Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Гейлер, Д. А. Иванов, И. Ю. Попов, Аппроксимация точечных возмущений на римановом многообразии, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 1, 49–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:05:18

© 2009 г.

В. А. Гейлер[□], Д. А. Иванов*, И. Ю. Попов[†]

АППРОКСИМАЦИЯ ТОЧЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Показано, что гамильтониан точечного взаимодействия на римановом многообразии ограниченной геометрии может быть получен как предел (в смысле равномерной резольвентной сходимости) последовательности масштабных преобразований гамильтонианов с короткодействием.

Ключевые слова: риманово многообразие, точечное взаимодействие, аппроксимация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для изучения сложных систем в квантовой механике широко используются модели, описывающие взаимодействие заряженной частицы с потенциалом, сосредоточенным в одной точке (точечным потенциалом). Гамильтониан таких моделей формально представим в виде

$$H = H^0 + \lambda \delta_q(\cdot), \quad (1)$$

где H^0 – квантово-механический гамильтониан свободной частицы, λ – константа связи, а $\delta_q(\cdot)$ – δ -функция Дирака в точке q . В конкретных физических задачах свободный гамильтониан заменяется на соответствующий гамильтониан без сингулярного взаимодействия.

Начало изучению моделей такого вида было положено еще в 1931 г. [1]. Однако корректное математическое описание появилось лишь в работе [2] в рамках теории самосопряженных расширений симметрических операторов. Следует отметить, что подход теории расширений, обеспечивая строгий анализ, в то же время ставит вопрос о верификации модели, т.е. о выборе параметров расширений, обеспечивающих необходимое соответствие модели и реальной задачи. Это обоснование модели возможно путем аппроксимации точечных потенциалов гладкими. В рамках настоящей работы нас будет интересовать именно этот вопрос. Что касается моделей в $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$),

*Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, Саранск, Россия.
E-mail: ivdmal@mail.ru

[†]Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: popov@mail.ifmo.ru

то исчерпывающее описание процесса построения такой аппроксимации изложено, например, в монографии [3]. В нашей работе речь пойдет о более общих пространствах.

В связи с интенсивными исследованиями спектра примесей в искривленных наноструктурах в последнее время появились методы, сводящие задачу к анализу оператора Бельтрами–Лапласа с точечным взаимодействием на римановом многообразии [4], [5]. Также активно проводятся теоретические исследования точечных взаимодействий на искривленных многообразиях. Например, детальное описание точечных возмущений на многообразиях постоянной кривизны можно найти в [6]. В настоящей работе мы рассматриваем точечные возмущения на трехмерных многообразиях ограниченной геометрии и явно указываем способ построения аппроксимации формального выражения (1) масштабно-преобразованными операторами вида $H = H^0 + V(x)$, где $V(x)$ – непрерывная функция с компактным носителем. Схема построения аппроксимации аналогична предложенной в [3]. Сходимость аппроксимирующих операторов будем рассматривать в равномерном резольвентном смысле.

Следует также отметить, что иной подход к аппроксимации точечных взаимодействий изложен в работе [7].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Здесь мы введем основные понятия и обозначения, которые будем использовать в настоящей работе. Пусть X – трехмерное риманово многообразие. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что X – многообразие ограниченной геометрии, т.е. радиус инъективности X положителен и каждая ковариантная производная риманова тензора кривизны ограничена. Более подробное описание таких многообразий можно найти в [8].

Радиус инъективности X мы будем обозначать через r_{inj} . Кроме того, мы зафиксируем некоторое r_0 , $0 < r_0 < r_{\text{inj}}/3$. Под $\rho(x, y)$ мы будем понимать геодезическое расстояние между точками x и y , через $B(a, r)$ будем обозначать шар с центром в точке a радиусом r , т.е. $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$. Через $L^2(X, \mu)$ мы обозначим пространство функций, суммируемых с квадратом на X по мере μ , где μ – мера Римана–Лебега на X . Интеграл от функции $f(x)$ по мере μ мы будем записывать как $\int_X f(x) dx$.

