2)}|0\rangle \dots \langle 0|w_{\sigma(2n-1)} w_{\sigma(2n)}|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь сумма берется по всем перестановкам σ , для которых

$$\sigma(1) < \sigma(2), \dots, \sigma(2n-1) < \sigma(2n), \quad \sigma(1) < \sigma(3) < \dots < \sigma(2n-1).$$

Если $\{w_i\}_{1 \leq i \leq N}$ являются линейными комбинациями только фермионов f_j , $j \in \mathbb{Z}$, а $\{\bar{w}_i\}_{1 \leq i \leq N}$ – линейными комбинациями только фермионов $\bar{f}_j$, $j \in \mathbb{Z}$, то из (2.6) вытекает, что

$$\langle 0 | w_1 \dots w_N \bar{w}_N \dots \bar{w}_1 | 0 \rangle = \det(\langle 0 | w_i \bar{w}_j | 0 \rangle)_{1 \leq i, j \leq N}. \quad (2.7)$$

Следуя работам [12], [17], при всех $N \in \mathbb{Z}$ можно также ввести состояния

$$\langle N | := \langle 0 | C_N, \quad | N \rangle := \bar{C}_N | 0 \rangle, \quad (2.8)$$

где

$$C_N := \begin{cases} \bar{f}_0 \dots \bar{f}_{N-1}, & \text{если } N > 0, \\ f_{-1} \dots f_N, & \text{если } N < 0, \\ 1, & \text{если } N = 0; \end{cases} \quad \bar{C}_N := \begin{cases} f_{N-1} \dots f_0, & \text{если } N > 0, \\ f_{-1} \dots f_N, & \text{если } N < 0, \\ 1, & \text{если } N = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Состояния $\langle N | := \langle 0 | C_N$ и $| N \rangle := \bar{C}_N | 0 \rangle$ называются соответственно *левым* и *правым* *заряженными вакуумными векторами с зарядом N* . Из соотношений

$$\langle 0 | \bar{f}_{N-k} f(x_i) | 0 \rangle = x_i^{N-k}, \quad \langle 0 | f_{-N+k-1} \bar{f}(y_i) | 0 \rangle = y_i^{N-k}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (2.10)$$

и равенства (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} \langle N | f(x_n) \dots f(x_1) | 0 \rangle &= \delta_{n,N} \Delta_N(x), \\ \langle -N | \bar{f}(y_n) \dots \bar{f}(y_1) | 0 \rangle &= \delta_{n,N} \Delta_N(y), \quad N \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для генераторов свободных фермионов с $|x| \neq |y|$ имеем

$$\langle 0 | f(x) \bar{f}(y) | 0 \rangle = \frac{1}{x - y}. \quad (2.12)$$

Заметим, что выражение в правой части равенства на самом деле определено в соответствии с (2.5) как бесконечный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} y^n x^{-n-1}$, который сходится только при $|x| < |y|$. Тем не менее формулу (2.12) можно считать справедливой во всей области определения x и y (при $|x| \neq |y|$) на основании аналитического продолжения.

Из теоремы Вика следует, что

$$\langle n - m | f(x_n) \dots f(x_1) \bar{f}(y_m) \dots \bar{f}(y_1) | 0 \rangle = \frac{\Delta_n(x) \Delta_m(y)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (x_i - y_j)}. \quad (2.13)$$

2.2. Двухкомпонентные фермионы. Формализм двухкомпонентных фермионов получается с помощью следующей перенумерации приведенной выше конструкции:

$$\begin{aligned} f_n^{(\alpha)} &:= f_{2n+\alpha-1}, & \bar{f}_n^{(\alpha)} &:= \bar{f}_{2n+\alpha-1}, \\ f^{(\alpha)}(z) &:= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^k f_k^{(\alpha)}, & \bar{f}^{(\alpha)}(z) &:= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-k-1} \bar{f}_k^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При этом соотношения (2.1) принимают вид

$$[f_n^{(\alpha)}, f_m^{(\beta)}]_+ = [\bar{f}_n^{(\alpha)}, \bar{f}_m^{(\beta)}]_+ = 0, \quad [f_n^{(\alpha)}, \bar{f}_m^{(\beta)}]_+ = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{nm}. \quad (2.15)$$

Обозначим правый и левый вакуумный векторы соответственно как $|0, 0\rangle := |0\rangle$ и $\langle 0, 0| := \langle 0|$. Тогда соотношения (2.4) принимают вид ($\alpha = 1, 2$)

$$\begin{aligned} f_m^{(\alpha)}|0, 0\rangle &= 0 \quad \text{при} \quad m < 0, & \bar{f}_m^{(\alpha)}|0, 0\rangle &= 0 \quad \text{при} \quad m \geq 0, \\ \langle 0, 0|f_m^{(\alpha)} &= 0 \quad \text{при} \quad m \geq 0, & \langle 0, 0|\bar{f}_m^{(\alpha)} &= 0 \quad \text{при} \quad m < 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из соотношений (2.5) следует, что для $\alpha, \beta = 1, 2$

$$\begin{aligned} \langle 0, 0|f_n^{(\alpha)}f_m^{(\beta)}|0, 0\rangle &= \langle 0, 0|\bar{f}_n^{(\alpha)}\bar{f}_m^{(\beta)}|0, 0\rangle = 0, & n, m \in \mathbb{Z}, \\ \langle 0, 0|f_n^{(\alpha)}\bar{f}_m^{(\beta)}|0, 0\rangle &= \delta_{\alpha\beta}\delta_{nm}, & m \in \mathbb{Z}, \quad n < 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Опять же следуя работам [12], [17], введем состояния

$$\langle n^{(1)}, n^{(2)}| := \langle 0, 0|C_{n^{(1)}}C_{n^{(2)}}, \quad |n^{(1)}, n^{(2)}\rangle := \bar{C}_{n^{(2)}}\bar{C}_{n^{(1)}}|0, 0\rangle, \quad (2.18)$$

где ($\alpha = 1, 2$)

$$\begin{aligned} C_{n^{(\alpha)}} &:= \begin{cases} \bar{f}_0^{(\alpha)} \dots \bar{f}_{n^{(\alpha)}-1}^{(\alpha)}, & \text{если } n^{(\alpha)} > 0, \\ f_{-1}^{(\alpha)} \dots f_{n^{(\alpha)}}^{(\alpha)}, & \text{если } n^{(\alpha)} < 0, \\ 1, & \text{если } n^{(\alpha)} = 0; \end{cases} \\ \bar{C}_{n^{(\alpha)}} &:= \begin{cases} f_{n^{(\alpha)}-1}^{(\alpha)} \dots f_0^{(\alpha)}, & \text{если } n^{(\alpha)} > 0, \\ \bar{f}_{n^{(\alpha)}}^{(\alpha)} \dots \bar{f}_{-1}^{(\alpha)}, & \text{если } n^{(\alpha)} < 0, \\ 1, & \text{если } n^{(\alpha)} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Будем называть состояния $\langle n^{(1)}, n^{(2)}|$ и $|n^{(1)}, n^{(2)}\rangle$ *левым и правым заряженными вакуумными векторами с зарядами* ($n^{(1)}, n^{(2)}$) *соответственно*.

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} f_m^{(1)}|n, *\rangle &= 0 \quad \text{при} \quad m < n, & \bar{f}_m^{(1)}|n, *\rangle &= 0 \quad \text{при} \quad m \geq n, \\ f_m^{(2)}|*, n\rangle &= 0 \quad \text{при} \quad m < n, & \bar{f}_m^{(2)}|*, n\rangle &= 0 \quad \text{при} \quad m \geq n, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \langle n, *|f_m^{(1)} &= 0 \quad \text{при} \quad m \geq n, & \langle n, *|\bar{f}_m^{(1)} &= 0 \quad \text{при} \quad m < n, \\ \langle *, n|f_m^{(2)} &= 0 \quad \text{при} \quad m \geq n, & \langle *, n|\bar{f}_m^{(2)} &= 0 \quad \text{при} \quad m < n. \end{aligned} \quad (2.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если сдвинуть заряды вакуумных векторов следующим образом:

$$\langle *, *| \rightarrow \langle *, * + n|, \quad |*, *\rangle \rightarrow |*, * + n\rangle \quad (2.22)$$

и одновременно произвести перенумерацию

$$f_i^{(2)} \rightarrow f_{i+n}^{(2)}, \quad \bar{f}_i^{(2)} \rightarrow \bar{f}_{i+n}^{(2)}, \quad i, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.23)$$

то вакуумное ожидание не изменится.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В дальнейшем мы используем теорему Вика в виде (2.7). В двухкомпонентной записи имеются два возможных способа ее использования:

- 1) либо использовать формулу (2.7), учитывая, что двухкомпонентные фермионы состоят из обычных фермионов с четными и нечетными номерами (см. (2.14)),
- 2) либо использовать формулу (2.7) отдельно для каждой компоненты; при этом, чтобы вычислить вакуумное ожидание оператора O , надо сначала представить его в виде $O = \sum_i O_i^{(1)} O_i^{(2)}$, а затем применить соотношение

$$\langle 0, 0 | O | 0, 0 \rangle = \sum_i \langle 0, 0 | O_i^{(1)} O_i^{(2)} | 0, 0 \rangle = \sum_i \langle 0, 0 | O_i^{(1)} | 0, 0 \rangle \langle 0, 0 | O_i^{(2)} | 0, 0 \rangle, \quad (2.24)$$

в котором теорема Вика (2.7) применяется к каждому сомножителю $\langle 0, 0 | O_i^{(\alpha)} | 0, 0 \rangle$.

Второй способ используется в разделе 3, а первый способ – в разделе 5.