Ниже мы приведем лемму, доказанную в [9], которая является обобщением на случай многообразий ограниченной геометрии общеизвестного для евклидовых пространств факта.

ЛЕММА 1. Пусть X – многообразие ограниченной геометрии размерности ν , $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \nu$. Тогда для всех $x \in X$ и любого r : $0 < r < r_{\text{inj}}$ справедлива оценка

$$\int_{B(a, r)} \rho(x, y)^{-\alpha} dy \leq c_\alpha r^{\nu-\alpha},$$

где c_α – некоторая постоянная, зависящая только от α .

Из этой леммы совершенно очевидным образом вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть X – трехмерное многообразие ограниченной геометрии, $M \subset X$ – произвольное компактное множество. Тогда существует постоянная C , $0 < C < \infty$, такая, что

$$\int_{M \times M} \frac{dx dy}{\rho^2(x, y)} \leq C.$$

В дальнейших рассуждениях будет использован еще один факт, доказательство которого также можно найти в [9].

ЛЕММА 3. Пусть X – многообразие ограниченной геометрии размерности ν , $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 < \nu$ и $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - \nu$. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для всех $a \in X$, всех r : $0 < r < r_{\text{inj}}$ и всех $x, y \in B(a, r)$, $x \neq y$,

$$I(x, y) = \int_{B(a, r)} \rho(x, z)^{-\alpha_1} \rho(y, z)^{-\alpha_2} dz \leq C,$$

если $\beta > 0$.

Рассмотрим теперь некоторую точку $q \in X$. Известно (см., например, [10]), что для каждого касательного вектора $v \in T_q X$ существует и при том единственная геодезическая $\gamma = \gamma(t)$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, такая, что $\gamma(0) = q$ и $\gamma'(0) = v$. Тем самым если мы рассмотрим некоторую локальную карту $V \subset X$, содержащую q , то каждой точке $x \in V$ можно поставить в соответствие единственную тройку чисел (t, v_1, v_2) , где $t = \rho(q, x)$. Полученные координаты называют полярно-геодезическими.

Учитывая сказанное, в любой окрестности рассматриваемой точки q , содержащейся в некоторой локальной карте, мы можем ввести отображение $\Theta_q(k, \cdot): x \rightarrow X$, $k \in \mathbb{R}$, которое каждой точке $x \in X$ с координатами (t, v_1, v_2) ставит в соответствие точку $\Theta_a(k, x)$ с координатами (kt, v_1, v_2) . Такое отображение мы будем называть гомотетией (по аналогии с евклидовым случаем) с центром в точке q и коэффициентом k .

Рассмотрим квантово-механический гамильтониан свободной заряженной частицы массы M на многообразии X :

$$H^0 = -\frac{\hbar}{2M} \Delta_{\text{LB}},$$

где Δ_{LB} – оператор Бельтрами–Лапласа на X [11]. Далее мы будем использовать систему единиц, в которой $\hbar = 1$, $M = 1/2$. Отметим, что H_0 – оператор, действующий в $L^2(X, \mu)$. Область определения H^0 – это замыкание множества бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями.

3. ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМАЦИИ

Рассмотрим возмущение H^0 в точке $q \in X$. Как уже отмечалось выше, формально такое возмущение задается оператором вида

$$H_q = -\Delta_{\text{LB}} + \lambda \delta_q(\cdot).$$

Наша цель – построить последовательность операторов с регулярными потенциалами, сходящуюся (в равномерном резольвентном смысле) к H_q .

Рассмотрим S_q – сужение H^0 на область $D_q = \{f \in D(H^0) : f(q) = 0\}$. Можно показать, что S_q – замкнутый симметрический оператор с индексами дефекта $(1, 1)$, а дефектное пространство S_q порождено функциями $x \rightarrow G^0(x, q; z)$, где $G^0(x, y; z)$ – функция Грина оператора H^0 (интегральное ядро резольвенты). Известно [12], что

$$G^0(x, y; z) = G_{\text{reg}}^0(x, y; z) + \frac{1}{4\pi} \rho(x, y)^{-1}, \quad (2)$$

где $G_{\text{reg}}^0(x, y; z)$ – функция, непрерывная на $X \times X$.