Положим

$$\begin{aligned} F^{(j)}(x^{(j)}) &:= f^{(j)}(x_{n_j}^{(j)}) \dots f^{(j)}(x_1^{(j)}), \\ \bar{F}^{(j)}(y^{(j)}) &:= \bar{f}^{(j)}(y_{m_j}^{(j)}) \dots \bar{f}^{(j)}(y_1^{(j)}), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Объединяя (2.13) и (2.24), получим

$$\begin{aligned} &\langle n_1 - m_1, n_2 - m_2 | F^{(2)}(x^{(2)}) F^{(1)}(x^{(1)}) \bar{F}^{(1)}(y^{(1)}) \bar{F}^{(2)}(y^{(2)}) | 0, 0 \rangle = \\ &= (-1)^{m_2(m_1+n_1)} \frac{\Delta_{n_1}(x^{(1)}) \Delta_{m_1}(y^{(1)}) \Delta_{n_2}(x^{(2)}) \Delta_{m_2}(y^{(2)})}{\prod_{1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq m_1} (x_i^{(1)} - y_j^{(1)}) \prod_{1 \leq i \leq n_2, 1 \leq j \leq m_2} (x_i^{(2)} - y_j^{(2)})}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

3. ИНТЕГРАЛ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КАК ВАКУУМНОЕ ОЖИДАНИЕ

Здесь мы используем обозначения

$$\begin{aligned} &\int d\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\cdot) = \iint d\mu(x_1, y_1) \dots \iint d\mu(x_N, y_N)(\cdot); \\ &F^{(1)}(\xi) := f^{(1)}(\xi_{L_1}) \dots f^{(1)}(\xi_1), \quad F^{(2)}(\mu) := f^{(2)}(\mu_{M_2}) \dots f^{(2)}(\mu_1), \\ &\bar{F}^{(1)}(\eta) := \bar{f}^{(1)}(\eta_{M_1}) \dots \bar{f}^{(1)}(\eta_1), \quad \bar{F}^{(2)}(\zeta) := \bar{f}^{(2)}(\zeta_{L_2}) \dots \bar{f}^{(2)}(\zeta_1); \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$g := e^A, \quad A := \iint d\mu(x, y) f^{(1)}(x) \bar{f}^{(2)}(y). \quad (3.2)$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$J_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) := R_N \langle N_1, -N_2 | F^{(2)}(\mu) F^{(1)}(\xi) g \bar{F}^{(1)}(\eta) \bar{F}^{(2)}(\zeta) | 0, 0 \rangle, \quad (3.3)$$

в котором $R_N = R_N(\xi, \zeta, \eta, \mu)$ задается как

$$R_N := \frac{s(L_1, L_2, M_1, M_2) \prod_{\alpha=1}^{L_1} \prod_{j=1}^{M_1} (\xi_\alpha - \eta_j) \prod_{\beta=1}^{L_2} \prod_{k=1}^{M_2} (\zeta_\beta - \mu_k)}{\prod_{n=0}^{N-1} h_n \Delta_{L_1}(\xi) \Delta_{L_2}(\zeta) \Delta_{M_1}(\eta) \Delta_{M_2}(\mu)}, \quad (3.4)$$

а $s(L_1, L_2, M_1, M_2)$ представляет собой знаковый множитель,

$$s(L_1, L_2, M_1, M_2) = (-1)^{N(N+1)/2 + L_2(L_1+M_1) + N(L_1+M_1) + M_2 L_2}. \quad (3.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В силу представления (3.2) элемент g коммутирует как с $F^{(1)}(\xi)$, так и с $\bar{F}^{(2)}(\mu)$. Более того, из условий, сформулированных в замечании 1.3, следует также, что g коммутирует с $\bar{F}^{(1)}(\eta)$ и с $F^{(2)}(\zeta)$.

Основной результат этого раздела составляет следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Имеет место равенство*

$$\mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) = J_N(\xi, \zeta, \eta, \mu). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя разложение $g = \sum_{n=0}^{\infty} (A^n/n!)$ в (3.3), заметим, что ненулевой вклад вносит только N -я степень, что дает

$$J_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) = \frac{R_N}{N!} \langle N_1, -N_2 | F^{(2)}(\mu) F^{(1)}(\xi) A^N \bar{F}^{(1)}(\eta) \bar{F}^{(2)}(\zeta) | 0, 0 \rangle. \quad (3.7)$$

Собирая однотипные фермионные вклады (это приводит к появлению знаковых множителей), можно представить правую часть формулы (3.7) в виде

$$(-1)^{N(N-1)/2 + NM_1} \frac{R_N}{N!} \int d\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \langle N_1, -N_2 | F^{(2)}(\mu) F^{(1)}(\xi, x) \bar{F}^{(1)}(\eta) \bar{F}^{(2)}(y, \zeta) | 0, 0 \rangle,$$

где $(\xi, x) = (\xi_1, \dots, \xi_{L_1}, x_1, \dots, x_N)$ и $(y, \zeta) = (y_1, \dots, y_N, \zeta_1, \dots, \zeta_{L_2})$. Вычисляя вакуумное ожидание в подынтегральном выражении с помощью формулы (2.25), получаем

$$J_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) = \frac{1}{\mathbf{Z}_N^{(2)}} \int d\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_N(x) \Delta_N(y) \prod_{a=1}^N \frac{\prod_{\alpha=1}^{L_1} (\xi_{\alpha} - x_a) \prod_{\beta=1}^{L_2} (\zeta_{\beta} - y_a)}{\prod_{j=1}^{M_1} (\eta_j - x_a) \prod_{k=1}^{M_2} (\mu_k - y_a)},$$

что и доказывает равенство (3.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из формул (3.3) и (3.6) в отсутствии членов $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $\bar{F}^{(1)}$ и $\bar{F}^{(2)}$ можно получить представление, которое использовалось в работе [11]:

$$\mathbf{Z}_N^{(2)} = (-1)^{N(N+1)/2} N! \langle N, -N | g | 0, 0 \rangle.$$

Опираясь на представление (3.6), мы можем вычислить $\mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu)$ с помощью теоремы Вика, но сначала нам понадобятся некоторые предварительные соотношения.

4. БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И ОДЕТЫЕ ФЕРМИОНЫ

В этом разделе мы вводим преобразования Ω и Q и понятие одетых фермионов $d^{(\alpha)}$, $\bar{d}^{(\alpha)}$ и b_{α} , $\bar{b}_{\alpha}$. Мы также перепишем вакуумные ожидания (3.3) в виде, более пригодном для дальнейших вычислений с помощью теоремы Вика.

4.1. Биортогональные многочлены. Рассмотрим последовательность многочленов $\{P_n(x), S_n(y)\}_{n \geq 0}$, биортогональных по мере $d\mu(x, y)$ (см. (1.5), (1.6)). Удобно записать эти многочлены в следующем виде:

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} \sum_{m=0}^n K_{nm} x^m, \quad S_n(y) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} \sum_{m=0}^n y^m (\bar{K}^{-1})_{mn}, \quad n \geq 0, \quad (4.1)$$

где K_{nm} и $(\bar{K}^{-1})_{mn}$ можно рассматривать как элементы полубесконечных матриц K и $(\bar{K}^{-1})$ соответственно, при этом K – нижнетреугольная матрица, а $\bar{K}$ – верхнетреугольная матрица, и каждая из этих матриц содержит единицы на диагоналях: $K_{nn} = \bar{K}_{nn} = 1$, $n \geq 0$.

Хорошо известно, что из соотношения ортогональности (1.5) следует представление

$$H\bar{K} = KB, \quad (4.2)$$

где $H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots)$, а B – матрица бимоментов, элементы которой определены в (1.4). В свое время (см. [18]) это представление активно использовалось для того, чтобы связать матричные модели с интегрируемыми системами с помощью метода факторизации, который широко применяется в теории солитонов, начиная с основополагающей работы [19]. В этом случае действие матриц K и $\bar{K}$ можно отождествить с одеванием матрицами Михайлова–Уэно–Такасаки [20], [21], строки которых порождают пару так называемых функций Бейкера–Ахиезера, в то время как столбцы матриц K^{-1} и $\bar{K}^{-1}$ задают пару сопряженных функций Бейкера–Ахиезера. Если матрицы одевания полубесконечны, то первая из функций Бейкера–Ахиезера (связанная с строками матрицы K) и вторая из сопряженных функций Бейкера–Ахиезера (связанная со столбцами матрицы $\bar{K}^{-1}$) принимают квазиполиномиальный вид.

В настоящей работе мы используем формулу (4.2) по-другому.

4.2. Каноническое преобразование Ω . Введем

$$\tilde{S}_n(x) := \sum_{m=0}^{+\infty} x^{-m-1} (K^{-1})_{mn} \sqrt{h_n}, \quad \tilde{P}_n(y) := \sum_{m=0}^{+\infty} \bar{K}_{nm} y^{-m-1} \sqrt{h_n}, \quad n \geq 0. \quad (4.3)$$

Свойства $\tilde{S}_n(x)$ и $\tilde{P}_n(y)$ описаны в приложении В, основным среди них является то, что $\tilde{S}_n(x)$ и $\tilde{P}_n(y)$ совпадают с преобразованиями Гильберта для биортогональных многочленов (1.7).

Определим теперь матрицы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ с помощью соотношений $e^{\omega^{(1)}} = K$, $e^{\omega^{(2)}} = \bar{K}$. Матрицы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ (которые имеют соответственно строго верхне- и нижнетреугольный вид) находятся единственным образом с помощью рекурсивной процедуры. Введем

$$\Omega = \exp \sum_{n > m \geq 0} (\omega_{n,m}^{(1)} f_n^{(1)} \bar{f}_m^{(1)} + \omega_{m,n}^{(2)} f_{-m-1}^{(2)} \bar{f}_{-n-1}^{(2)}). \quad (4.4)$$

Заметим, что $\langle N_1, -N_2 | \Omega^{-1} = \langle N_1, -N_2 |$ при всех N_1, N_2 и $\Omega | 0, 0 \rangle = | 0, 0 \rangle$. Первое из этих равенств следует из (2.21) и из ограничения $n > m$ на область суммирования в формуле (4.4), а второе вытекает из ограничения $m \geq 0$ и из формул (2.21).

Рассмотрим выражения ($\alpha = 1, 2$)

$$d^{(\alpha)}(x) = \Omega f^{(\alpha)}(x) \Omega^{-1}, \quad \bar{d}^{(\alpha)}(x) = \Omega \bar{f}^{(\alpha)}(x) \Omega^{-1}, \quad (4.5)$$

которые мы и называем *одетыми фермионами*. Имеют место равенства (см. приложение Б)

$$d^{(1)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(1)} P_n(x) \sqrt{h_n}, \quad (4.6)$$

$$\bar{d}^{(1)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{f}_n^{(1)} \frac{\tilde{S}_n(x)}{\sqrt{h_n}}, \quad (4.7)$$

$$d^{(2)}(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{-n-1}^{(2)} \frac{\tilde{P}_n(y)}{\sqrt{h_n}}, \quad (4.8)$$

$$\bar{d}^{(2)}(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{f}_{-n-1}^{(2)} S_n(y) \sqrt{h_n}, \quad (4.9)$$

где условно при $n < 0$

$$P_n(x) = S_n(x) = x^n, \quad \tilde{S}_n(x) = \tilde{P}_n(x) = x^{-n-1}, \quad h_n = 1.$$

Некоторый вариант одетых фермионных операторов (в которых степени x были заменены на функции Бейкера–Ахиезера), сходный с выражениями (4.6)–(4.9), был применен в другом контексте в работе [22] (в ней они назывались фермионами Кривеера–Новикова).

Если положить ($\alpha = 1, 2$)

$$d^{(\alpha)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n^{(\alpha)} x^n, \quad \bar{d}^{(\alpha)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{d}_n^{(\alpha)} x^{-n-1},$$

где $d_n^{(\alpha)} = \Omega f_n^{(\alpha)} \Omega^{-1}$, $\bar{d}_n^{(\alpha)} = \Omega \bar{f}_n^{(\alpha)} \Omega^{-1}$, то мы получим

$$d_i^{(1)} = \begin{cases} \sum_{n \geq i \geq 0} f_n^{(1)} K_{ni} & \text{при } i \geq 0, \\ f_i^{(1)} & \text{при } i < 0; \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\bar{d}_i^{(1)} = \begin{cases} \sum_{i \geq n \geq 0} (K^{-1})_{in} \bar{f}_n^{(1)} & \text{при } i \geq 0, \\ \bar{f}_i^{(1)} & \text{при } i < 0; \end{cases} \quad (4.11)$$

$$d_{-i-1}^{(2)} = \begin{cases} \sum_{i \geq n \geq 0} f_{-n-1}^{(2)} \bar{K}_{ni} & \text{при } i \geq 0, \\ f_{-i-1}^{(2)} & \text{при } i < 0; \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\bar{d}_{-i-1}^{(2)} = \begin{cases} \sum_{n \geq i \geq 0} (\bar{K}^{-1})_{in} \bar{f}_{-n-1}^{(2)} & \text{при } i \geq 0, \\ \bar{f}_{-i-1}^{(2)} & \text{при } i < 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

4.3. Полезные формулы для заряженных фермионных векторов. Введем операторы

$$g_n := e^{f_n^{(1)} \bar{f}_{-n-1}^{(2)}} = 1 + f_n^{(1)} \bar{f}_{-n-1}^{(2)}, \quad e_n := e^{\bar{f}_n^{(1)} f_{-n-1}^{(2)}} = 1 + \bar{f}_n^{(1)} f_{-n-1}^{(2)}.$$

Очевидно, что $g_n, e_n \in \widehat{GL}_\infty$. Будем также рассматривать степени этих операторов:

$$(g_n)^p = e^{p f_n^{(1)} \bar{f}_{-n-1}^{(2)}} = 1 + p f_n^{(1)} \bar{f}_{-n-1}^{(2)}, \quad (e_n)^p = e^{p \bar{f}_n^{(1)} f_{-n-1}^{(2)}} = 1 + p \bar{f}_n^{(1)} f_{-n-1}^{(2)},$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{C}$. Поскольку при $n > 0$

$$\begin{aligned} \langle 0, 0 | e_n g_n &= \langle 0, 0 | (1 + \bar{f}_n^{(1)} f_{-n-1}^{(2)}) (1 + f_n^{(1)} \bar{f}_{-n-1}^{(2)}) = \\ &= \langle 0, 0 | (1 - 1 + \bar{f}_n^{(1)} f_{-n-1}^{(2)}) = \langle 0, 0 | \bar{f}_n^{(1)} f_{-n-1}^{(2)}, \end{aligned}$$

на основании формул (A.1), (A.2) можно заключить, что при $N > 0$

$$\langle N, -N | = (-1)^{N(N-1)/2} \langle 0, 0 | \prod_{n=0}^{N-1} e_n \prod_{n=0}^{N-1} g_n,$$

где вектор $\langle N, -N |$ был определен в (2.18), (2.19).

Сходным образом можно получить представление, которое нам понадобится ниже: при $N_2 > N_1 \geq 0$

$$\langle N_1, -N_2 | = (-1)^{N_1(N_1-1)/2} \langle 0, 0 | f_{-N_1-1}^{(2)} \cdots f_{-N_2}^{(2)} \prod_{n=0}^{N_1-1} e_n \prod_{n=0}^{N_1-1} g_n. \quad (4.14)$$

4.4. Вычисление элемента $\Omega g |0, 0\rangle$. Принимая во внимание, что $f_{-n-1}^{(1)} |0, 0\rangle = \bar{f}_n^{(2)} |0, 0\rangle = 0$ при $n > 0$, получим

$$\Omega g |0, 0\rangle = e^{\sum_{i,j,n,m \geq 0} K_{in} B_{nm} \bar{K}_{mj} f_i^{(1)} \bar{f}_{-j-1}^{(2)}} |0, 0\rangle = Q^{-1} |0, 0\rangle, \quad Q^{-1} := \prod_{n=0}^{+\infty} (g_n)^{h_n},$$

где были использованы соотношения (4.10), (4.13) и (4.2).

4.5. Фермионные операторы $b_\alpha, \bar{b}_\alpha$. Нам понадобятся также следующие фермионные операторы:

$$\begin{aligned} b_\alpha(x) &:= Q d^{(\alpha)}(x) Q^{-1} = Q \Omega f^{(\alpha)} (Q \Omega)^{-1}, \\ \bar{b}_\alpha(x) &:= Q \bar{d}^{(\alpha)}(x) Q^{-1} = Q \Omega \bar{f}^{(\alpha)} (Q \Omega)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Применяя формулы (A.3), запишем

$$\begin{aligned}
 b_1(\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(1)} P_n(\xi) \sqrt{h_n} = d^{(1)}(\xi), \\
 \bar{b}_1(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{f}_n^{(1)} \tilde{S}_n(\eta)}{\sqrt{h_n}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{f}_{-n-1}^{(2)} \tilde{S}_n(\eta) \sqrt{h_n}, \\
 b_2(\mu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{-n-1}^{(2)} \frac{\tilde{P}_n(\mu)}{\sqrt{h_n}} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(1)} \tilde{P}_n(\mu) \sqrt{h_n}, \\
 \bar{b}_2(\zeta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{f}_{-n-1}^{(2)} S_n(\zeta) \sqrt{h_n} = \bar{d}^{(2)}(\zeta).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Заметим, что каждое из выражений $\bar{b}_1$ и b_2 содержит обе компоненты фермионов. Фермионные операторы b_α , $\bar{b}_\alpha$ также можно назвать *одетыми фермионами*. По аналогии с (3.1) мы будем обозначать их произведения прописными буквами:

$$\begin{aligned}
 B_1(\xi) &:= Q\Omega F^{(1)}(\xi)(Q\Omega)^{-1}, & B_2(\mu) &:= Q\Omega F^{(2)}(\mu)(Q\Omega)^{-1}, \\
 \bar{B}_1(\eta) &:= Q\Omega \bar{F}^{(1)}(\eta)(Q\Omega)^{-1}, & \bar{B}_2(\zeta) &:= Q\Omega \bar{F}^{(2)}(\zeta)(Q\Omega)^{-1}.
 \end{aligned}$$

4.6. Среднее $\mathbf{I}_N$ как вакуумное ожидание. Теперь переформулируем (3.6) в виде

$$\mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) R_N^{-1} = \langle N_1, -N_2 | Q^{-1} B_2(\mu) B_1(\xi) \bar{B}_1(\eta) \bar{B}_2(\zeta) | 0, 0 \rangle, \tag{4.17}$$

где элемент R_N был определен в (3.4). Далее мы рассмотрим отдельно случаи $N_2 \geq N_1 \geq 0$, $N_1 \leq 0 \leq N_2$ и $N_1 \leq N_2 \leq 0$.

5. ДЕТЕРМИНАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ниже мы применяем теорему Вика для вычисления вакуумных ожиданий в правой части равенства (4.17), что позволит нам получить выражения для $\mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu)$ в трех указанных выше случаях.

5.1. Детерминантное представление в случае $N_2 \geq N_1 \geq 0$. При данных значениях N_1, N_2 имеет место следующая формула:

$$\langle N_1, -N_2 | Q^{-1} = (-1)^{N_1(N_1+1)/2} \langle 0, 0 | f_{-N_1-1}^{(2)} \cdots f_{-N_2}^{(2)} E \prod_{n=0}^{N_1-1} h_n, \tag{5.1}$$

где $E := \prod_{n=0}^{N_1-1} (e_n)^{-h_n^{-1}}$. Это равенство вытекает из соотношения

$$\begin{aligned}
 \langle 0, 0 | e_n g_n^{1+h_n} &= \langle 0, 0 | (1 + \bar{f}_n^{(1)} f_{-n-1}^{(2)}) (1 + (1 + h_n) f_n^{(1)} \bar{f}_{-n-1}^{(2)}) = \\
 &= \langle 0, 0 | (-h_n + \bar{f}_n^{(1)} f_{-n-1}^{(2)}) = -h_n \langle 0, 0 | e_n^{-h_n^{-1}}, \quad n \geq 0,
 \end{aligned}$$