Самосопряженные расширения оператора S_q мы будем называть возмущениями H^0 . Их можно описать, используя так называемую формулу Крейна для резольвент [13]: все расширения S_q образуют однопараметрическое семейство операторов, резольвенты которых имеют вид

$$R^\alpha(z) = R^0(z) - (Q(z) - \alpha)^{-1} \langle \overline{G^0(q, \cdot; z)} | \cdot \rangle G^0(\cdot, q; z), \quad (3)$$

где $R^0(z) = (H^0 - z)^{-1}$ – резольвента исходного оператора, а $Q(z) = G_{\text{reg}}^0(q, q; z)$ – Q -функция Крейна.

Теперь перейдем к построению последовательности операторов, аппроксимирующих возмущения H^0 . Пусть (K, φ) – произвольная локальная карта на X , содержащая точку q и шар $B(q, r_0)$, и $\Theta_q(\varepsilon, \cdot)$ – гомотетия на K с центром в точке q и коэффициентом ε . Здесь и ниже будем предполагать, что $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Рассмотрим оператор

$$H_q(\varepsilon) = -\Delta_{\text{LB}} + \frac{\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon^2} V(\Theta_q^{-1}(\varepsilon, \cdot)),$$

где $\Theta_q^{-1}(\varepsilon, \cdot)$ – отображение, обратное к $\Theta_q(\varepsilon, \cdot)$, $\lambda(\varepsilon)$ – некоторая вещественно-аналитическая в окрестности нуля функция, причем $\lambda(0) = 1$, $V(x)$ – непрерывная функция на X с компактным носителем $\text{supp } V(x) \subset K$. Предположим также, что $V(x)$ неотрицательна при каждом $x \in X$.

Введем функции

$$v(x) = (V(x))^{1/2}, \quad \tilde{v}(x) = v(\Theta_q^{-1}(\varepsilon, x)).$$

Тогда согласно теореме В.1 из [3]

$$(H_q(\varepsilon) - z)^{-1} = R^0(z) - \frac{\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon^2} R^0(z) \tilde{v} \left(1 + \frac{\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \tilde{v} R^0(z) \tilde{v} \right)^{-1} \tilde{v} R^0(z). \quad (4)$$

Перепишем это выражение в более удобной форме. Для этого введем масштабное преобразование на $L^2(X, \mu)$ по формуле

$$(U_\varepsilon g)(x) = \varepsilon^{-3/2} g(\Theta_q^{-1}(\varepsilon, x)).$$

Тогда выражение (4) запишется в виде

$$(H_q(\varepsilon) - z)^{-1} = R^0(z) - \varepsilon \lambda(\varepsilon) A_\varepsilon(z) (1 + B_\varepsilon(z))^{-1} C_\varepsilon(z),$$

где

$$A_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-3/2} R^0(z) U_\varepsilon v, \quad B_\varepsilon(z) = \frac{\lambda(\varepsilon)}{\varepsilon^2} v U_\varepsilon^{-1} R^0(z) U_\varepsilon v, \quad C_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-3/2} v U_\varepsilon^{-1} R^0(z).$$

Вычислим интегральные ядра указанных операторов. Пусть $g(x) \in L^2(X, \mu)$, тогда

$$(A_\varepsilon(z)g)(x) = \varepsilon^{-3} \int_X G^0(x, y; z) v(\Theta_q^{-1}(\varepsilon, y)) g(\Theta_q^{-1}(\varepsilon, y)) dy.$$

Сделаем замену переменной, положив $\tilde{y} = \Theta_q^{-1}(\varepsilon, y)$, тогда $y = \Theta_q(\varepsilon, \tilde{y})$ и $dy = \varepsilon^3 d\tilde{y}$ (см. [10]). Окончательно получаем

$$(A_\varepsilon(z)g)(x) = \int_X G^0(x, \Theta_q(\varepsilon, \tilde{y}); z) v(\tilde{y}) g(\tilde{y}) d\tilde{y}.$$