и из формулы (4.14). Важно, что, поскольку $e_n^p|0, 0\rangle = 0$ для каждого $n \geq 0$, имеет место равенство

$$E|0, 0\rangle = 0. \quad (5.2)$$

Применяя (A.3), можно получить

$$\begin{aligned} a_1(\xi) &:= Eb_1(\xi)E^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(1)} P_n(\xi) \sqrt{h_n} + \sum_{n=0}^{N_1-1} f_{-n-1}^{(2)} \frac{P_n(\xi)}{\sqrt{h_n}}, \\ \bar{a}_1(\eta) &:= E\bar{b}_1(\eta)E^{-1} = \sum_{n=N_1}^{+\infty} \bar{f}_n^{(1)} \frac{\tilde{S}_n(\eta)}{\sqrt{h_n}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \bar{f}_n^{(1)} \frac{\tilde{S}_n(\eta)}{\sqrt{h_n}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{f}_{-n-1}^{(2)} \tilde{S}_n(\eta) \sqrt{h_n}, \\ a_2(\mu) &:= Eb^{(2)}(\mu)E^{-1} = \sum_{n=N_1}^{+\infty} f_{-n-1}^{(2)} \frac{\tilde{P}_n(\mu)}{\sqrt{h_n}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} f_{-n-1}^{(2)} \frac{\tilde{P}_n(\mu)}{\sqrt{h_n}} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(1)} \tilde{P}_n(\mu) \sqrt{h_n}, \\ \bar{a}_2(\zeta) &:= E\bar{b}^{(2)}(\zeta)E^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{f}_{-n-1}^{(2)} S_n(\zeta) \sqrt{h_n} - \sum_{n=0}^{N_1-1} \bar{f}_n^{(1)} \frac{S_n(\zeta)}{\sqrt{h_n}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Используя обозначения

$$\begin{aligned} A_1(\xi) &:= EQ\Omega F^{(1)}(\xi)(EQ\Omega)^{-1}, & A_2(\mu) &:= EQ\Omega F^{(2)}(\mu)(EQ\Omega)^{-1}, \\ \bar{A}_1(\eta) &:= EQ\Omega \bar{F}^{(1)}(\eta)(EQ\Omega)^{-1}, & \bar{A}_2(\zeta) &:= EQ\Omega \bar{F}^{(2)}(\zeta)(EQ\Omega)^{-1} \end{aligned}$$

для произведений, по аналогии с (3.1) получим в силу (5.1) и (5.2) следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) R_N^{-1} &= \\ &= (-1)^{N_1(N_1+1)/2} \prod_{n=0}^{N_1-1} h_n \langle 0, 0 | f_{-N_1-1}^{(2)} \cdots f_{-N_2}^{(2)} A_2(\mu) A_1(\xi) \bar{A}_1(\eta) \bar{A}_2(\zeta) | 0, 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Замечательным образом этот вид записи оказывается пригодным для использования формулы Вика (2.7). В самом деле, каждая величина a_i представляет собой линейную комбинацию фермионов $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$, в то время как каждая величина $\bar{a}_i$ оказывается линейной комбинацией фермионов $\bar{f}^{(1)}$ и $\bar{f}^{(2)}$. Тогда из представления Вика (2.7) следует, что вакуумное ожидание в формуле (5.4) равно определителю следующей матрицы размера $(L_1 + M_2) \times (L_1 + M_2)$, которая состоит из шести блоков, образованных попарными вакуумными ожиданиями:

$$\begin{pmatrix} \langle a_1(\xi_\alpha) \bar{a}_1(\eta_j) \rangle & \langle a_2(\mu_k) \bar{a}_1(\eta_j) \rangle & \langle f_{i-1-N-L_2+M_2}^{(2)} \bar{a}_1(\eta_j) \rangle \\ \langle a_1(\xi_\alpha) \bar{a}_2(\zeta_\beta) \rangle & \langle a_2(\mu_k) \bar{a}_2(\zeta_\beta) \rangle & \langle f_{i-1-N-L_2+M_2}^{(2)} \bar{a}_2(\zeta_\beta) \rangle \end{pmatrix},$$

где всюду в этом пункте

$$1 \leq \alpha \leq L_1, \quad 1 \leq \beta \leq L_2, \quad 1 \leq j \leq M_1, \quad 1 \leq k \leq M_2, \quad 1 \leq i \leq M_1 + L_2 - L_1 - M_2.$$

Теперь с учетом (2.17) из явных выражений (5.3), а также из формул (B.3) и (B.4) можно найти все необходимые попарные вакуумные ожидания:

$$\begin{aligned}
 \langle a_1(\xi_i) \bar{a}_1(\eta_j) \rangle &= \frac{1}{\xi_i - \eta_j} + \sum_{n=0}^{N_1-1} P_n(\xi_i) \tilde{S}_n(\eta_j), \\
 \langle a_2(\mu_i) \bar{a}_2(\zeta_j) \rangle &= \sum_{n=N_1}^{+\infty} S_n(\zeta_j) \tilde{P}_n(\mu_i) = -\frac{1}{\zeta_j - \mu_i} - \sum_{n=0}^{N_1-1} S_n(\zeta_j) \tilde{P}_n(\mu_i), \\
 \langle a_1(\xi_i) \bar{a}_2(\zeta_j) \rangle &= \sum_{n=0}^{N_1-1} P_n(\xi_i) S_n(\zeta_j), \\
 \langle a_2(\mu_i) \bar{a}_1(\eta_j) \rangle &= \sum_{n=N_1}^{+\infty} \tilde{S}_n(\eta_j) \tilde{P}_n(\mu_i) = \iint \frac{d\mu(x, y)}{(\eta_j - x)(\mu_i - y)} - \sum_{n=0}^{N_1-1} \tilde{S}_n(\eta_j) \tilde{P}_n(\mu_i), \\
 \langle f_{i-1-N-L_2+M_2}^{(2)} \bar{a}_1(\eta_j) \rangle &= \sqrt{h_{N+L_2-M_2-i}} \tilde{S}_{N+L_2-M_2-i}(\eta_j), \\
 \langle f_{i-1-N-L_2+M_2}^{(2)} \bar{a}_2(\zeta_j) \rangle &= \sqrt{h_{N+L_2-M_2-i}} S_{N+L_2-M_2-i}(\zeta_j).
 \end{aligned}$$

После простых преобразований строк и столбцов матрицы попарных вакуумных ожиданий получим ответ:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) &= (-1)^{(M_1+M_2)(M_1+M_2-1)/2} (-1)^{L_2 M_1} \prod_{n=N}^{N+L_1-M_1-1} \sqrt{h_n} \prod_{n=N}^{N+L_2-M_2-1} \sqrt{h_n} \times \\
 &\times \frac{\prod_{\alpha=1}^{L_1} \prod_{j=1}^{M_1} (\xi_\alpha - \eta_j) \prod_{\beta=1}^{L_2} \prod_{k=1}^{M_2} (\zeta_\beta - \mu_k)}{\Delta_{L_1}(\xi) \Delta_{L_2}(\zeta) \Delta_{M_1}(\eta) \Delta_{M_2}(\mu)} \det G,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

где матрица G есть состоящая из шести блоков матрица размера $(L_2+M_1) \times (L_2+M_1)$ вида

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{N_1}(\mu_k, \zeta_\beta) & K_{21}^{N_1}(\xi_\alpha, \zeta_\beta) & S_{N+L_1-M_1}(\zeta_\beta) & \cdots & S_{N+L_2-M_2-1}(\zeta_\beta) \\ K_{12}^{N_1}(\mu_k, \eta_j) & K_{22}^{N_1}(\xi_\alpha, \eta_j) & \tilde{S}_{N+L_1-M_1}(\eta_j) & \cdots & \tilde{S}_{N+L_2-M_2-1}(\eta_j) \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

При этом

$$\begin{aligned}
 K_{11}^J(\mu, \zeta) &= \sum_{n=0}^{J-1} \tilde{P}_n(\mu) S_n(\zeta) + \frac{1}{\zeta - \mu}, \\
 K_{22}^J(\xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{J-1} P_n(\xi) \tilde{S}_n(\eta) + \frac{1}{\xi - \eta}, \\
 K_{21}^J(\xi, \zeta) &= \sum_{n=0}^{J-1} P_n(\xi) S_n(\zeta), \\
 K_{12}^J(\mu, \eta) &= \sum_{n=0}^{J-1} \tilde{P}_n(\mu) \tilde{S}_n(\eta) - \int \frac{d\mu(x, y)}{(\eta - x)(\mu - y)}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Рассмотрим теперь шесть примеров, связанных со структурой шести блоков, причем в каждом из примеров у матрицы есть лишь один ненулевой элемент.

ПРИМЕР 1. Пусть $M_1 = 1$ и $L_1 = L_2 = M_2 = 0$, так что $N_2 > N_1 \geq 0$. Положим $\eta_1 = \eta$. В этом случае мы приходим к хорошо известному выражению

$$\mathbf{I}_N(\eta) = \frac{1}{\sqrt{h_{N-1}}} \tilde{S}_{N-1}(\eta). \quad (5.8)$$

ПРИМЕР 2. Пусть $L_2 = 1$ и $L_1 = M_1 = M_2 = 0$, так что $N_2 > N_1 \geq 0$. Положим $\zeta_1 = \zeta$. В этом случае мы также приходим к хорошо известному выражению

$$\mathbf{I}_N(\zeta) = \sqrt{h_N} S_N(\zeta). \quad (5.9)$$

Дальнейшие примеры связаны с условием $N_2 = N_1 \geq 0$.

ПРИМЕР 3. Пусть $M_1 = L_1 = 1$ и $L_2 = M_2 = 0$. Положим $\xi_1 = \xi$ и $\eta_1 = \eta$. Тогда

$$\mathbf{I}_N(\xi, \eta) = 1 + (\xi - \eta) \sum_{n=0}^{N-1} P_n(\xi) \tilde{S}_n(\eta). \quad (5.10)$$

Можно рассмотреть аналогичный пример.

ПРИМЕР 4. Пусть $L_2 = M_2 = 1$ и $L_1 = M_1 = 0$. В этом случае мы получим

$$\mathbf{I}_N(\zeta, \mu) = -(\zeta - \mu) \sum_{n=N}^{+\infty} S_n(\zeta) \tilde{P}_n(\mu) = 1 + (\zeta - \mu) \sum_{n=0}^{N-1} S_n(\zeta) \tilde{P}_n(\mu). \quad (5.11)$$

ПРИМЕР 5. Пусть $M_1 = M_2 = 1$ и $L_1 = L_2 = 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_N(\eta, \mu) &= \frac{1}{h_{N-1}} \sum_{n=N-1}^{+\infty} \tilde{S}_n(\eta) \tilde{P}_n(\mu) = \\ &= \frac{1}{h_{N-1}} \iint \frac{d\mu(x, y)}{(\eta - x)(\mu - y)} - \frac{1}{h_{N-1}} \sum_{n=0}^{N-2} \tilde{S}_n(\eta) \tilde{P}_n(\mu). \end{aligned} \quad (5.12)$$

ПРИМЕР 6. Пусть $L_1 = L_2 = 1$ и $M_1 = M_2 = 0$. В этом случае мы получим

$$\mathbf{I}_N(\xi, \zeta) = h_N \sum_{n=0}^N P_n(\xi) S_n(\zeta). \quad (5.13)$$

Случай $N_1 \geq N_2 \geq 0$ получается из предыдущего с помощью взаимных перестановок индексов $L_1 \leftrightarrow L_2$, $M_1 \leftrightarrow M_2$, $N_1 \leftrightarrow N_2$ и взаимных замен $\xi \leftrightarrow \zeta$, $\mu \leftrightarrow \eta$, а также $P_n \leftrightarrow S_n$ и $\tilde{P}_n \leftrightarrow \tilde{S}_n$. При этом получается ответ, совпадающий с тем, который вытекает из формул (1.8)–(1.16) работы [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) &= (-1)^{(M_1+M_2)(M_1+M_2-1)/2} (-1)^{L_1 M_2} \prod_{n=0}^{N-1} h_n^{-1} \prod_{n=N}^{N+L_2-M_2-1} \sqrt{h_n} \times \\ &\times \prod_{n=N}^{N+L_1-M_1-1} \sqrt{h_n} \frac{\prod_{\alpha=1}^{L_1} \prod_{j=1}^{M_1} (\xi_\alpha - \eta_j) \prod_{\beta=1}^{L_2} \prod_{k=1}^{M_2} (\zeta_\beta - \mu_k)}{\Delta_{L_1}(\xi) \Delta_{L_2}(\zeta) \Delta_{M_1}(\eta) \Delta_{M_2}(\mu)} \det G, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где матрица G размера $(L_1 + M_2) \times (L_1 + M_2)$ состоит из шести блоков и имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{N_2}(\xi_\alpha, \eta_j) & K_{12}^{N_2}(\xi_\alpha, \zeta_\beta) & P_{N+L_2-M_2}(\xi_\alpha) & \cdots & P_{N+L_1-M_1-1}(\xi_\alpha) \\ K_{21}^{N_2}(\mu_k, \eta_j) & K_{22}^{N_2}(\mu_k, \zeta_\beta) & \tilde{P}_{N+L_2-M_2}(\mu_k) & \cdots & \tilde{P}_{N+L_1-M_1-1}(\mu_k) \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

При этом

$$\begin{aligned} K_{11}^J(\xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{J-1} P_n(\xi) \tilde{S}_n(\eta) + \frac{1}{\xi - \eta}, \\ K_{22}^J(\mu, \zeta) &= \sum_{n=0}^{J-1} \tilde{P}_n(\mu) S_n(\zeta) + \frac{1}{\zeta - \mu}, \\ K_{12}^J(\xi, \zeta) &= \sum_{n=0}^{J-1} P_n(\xi) S_n(\zeta), \\ K_{21}^J(\mu, \eta) &= \sum_{n=0}^{J-1} \tilde{P}_n(\mu) \tilde{S}_n(\eta) - \int \frac{d\mu(x, y)}{(\eta - x)(\mu - y)}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

ПРИМЕР 7. Пусть $M_2 = 1$ и $L_2 = L_1 = M_1 = 0$, так что $N_1 > N_2 \geq 0$. Положим $\mu_1 = \mu$. Тогда

$$\mathbf{I}_N(\mu) = \frac{1}{\sqrt{h_{N-1}}} \tilde{P}_{N-1}(\mu). \quad (5.17)$$

ПРИМЕР 8. Пусть $L_1 = 1$ и $L_2 = M_2 = M_1 = 0$, так что $N_1 > N_2 \geq 0$. Положим $\xi_1 = \xi$. При этом получим хорошо известное выражение

$$\mathbf{I}_N(\xi) = \sqrt{h_N} P_N(\xi). \quad (5.18)$$

5.2. Детерминантное представление в случае $N_1 < 0$. В случаях $N_1 < 0 < N_2$ и $N_1 \leq N_2 < 0$ мы имеем $N_1 < 0$. Запишем следующие явные выражения:

$$\langle N_1, -N_2 | = \langle 0, 0 | f_{-1}^{(1)} \cdots f_{N_1}^{(1)} f_{-1}^{(2)} \cdots f_{-N_2}^{(2)} \quad \text{при} \quad N_1 \leq 0 \leq N_2, \quad (5.19)$$

$$\langle N_1, -N_2 | = \langle 0, 0 | f_{-1}^{(1)} \cdots f_{N_1}^{(1)} \bar{f}_0^{(2)} \cdots \bar{f}_{-N_2-1}^{(2)} \quad \text{при} \quad N_1 \leq N_2 \leq 0. \quad (5.20)$$

Тогда, как следует из первых двух цепочек равенств в (A.3), в каждом из этих случаев имеем

$$\langle N_1, -N_2 | Q^{-1} = \langle N_1, -N_2 |. \quad (5.21)$$

Таким образом, можно переписать (4.17) в виде

$$\mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) R_N^{-1} = \langle N_1, -N_2 | B_2(\mu) B_1(\xi) \bar{B}_1(\eta) \bar{B}_2(\zeta) | 0, 0 \rangle. \quad (5.22)$$

5.3. Вычисления в случае $N_1 \leq 0 \leq N_2$. Из формул (5.22) и (5.19) получим

$$\mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) R_N^{-1} = \langle 0, 0 | f_{-1}^{(1)} \cdots f_{N_1}^{(1)} f_{-1}^{(2)} \cdots f_{-N_2}^{(2)} B_2(\mu) B_1(\xi) \bar{B}_1(\eta) \bar{B}_2(\zeta) | 0, 0 \rangle. \quad (5.23)$$

В соответствии с формулой Вика (2.7) правая часть представляет собой определитель составленной из восьми блоков матрицы размера $(L_2 + M_1) \times (L_2 + M_1)$, следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \langle b_1(\xi_\alpha) \bar{b}_1(\eta_j) \rangle & \langle b_2(\mu_k) \bar{b}_1(\eta_j) \rangle & \langle f_{b-1-N-L_2+M_2}^{(2)} \bar{b}_1(\eta_j) \rangle & \langle f_{m-1+N+L_1-M_1}^{(1)} \bar{b}_1(\eta_j) \rangle \\ \langle b_1(\xi_\alpha) \bar{b}_2(\zeta_\beta) \rangle & \langle b_2(\mu_k) \bar{b}_2(\zeta_\beta) \rangle & \langle f_{b-1-N-L_2+M_2}^{(2)} \bar{b}_2(\zeta_\beta) \rangle & \langle f_{m-1+N+L_1-M_1}^{(1)} \bar{b}_2(\zeta_\beta) \rangle \end{pmatrix},$$

где в этом пункте

$$\begin{aligned} 1 \leq \alpha \leq L_1, \quad 1 \leq \beta \leq L_2, \quad 1 \leq j \leq M_1, \quad 1 \leq k \leq M_2, \\ 1 \leq b \leq N + L_2 - M_2, \quad 1 \leq m \leq -N - L_1 + M_1. \end{aligned}$$

Используя формулы (4.16), вычислим все попарные вакуумные ожидания:

$$\begin{aligned} \langle b_1(\xi_\alpha) \bar{b}_1(\eta_j) \rangle &= \frac{1}{\xi_\alpha} \frac{1}{1 - \eta_j/\xi_\alpha} = \frac{1}{\xi_\alpha - \eta_j}, \\ \langle b_2(\mu_k) \bar{b}_2(\zeta_\beta) \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{P}_n(\mu_k) S_n(\zeta_\beta) = \frac{1}{\mu_k - \zeta_\beta}, \\ \langle b_2(\mu_k) \bar{b}_1(\eta_j) \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{P}_n(\mu_k) \tilde{S}_n(\eta_j) = H(\mu_k, \eta_j), \\ \langle b_1(\xi_\alpha) \bar{b}_2(\zeta_\beta) \rangle &= 0, \\ \langle f_{b-1-N-L_2+M_2}^{(2)} \bar{b}_1(\eta_j) \rangle &= \sqrt{h_{N+L_2-M_2-b}} \tilde{S}_{N+L_2-M_2-b}(\eta_j), \\ \langle f_{b-1-N-L_2+M_2}^{(2)} \bar{b}_2(\zeta_\beta) \rangle &= \sqrt{h_{N+L_2-M_2-b}} S_{N+L_2-M_2-b}(\zeta_\beta), \\ \langle f_{m-1+N+L_1-M_1}^{(1)} \bar{b}_1(\eta_j) \rangle &= \eta_j^{-N-L_1+M_1-m}, \quad \langle f_{m-1+N+L_1-M_1}^{(1)} \bar{b}_2(\zeta_\beta) \rangle = 0. \end{aligned}$$

После простых преобразований строк и столбцов матрицы попарных вакуумных ожиданий получим ответ:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) &= \epsilon \prod_{n=N}^{N+L_1-M_1-1} \sqrt{h_n} \prod_{n=N}^{N+L_2-M_2-1} \sqrt{h_n} \times \\ &\times \frac{\prod_{\alpha=1}^{L_1} \prod_{j=1}^{M_1} (\xi_\alpha - \eta_j) \prod_{\beta=1}^{L_2} \prod_{k=1}^{M_2} (\zeta_\beta - \mu_k)}{\Delta_{L_1}(\xi) \Delta_{L_2}(\zeta) \Delta_{M_1}(\eta) \Delta_{M_2}(\mu)} \det G, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где

$$\epsilon = (-1)^{N(N-1)/2 + N(L_1-M_1) + M_1(M_1-1)/2 + L_2(L_2-1)/2 + L_1(L_2-M_2) + L_2M_2-M_2}.$$