Отсюда видно, что ядро оператора $A_\varepsilon(z)$ имеет вид

$$A_\varepsilon(x, y; z) = G^0(x, \Theta_q(\varepsilon, y); z) v(y). \quad (5)$$

Действуя аналогично, можно показать, что функции

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x, y; z) &= \varepsilon \lambda(\varepsilon) v(x) G^0(\Theta_q(\varepsilon, x), \Theta_q(\varepsilon, y); z) v(y), \\ C_\varepsilon(x, y; z) &= v(x) G^0(\Theta_q(\varepsilon, x), y; z) \end{aligned} \quad (6)$$

являются интегральными ядрами операторов $B_\varepsilon(z)$ и $C_\varepsilon(z)$ соответственно.

Определим интегральные операторы $A_0(z)$, $B_0(z)$, $C_0(z)$, задав их ядра формулами

$$\begin{aligned} A_0(x, y; z) &= G^0(x, q; z) v(y), \\ B_0(x, y; z) &= \frac{v(x)v(y)}{4\pi\rho(x, y)}, \\ C_0(x, y; z) &= v(x) G^0(q, y; z). \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме того, введем еще два нужных для дальнейшего анализа оператора $D_\varepsilon(z)$ и $D_0(z)$ с ядрами

$$D_\varepsilon(x, y; z) = v(x) G_{\text{reg}}^0(\Theta_q(\varepsilon, x), \Theta_q(\varepsilon, y); z) v(y) \quad (8)$$

и

$$D_0(x, y; z) = v(x) G_{\text{reg}}^0(q, q; z) v(y) = Q(z; q) v(x) v(y) \quad (9)$$

соответственно.

Исходя из вида функций (5)–(9), леммы 2 и того факта, что функция $v(x)$ ограничена на компакте $M_V = \text{supp } V(x)$, нетрудно убедиться в истинности следующего утверждения.

ЛЕММА 4. *Операторы $A_0(z)$, $B_0(z)$, $C_0(z)$, $D_0(z)$, $A_\varepsilon(z)$, $B_\varepsilon(z)$, $C_\varepsilon(z)$, $D_\varepsilon(z)$ являются операторами Гильберта–Шмидта.*

Теперь сформулируем и докажем еще один факт, на который будет в существенном опираться доказательство основного результата работы.

ЛЕММА 5. *Справедливы следующие асимптотические разложения, понимаемые в смысле нормы Гильберта–Шмидта:*

$$A_\varepsilon(z) = A_0(z) + o(1), \quad C_\varepsilon(z) = C_0(z) + o(1), \quad B_\varepsilon(z) = B_0(z) + \varepsilon B_1(z) + o(\varepsilon),$$

где $B_1(z) = \lambda'(0)B_0(z) + D_0(z)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первую асимптотику. Очевидно, что

$$\|A_\varepsilon(z) - A_0(z)\|_{\text{HS}}^2 \leq C_V \int_X \int_M |G^0(x, \Theta_q(\varepsilon, y); z) - G^0(x, q; z)|^2 dx dy,$$

где $C_V = \max_{x \in M} |V(x)|$. Далее, используя формулу (2), для этого интеграла легко получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \int_X \int_M |G^0(x, \Theta_q(\varepsilon, y); z) - G^0(x, q; z)|^2 dx dy \leq \\ & \leq I_q(\varepsilon; z) + \frac{C_0(z)}{\pi} \int_M \int_M \left| \frac{1}{\rho(x, \Theta_q(\varepsilon, y))} - \frac{1}{\rho(x, q)} \right| dx dy + \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \int_M \int_M \left| \frac{1}{\rho(x, \Theta_q(\varepsilon, y))} - \frac{1}{\rho(x, q)} \right|^2 dx dy, \end{aligned}$$

где $I_q(\varepsilon, z) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, а $C_0(z) = \max_{M \times M} [G^0(x, y; z)]$.