Здесь матрица G размера $(L_2 + M_1) \times (L_2 + M_1)$ состоит из восьми блоков и имеет вид

$$\begin{pmatrix} (\mu_k - \zeta_\beta)^{-1} & 0 & S_b(\zeta_\beta) & 0 \\ H(\mu_k, \eta_j) & (\xi_\alpha - \eta_j)^{-1} & \tilde{S}_b(\eta_j) & S_m(\eta_j) \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Ответ в случае $N_2 \leq 0 \leq N_1$ можно получить из предыдущего результата после перестановки индексов $L_1 \leftrightarrow L_2$, $M_1 \leftrightarrow M_2$, $N_1 \leftrightarrow N_2$ и взаимных замен переменных $\xi \leftrightarrow \zeta$, $\mu \leftrightarrow \eta$, а также $P_n \leftrightarrow S_n$ и $\tilde{P}_n \leftrightarrow \tilde{S}_n$ и (в силу определения (B.4)) $H(\mu, \eta) \mapsto H(\mu, \eta)$. При этом результат совпадает с формулами (3.21), (3.22) работы [10]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) = & \epsilon \prod_{n=N}^{N+L_2-M_2-1} \sqrt{h_n} \prod_{n=N}^{N+L_1-M_1-1} \sqrt{h_n} \times \\
 & \times \frac{\prod_{\alpha=1}^{L_1} \prod_{j=1}^{M_1} (\xi_\alpha - \eta_j) \prod_{\beta=1}^{L_2} \prod_{k=1}^{M_2} (\zeta_\beta - \mu_k)}{\Delta_{L_1}(\xi) \Delta_{L_2}(\zeta) \Delta_{M_1}(\eta) \Delta_{M_2}(\mu)} \det G,
 \end{aligned} \quad (5.26)$$

где

$$\epsilon = (-1)^{N(N-1)/2 + N(L_2-M_2) + M_2(M_2-1)/2 + L_1(L_1-1)/2 + L_2(L_1-M_1) + L_1 M_1 - M_1}.$$

Матрица G размера $(L_1 + M_2) \times (L_1 + M_2)$ состоит из восьми блоков и имеет вид

$$\begin{pmatrix}
 (\xi_\alpha - \eta_i)^{-1} & 0 & P_b(\xi_\alpha) & 0 \\
 H(\mu_k, \eta_i) & (\mu_k - \zeta_\beta)^{-1} & \tilde{P}_b(\mu_k) & S_m(\mu_k)
 \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

где теперь

$$b = 1, \dots, N + L_1 - M_1, \quad m = 1, \dots, M_2 - L_2 - N.$$

5.4. Вычисления в случае $N_1 \leq N_2 \leq 0$. В этом случае справедлива формула (5.22).

Применяя при $n = N_2$ преобразования (2.22), (2.23), которые оставляют инвариантным вакуумные ожидания, можно записать

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) R_N^{-1} &= \langle N_1, -N_2 | B_2(\mu) B_1(\xi) \bar{B}_1(\eta) \bar{B}_2(\zeta) | 0, 0 \rangle = \\
 &= \langle N_1, 0 | C_2(\mu) C_1(\xi) \bar{C}_1(\eta) \bar{C}_2(\zeta) | 0, N_2 \rangle,
 \end{aligned} \quad (5.28)$$

где заряды второй компоненты вакуумного вектора сдвинуты на N_2 , а фермионные операторы $b_1(\xi)$, $\bar{b}_1(\eta)$, $b_2(\mu)$ и $\bar{b}_2(\zeta)$, заданные формулами (4.16), заменяются на

$$\begin{aligned}
 c_1(\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(1)} P_n(\xi) \sqrt{h_n}, \\
 \bar{c}_1(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{f}_n^{(1)} \frac{\tilde{S}_n(\eta)}{\sqrt{h_n}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{f}_{-n-1+N_2}^{(2)} \tilde{S}_n(\eta) \sqrt{h_n}, \\
 c_2(\mu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{-n-1+N_2}^{(2)} \frac{\tilde{P}_n(\mu)}{\sqrt{h_n}} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(1)} \tilde{P}_n(\mu) \sqrt{h_n}, \\
 \bar{c}_2(\zeta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{f}_{-n-1+N_2}^{(2)} S_n(\zeta) \sqrt{h_n}.
 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Этот сдвиг вакуумного заряда и нумерации фермионов необходим для того, чтобы перейти к следующему виду вакуумного ожидания, в котором все фермионы

с чертой расположены справа:

$$\langle 0, 0 | f_{-1}^{(1)} \cdots f_{N_1}^{(1)} \prod_{n=1}^{M_2} c_2(\mu_n) \prod_{n=1}^{L_1} c_1(\xi_n) \prod_{n=1}^{M_1} \bar{c}_1(\eta_n) \prod_{n=1}^{L_2} \bar{c}_2(\zeta_n) \bar{f}_{N_2}^{(2)} \cdots \bar{f}_{-1}^{(2)} | 0, 0 \rangle. \quad (5.30)$$

Теперь применима формула (2.7). Получается матрица из девяти блоков вида

$$\begin{pmatrix} \langle c_1(\xi_\alpha) \bar{c}_1(\eta_j) \rangle & \langle c_1(\xi_\alpha) \bar{c}_2(\zeta_\beta) \rangle & \langle c_1(\xi_\alpha) \bar{f}_{m-1+N+L_2-M_2}^{(2)} \rangle \\ \langle c_2(\mu_k) \bar{c}_1(\eta_j) \rangle & \langle c_2(\mu_k) \bar{c}_2(\zeta_\beta) \rangle & \langle c_2(\mu_k) \bar{f}_{m-1+N+L_2-M_2}^{(2)} \rangle \\ \langle f_{\ell-1+N+L_1-M_1}^{(1)} \bar{c}_1(\eta_j) \rangle & \langle f_{\ell-1+N+L_1-M_1}^{(1)} \bar{c}_2(\zeta_\beta) \rangle & 0 \end{pmatrix},$$

где в этом пункте

$$\begin{aligned} 1 \leq \alpha \leq L_1, \quad 1 \leq \beta \leq L_2, \quad 1 \leq j \leq M_1, \quad 1 \leq k \leq M_2, \\ 1 \leq \ell \leq -N - L_1 + M_1, \quad 1 \leq m \leq N + L_2 - M_2. \end{aligned}$$

Попарные вакуумные ожидания имеют вид

$$\begin{aligned} \langle c_1(\xi) \bar{c}_1(\eta) \rangle &= \frac{1}{\xi} \frac{1}{1 - \eta/\xi} = \frac{1}{\xi - \eta}, \\ \langle c_2(\mu) \bar{c}_2(\zeta) \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{P}_n(\mu) S_n(\zeta) = \frac{1}{\mu - \zeta}, \\ \langle c_2(\mu) \bar{c}_1(\eta) \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{P}_n(\mu) \tilde{S}_n(\eta) = H(\mu, \eta), \\ \langle c_1(\xi) \bar{c}_2(\zeta) \rangle &= 0, \\ \langle f_{\ell-1+N+L_1-M_1}^{(1)} \bar{c}_1(\eta) \rangle &= \tilde{S}_{\ell-1+N+L_1-M_1}(\eta) \sqrt{h_{\ell-1+N+L_1-M_1}} = \eta^{-N-L_1+M_1-\ell}, \\ \langle f_{\ell-1+N+L_1-M_1}^{(1)} \bar{c}_2(\zeta) \rangle &= 0, \\ \langle c_1(\xi) \bar{f}_{m-1+N+L_2-M_2}^{(2)} \rangle &= 0, \quad \langle c_2(\mu) \bar{f}_{m-1+N+L_2-M_2}^{(2)} \rangle = \tilde{P}_{-m}(\mu) \sqrt{h_{-m}} = \mu^{\ell-1}. \end{aligned}$$

После простых преобразований строк и столбцов матрицы попарных вакуумных ожиданий получим ответ, совпадающий с формулами (3.35), (3.36) работы [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) &= \epsilon \prod_{n=N}^{N+L_2-M_2-1} \sqrt{h_n} \prod_{n=N}^{N+L_1-M_1-1} \sqrt{h_n} \times \\ &\times \frac{\prod_{\alpha=1}^{L_1} \prod_{j=1}^{M_1} (\xi_\alpha - \eta_j) \prod_{\beta=1}^{L_2} \prod_{k=1}^{M_2} (\zeta_\beta - \mu_k)}{\Delta_{L_1}(\xi) \Delta_{L_2}(\zeta) \Delta_{M_1}(\eta) \Delta_{M_2}(\mu)} \det G, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где

$$\epsilon = (-1)^{L_2(L_2-1)2+M_1(M_1-1)/2+N(N+1)/2+L_2(L_1+M_1)+N(L_1+M_1)+M_2L_2}.$$

Матрица G размера $(M_1 + M_2 - N) \times (M_1 + M_2 - N)$ состоит из девяти блоков и имеет вид

$$\begin{pmatrix} (\xi_\alpha - \eta_j)^{-1} & 0 & 0 \\ H(\mu_k, \eta_j) & (\mu_k - \zeta_\beta)^{-1} & S_m(\mu_k) \\ P_\ell(\eta_j) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

В случае $N_2 \leq N_1 \leq 0$ после замен получим

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu) = \epsilon & \prod_{n=N}^{N+L_2-M_2-1} \sqrt{h_n} \prod_{n=N}^{N+L_1-M_1-1} \sqrt{h_n} \times \\ & \times \frac{\prod_{\alpha=1}^{L_1} \prod_{j=1}^{M_1} (\xi_\alpha - \eta_j) \prod_{\beta=1}^{L_2} \prod_{k=1}^{M_2} (\zeta_\beta - \mu_k)}{\Delta_{L_1}(\xi) \Delta_{L_2}(\zeta) \Delta_{M_1}(\eta) \Delta_{M_2}(\mu)} \det G, \end{aligned} \quad (5.33)$$

где

$$\epsilon = (-1)^{L_1(L_1-1)/2 + M_2(M_2-1)/2 + N(N+1)/2 + L_1(L_2+M_2) + N(L_2+M_2) + M_1 L_1}.$$

В этом случае G оказывается матрицей размера $(M_1 + M_2 - N) \times (M_1 + M_2 - N)$, состоящей из девяти блоков и имеющей вид

$$\begin{pmatrix} (\zeta_\beta - \mu_k)^{-1} & 0 & 0 \\ H(\mu_k, \eta_j) & (\eta_j - \xi_\alpha)^{-1} & P_m(\eta_j) \\ S_\ell(\mu_k) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

где теперь

$$\ell = 1, \dots, M_2 - L_2 - N, \quad m = 1, \dots, M_1 - L_1 - N.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Из формулы (2.15) для $p, q \in \mathbb{C}$ имеем

$$[(g_n)^p, (g_m)^q] = 0, \quad [(e_n)^p, (e_m)^q] = 0, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (A.1)$$

и

$$[(g_n)^p, (e_m)^q] = 0, \quad n \neq m, \quad (A.2)$$

где $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор. Также для $n, m \in \mathbb{Z}$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} [(g_n)^p, f_m^{(1)}] &= [(g_n)^p, \bar{f}_m^{(2)}] = [(e_n)^p, \bar{f}_m^{(1)}] = [(e_n)^p, f_m^{(2)}] = 0, \\ [(g_n)^p, \bar{f}_m^{(1)}] &= [(g_n)^p, f_{-m-1}^{(2)}] = [(e_n)^p, f_m^{(1)}] = [(e_n)^p, \bar{f}_{-m-1}^{(2)}] = 0, \quad n \neq m, \\ (g_n)^{-p} \bar{f}_n^{(1)} (g_n)^p &= \bar{f}_n^{(1)} + p \bar{f}_{-n-1}^{(2)}, \quad (g_n)^{-p} f_{-n-1}^{(2)} (g_n)^p = f_{-n-1}^{(2)} - p f_n^{(1)}, \\ (e_n)^p f_n^{(1)} (e_n)^{-p} &= f_n^{(1)} - p f_{-n-1}^{(2)}, \quad (e_n)^p \bar{f}_{-n-1}^{(2)} (e_n)^{-p} = \bar{f}_{-n-1}^{(2)} + p \bar{f}_n^{(1)}. \end{aligned} \quad (A.3)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Для $\hat{\omega} := \sum_{n,m} \omega_{n,m} f_n \bar{f}_m$ имеем

$$ad_{\hat{\omega}} f_i = \sum_n f_n \omega_{n,i}, \quad ad_{\hat{\omega}} \bar{f}_i = - \sum_n \omega_{i,n} \bar{f}_n.$$

Отсюда

$$Ad_{\hat{\omega}} f_i = \sum_n f_n (e^\omega)_{n,i}, \quad Ad_{\hat{\omega}} \bar{f}_i = \sum_n (e^{-\omega})_{i,n} \bar{f}_n.$$

Из этих соотношений следуют формулы (4.10) и (4.11), которые эквивалентны соответственно (4.6) и (4.7). Аналогично доказываются формулы (4.13) и (4.12), которые эквивалентны соответственно (4.9) и (4.8).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Покажем теперь, что

$$\tilde{S}_n(\eta) = \iint d\mu(x, y) \frac{S_n(y)}{\eta - x}, \quad \tilde{P}_n(\mu) = \iint d\mu(x, y) \frac{P_n(x)}{\mu - y}, \quad n \geq 0. \quad (\text{B.1})$$

Имеем

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} d_n^{(1)} x^n, \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{d}_n^{(1)} \eta^{-n-1} \right]_+ = \frac{1}{\eta} \frac{1}{1 - x/\eta} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) \tilde{S}_n(\eta), \quad (\text{B.2})$$

где первое равенство следует из определений (4.10), (4.11), а равенство между антикоммутатором и последним членом соотношения – из формул (4.6), (4.7). Умножая обе части второго равенства на $S_n(y) d\mu(x, y)$ и интегрируя, получим первое из равенств в формуле (B.1). Второе равенство в формуле (B.1) получается с помощью аналогичного интегрирования равенств

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} d_{-n-1}^{(2)} \mu^{-n-1}, \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{d}_{-n-1}^{(2)} y^n \right]_+ = \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 - y/\mu} = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(y) \tilde{P}_n(\mu), \quad (\text{B.3})$$

которые следуют из определений (4.12), (4.13) и формул (4.8), (4.9).

В формуле (5.12) мы использовали такое следствие этих соотношений:

$$\iint \frac{d\mu(x, y)}{(\eta - x)(\mu - y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{S}_n(\eta) \tilde{P}_n(\mu) =: H(\mu, \eta), \quad (\text{B.4})$$

которое получается, если перемножить правые части соотношений (B.2), (B.3), проинтегрировать и использовать ортогональность P_n и S_n .

Можно доказать (B.1) и по-другому. Из соотношения факторизации $H\bar{K} = KV$ следует, что $K^{-1}H = B\bar{K}^{-1}$. Вычислим в этом равенстве сумму элементов n -го столбца, взятых с весами, пропорциональными степеням x^{-m-1} , где m – номер строки. Отсюда получим первое из равенств в формуле (B.1) на основе первого равенства в (4.3) и определения бимоментов. Второе соотношение в формуле (B.1) доказывается аналогично.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Связь с теорией солитонов

В этом приложении обсуждается связь между исчислением указанных интегралов от симметрических рациональных функций и теорией солитонов. Имеют место две задачи.

Задача 1. Найти, какая из мер $d\mu$ имеет отношение к данному матричному интегралу. Общий ответ на эту задачу не известен. Частные ответы содержатся в работах [23], [24] и приложениях к статьям [25], [11].

ЗАДАЧА 2. Найти, какая мера $d\mu$ имеет отношение к теории солитонов. Этот вопрос обсуждался в работах [11], [26].

Ограничим рассмотрение вопросом о том, когда имеет место связь с обычной (однокомпонентной) иерархией решетки Тоды. Легко показать следующее. Пусть

$$\tau_N(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}) = \langle N, -N | g(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}) | 0, 0 \rangle, \quad (\text{Г.1})$$

где $g(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}) = e^{A(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)})}$. Здесь A имеет вид

$$A(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}) = \iint d\mu_0(x, y) \sum_{i,j=1,2} e^{V(x, \mathbf{t}^{(1)}) - V(y, \mathbf{t}^{(2)})} f^{(1)}(x) \bar{f}^{(2)}(y), \quad (\text{Г.2})$$

где

$$V(x, \mathbf{t}^{(1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(1)} x^n, \quad V(y, \mathbf{t}^{(2)}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(2)} y^n, \quad (\text{Г.3})$$

а $d\mu_0(x, y)$ – достаточно произвольная мера. Это выражение для $\tau_N(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)})$ укладывается в общее выражение для тау-функций двухкомпонентной иерархии уравнения Кадомцева–Петвиашвили и иерархии решетки Тоды, развитой в работе [12] (см. также [21], [27]).

Заметим, что обозначения $t_m^{(1)}$ и $t_m^{(2)}$ связаны соответственно с обозначениями $-u_m/m$ и v_m/m , почерпнутыми из статьи [11]. Потенциал $V(x, \mathbf{t}^{(j)})$ в настоящей статье есть $V_j(x)$ из работы [11]. В этой работе было показано, что выражение (Г.1), с одной стороны, порождает многократные интегралы, которые при специальном выборе меры $d\mu_0(x, y)$ (см. задачу 1 выше) можно отождествить со статистической суммой некоторой модели случайных матриц. С другой стороны, статистическая сумма также представляет собой пример тау-функции решетки Тоды. Поэтому, если выбрать

$$d\mu(x, y) = d\mu(x, y, \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}) = e^{V(x, \mathbf{t}^{(1)}) - V(y, \mathbf{t}^{(2)})} d\mu_0(x, y), \quad (\text{Г.4})$$

то вакуумное ожидание (Г.1) оказывается тау-функцией решетки Тоды (и, соответственно, тау-функцией двухкомпонентной иерархии уравнения Кадомцева–Петвиашвили). Если $d\mu_0$ удовлетворяет тому или иному дифференциальному уравнению, то можно также выписать соответствующее “струнное уравнение”.

Заметим, что первый нетривиальный член иерархии решетки Тоды был введен и проинтегрирован в работе [20]; он был назван релятивистской двумерной решеткой Тоды. В этой работе была рассмотрена задача факторизации, сходная с задачей (4.2) (с матрицами, бесконечными в обоих направлениях) (см. также [21]).

В приведенных ниже формулах два набора времен $(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)})$ обозначаются одной буквой $\mathbf{t}$. Единственной величиной, которая зависит лишь от одного из наборов времен (либо от $\mathbf{t}^{(1)}$, либо от $\mathbf{t}^{(2)}$), будет потенциал V , и в этом случае мы будем явно указывать, от какого из наборов времен он зависит. Из общего анализа, проведенного в работе [12] (см. также [21], [27]), заключаем, что интегралы от рациональных

функций $I_N(\eta, \xi, \mu, \zeta)$ (см. (3.3)) можно получить с помощью процедуры бозонизации следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_N(\xi, \zeta, \eta, \mu; \mathbf{t}) &= \tau_N(\mathbf{t})^{-1} \prod_{i=1}^{L_1} \xi_i^N D_1(\xi_i) \prod_{i=1}^{M_1} \eta_i^{-N} D_1(\eta_i)^{-1} \times \\ &\times \prod_{i=1}^{M_2} \mu_i^{-N} D_2(\mu_i) \prod_{i=1}^{L_2} \zeta_i^N D_2(\zeta_i)^{-1} \tau_N(\mathbf{t}), \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

где

$$D_j(z) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n} \frac{\partial}{\partial t_n^{(j)}}\right)$$

– вершинный оператор.

В работе [10] нами использовались обозначения

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{h_n}} p_n(x), & \tilde{S}_n(x) &= \sqrt{h_n} p_n^*(x), \\ \tilde{P}(y) &= \sqrt{h_n} s_n^*(y, \mathbf{t}), & S_n(y) &= \frac{1}{\sqrt{h_n}} s_n(y). \end{aligned}$$

Функции

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)}(x, \mathbf{t}) &:= e^{V(x, \mathbf{t}^{(1)})} P_n(x, \mathbf{t}) \sqrt{h_n} = e^{V(x, \mathbf{t}^{(1)})} p_n(x, \mathbf{t}), \\ \psi_n^{*(1)}(x, \mathbf{t}) &:= e^{-V(x, \mathbf{t}^{(1)})} \frac{\tilde{S}_{n-1}(x, \mathbf{t})}{\sqrt{h_{n-1}}} = e^{-V(x, \mathbf{t}^{(1)})} p_{n-1}^*(x, \mathbf{t}) \end{aligned}$$

могут интерпретироваться как первые компоненты функций Бейкера–Ахиезера и сопряженные первые компоненты функций Бейкера–Ахиезера соответственно, зависящие от спектрального параметра x , в то время как функции

$$\begin{aligned} \psi_n^{(2)}(y, \mathbf{t}) &:= e^{V(y, \mathbf{t}^{(2)})} \frac{\tilde{P}_{n-1}(y, \mathbf{t})}{\sqrt{h_{n-1}}} = e^{V(y, \mathbf{t}^{(2)})} s_{n-1}^*(y, \mathbf{t}), \\ \psi_n^{*(2)}(y, \mathbf{t}) &:= e^{-V(y, \mathbf{t}^{(2)})} S_n(y, \mathbf{t}) \sqrt{h_n} = e^{-V(y, \mathbf{t}^{(2)})} s_n(y, \mathbf{t}) \end{aligned}$$

могут интерпретироваться как вторые компоненты функций Бейкера–Ахиезера и сопряженные первые компоненты функций Бейкера–Ахиезера соответственно, зависящие от спектрального параметра y . Это следует из формул (отметим множитель $(-1)^N$, появляющийся из-за переупорядочивания фермионов двух различных типов и необходимый для того, чтобы получить правильный знак выражения в соответствии с (2.18))

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)}(x, \mathbf{t}) &= (-1)^N e^{V(x, \mathbf{t}^{(1)})} \frac{\langle N+1, -N | f^{(1)}(x) g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle}{\langle N, -N | g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle} = \\ &= x^N e^{V(x, \mathbf{t}^{(1)})} \frac{D_1(x) \tau_N(\mathbf{t})}{\tau_N(\mathbf{t})}, \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

$$\begin{aligned}\psi_n^{*(1)}(x, \mathbf{t}) &= (-1)^N e^{-V(x, \mathbf{t}^{(1)})} \frac{\langle N-1, -N | \bar{f}^{(1)}(x) g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle}{\langle N, -N | g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle} = \\ &= x^{-N} e^{-V(x, \mathbf{t}^{(1)})} \frac{D_1(x)^{-1} \tau_N(\mathbf{t})}{\tau_N(\mathbf{t})},\end{aligned}\quad (\Gamma.7)$$

$$\psi_n^{(2)}(y, \mathbf{t}) = e^{V(y, \mathbf{t}^{(2)})} \frac{\langle N, 1 - N | f^{(2)}(y) g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle}{\langle N, -N | g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle} = y^{-N} e^{V(y, \mathbf{t}^{(2)})} \frac{D_2(y) \tau_N(\mathbf{t})}{\tau_N(\mathbf{t})}, \quad (\Gamma.8)$$

$$\begin{aligned}\psi_n^{*(2)}(y, \mathbf{t}) &= e^{-V(y, \mathbf{t}^{(2)})} \frac{\langle N, -1 - N | \bar{f}^{(2)}(y) g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle}{\langle N, -N | g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle} = \\ &= y^N e^{-V(y, \mathbf{t}^{(2)})} \frac{D_2(y)^{-1} \tau_N(\mathbf{t})}{\tau_N(\mathbf{t})}.\end{aligned}\quad (\Gamma.9)$$

Первое равенство в каждом из этих соотношений представляет собой пример вычисления величины I_N . Формулы (Г.7), (Г.9) соответствуют случаю $N_2 \geq N_1 \geq 0$ и являются всего лишь частными случаями формулы (5.5) (см. примеры после (5.5)). Вторые равенства в каждом из соотношений (Г.6)–(Г.9) представляют собой примеры формулы бозонизации (Г.5).

Заметим, что различные примеры для величины I_N ,

$$K_{11}^N(\xi, \eta, \mathbf{t}) = \frac{\langle N, -N | f^{(1)}(\xi) \bar{f}^{(1)}(\eta) g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle}{\langle N, -N | g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle} = \frac{\xi^N \eta^{-N} D_1(\xi) D_1^{-1}(\eta) \tau_N(\mathbf{t})}{\tau_N(\mathbf{t})},$$

$$K_{22}^N(\mu, \zeta, \mathbf{t}) = \frac{\langle N, -N | f^{(2)}(\mu) \bar{f}^{(2)}(\zeta) g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle}{\langle N, -N | g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle} = \frac{\mu^{-N} \zeta^N D_2(\mu) D_2^{-1}(\zeta) \tau_N(\mathbf{t})}{\tau_N(\mathbf{t})},$$

$$K_{12}^N(\xi, \zeta, \mathbf{t}) = \frac{\langle N+1, -N-1 | f^{(1)}(\xi) \bar{f}^{(2)}(\zeta) g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle}{\langle N, -N | g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle} = \frac{\xi^N \zeta^N D_1(\xi) D_2^{-1}(\zeta) \tau_N(\mathbf{t})}{\tau_N(\mathbf{t})},$$

$$K_{21}^N(\mu, \eta, \mathbf{t}) = \frac{\langle N-1, -N+1 | f^{(2)}(\mu) \bar{f}^{(1)}(\eta) g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle}{\langle N, -N | g(\mathbf{t}) | 0, 0 \rangle} = \frac{\mu^{-N} \eta^{-N} D_2(\mu) D_1^{-1}(\eta) \tau_N(\mathbf{t})}{\tau_N(\mathbf{t})}$$

(где для краткости опущена зависимость от $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(2)}$ в левых частях), можно рассматривать как двухкомпонентные аналоги модифицированного ядра Коши–Бейкера–Ахизера, введенного в работах [22], [28]. Это дает явный пример конструкции Сегала–Вильсона при исследовании вирасоровских деформаций тау-функций для квазипериодических решений иерархии Кадомцева–Петвиашвили (а на самом деле, также и для иерархии решетки Тоды), см. формулы (5.7).

Благодарности. Авторы благодарны Т. Шиоте и Я. Ван де Леру за полезные обсуждения. А. Ю. Орлов благодарен А. Оджиевичу за теплое гостеприимство во время визита в Белосток в июне 2005 г. Работа Дж. Харнарда частично поддержана Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) и FCAR du Québec. Работа А. Ю. Орлова поддержана Программой РАН “Математические методы нелинейной динамики”, РФФИ (грант № 05-01-00498) и совместно РФФИ и Консорциумом Е.И.Н.С.Т.Е.И.Н. (грант № 06-01-92054-КЕ_а).

Список литературы

- [1] L.-L. Chau, O. Zaboronsky, *Comm. Math. Phys.*, **196**:1 (1998), 203–247; [arXiv: hep-th/9711091](#).
- [2] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, Boston, 1991.
- [3] В. Б. Уваров, *ЖБМ и МФ*, **9** (1969), 1253–1262.
- [4] E. Brézin, S. Hikami, *Comm. Math. Phys.*, **214**:1 (2000), 111–135.
- [5] Y. V. Fyodorov, E. Strahov, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), 3203–3213.
- [6] G. Akemann, G. Vernizzi, *Nucl. Phys. B*, **660**:3 (2003), 532–556.
- [7] J. Baik, P. Deift, E. Strahov, *J. Math. Phys.*, **44**:8 (2003), 3657–3670; [arXiv: math-ph/0304016](#).
- [8] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *J. Math. Phys.*, **21**:3 (1980), 411–421.
- [9] M. Bergère, *Biorthogonal polynomials for potentials of two variables and external sources at the denominator*, [arXiv: hep-th/0404126](#).
- [10] J. Harnad, A. Yu. Orlov, *Integrals of rational symmetric functions, two-matrix models and biorthogonal polynomials*, [arXiv: math-ph/0603040](#).
- [11] J. Harnad, A. Yu. Orlov, *J. Phys. A*, **39**:28 (2006), 8783–8809; [arXiv: math-ph/0512056](#).
- [12] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Nonlinear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory* (Kyoto, 1981), eds. M. Jimbo, T. Miwa, World Scientific, Singapore, 1983, 39–119.
- [13] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov et al., *Nucl. Phys. B*, **404**:3 (1993), 717–750; [arXiv: hep-th/9208044](#).
- [14] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov et al., *Nucl. Phys. B*, **366**:3 (1991), 569–601.
- [15] Д. Харнад, А. Ю. Орлов, *ТМФ*, **137**:3 (2003), 375–392.
- [16] J. Harnad, A. Yu. Orlov, “Matrix integrals as Borel sums of Schur function expansions”, *Symmetry and Perturbation Theory*, Proc. Internat. Conf. SPT 2002, eds. S. Abenda, G. Gaeta, World Scientific, Singapore, 2003, 116–123.
- [17] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **19**:3 (1983), 943–1001.
- [18] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov et al., *Nucl. Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 565–618.
- [19] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [20] А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.
- [21] K. Ueno, K. Takasaki, “Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations*, Proc. Symp. (Tokyo, 1982), Adv. Stud. Pure Math., **4**, ed. K. Okamoto, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1–95.
- [22] P. G. Grinevich, A. Yu. Orlov, *Flag spaces in KP theory and Virasoro action on $\det D_j$ and Segal–Wilson τ -function*, [arXiv: math-ph/9804019](#); “Virasoro Action on Riemann Surfaces, Grassmannians, $\det \bar{\partial}_j$ and Segal–Wilson τ -function”, *Problems of Modern Quantum Field Theory*, Res. Rep. Phys., eds. A. A. Belavin, A. U. Klimyk, A. B. Zamolodchikov, Springer, Berlin, 1989, 86–106.
- [23] P. Zinn-Justin, J.-B. Zuber, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), 3173–3193; [arXiv: math-ph/0209019](#).
- [24] A. Yu. Orlov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**, Suppl. 2 (2004), 276–293; [arXiv: nlin.SI/0209063](#).
- [25] A. Yu. Orlov, T. Shiota, *Phys. Lett. A*, **343**:5 (2005), 384–396.
- [26] Дж. Харнад, А. Ю. Орлов, *ТМФ*, **152**:2 (2007), 265–277.
- [27] V. G. Kac, J. W. van de Leur, “The n -component KP hierarchy and representation theory”, *Important Developments in Soliton Theory*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1993, 302–343.
- [28] П. Г. Гриневич, А. Ю. Орлов, *Функц. анализ и его прил.*, **24**:1 (1990), 72–73.