Найдем оценку для последнего интеграла (оценка для предпоследнего интеграла получается аналогично). Так как M – компакт, найдется такой шар $B_r = B(q, r)$, что $M \subset B_r$, значит, справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_M \int_M \left| \frac{1}{\rho(x, \Theta_q(\varepsilon, y))} - \frac{1}{\rho(x, q)} \right|^2 dx dy \leq \\ & \leq \int_{B_r} \int_{B_r} \left| \frac{1}{\rho(x, \Theta_q(\varepsilon, y))} - \frac{1}{\rho(x, q)} \right|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Оценку интеграла в правой части неравенства можно получить следующим образом. Разобьем область интегрирования $B_r \times B_r$ на множества $B_r \times (B_r \setminus B_{2\varepsilon r})$ и $B_r \times B_{2\varepsilon r}$. Интеграл по первому множеству будет сходиться к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$ в силу регулярности подынтегральной функции. Используя леммы 1, 3, можно оценить второй интеграл некоторой функцией $F_q(\varepsilon, z)$, сходящейся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Таким образом, получаем следующую сходимость по норме Гильберта–Шмидта: $\|A_\varepsilon(z) - A_0(z)\|_{\text{HS}}^2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, что и доказывает первую асимптотику.

Доказательство второго разложения полностью аналогично доказательству, приведенному выше.

Для проверки последней асимптотики найдем асимптотику функции $B_\varepsilon(x, y; z)$ – ядра оператора $B_\varepsilon(z)$:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x, y; z) &= \varepsilon \lambda(\varepsilon) v(x) v(y) G^0(\Theta_q(\varepsilon, x), \Theta_q(\varepsilon, y); z) = \\ &= \varepsilon (1 + \varepsilon \lambda'(0) + o(\varepsilon)) \left(D_\varepsilon(x, y; z) + \frac{1}{\varepsilon} B_0(x, y; z) \right) = \\ &= B_0(x, y; z) + \varepsilon [\lambda'(0) B_0(x, y; z) + D_0(x, y; z)] + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что $\rho(\Theta_q(\varepsilon, x), \Theta_q(\varepsilon, y)) \sim \varepsilon \rho(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ (ввиду гладкости поля геодезических в пространствах ограниченной геометрии и непрерывности функции $\Theta_q(\varepsilon, x)$ по каждому из аргументов). Также нами было использовано разложение $D_\varepsilon(z) = D_0(z) + o(\varepsilon)$, которое легко проверить.

Таким образом, нами доказаны все утверждения леммы.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем основные результаты работы в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. 1. Пусть $\langle v | \varphi \rangle = 0$ для всех $\varphi \in L^2(X)$ таких, что $B_0 \varphi = -\varphi$ (в частности, -1 не является собственным значением оператора $B_0(z)$). Тогда $H_q(\varepsilon) \rightarrow H^0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ в смысле равномерной резольвентной сходимости.

2. Пусть $\langle v | \varphi \rangle \neq 0$ и -1 – простое собственное значение $B_0(z)$, φ – соответствующая собственному значению -1 нормированная собственная функция. Тогда $H_q(\varepsilon) \rightarrow H_q^\alpha$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ в смысле равномерной резольвентной сходимости, где $\alpha = -\lambda'(0) |\langle v | \varphi \rangle|^{-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно полученным выше результатам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} R_\varepsilon(z) = R_0(z) - A_0(z) F(z) C_0(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (10)$$

где $F(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{\varepsilon [1 + B_\varepsilon(z)]^{-1}\}$. Вид оператора $F(z)$ зависит от спектральных свойств $B_0(z)$. Рассмотрим по отдельности два утверждения теоремы.

1. Пусть -1 не является собственным значением $B_0(z)$, тогда $-1 \in \rho(B_0(z))$ в силу компактности $B_0(z)$. Далее, так как $\|B_\varepsilon(z) - B_0(z)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ (см. лемму 5), то операторы $1 + B_\varepsilon(z)$ ограничены для достаточно малых $\varepsilon > 0$, и при этом $(1 + B_\varepsilon(z))^{-1} \rightarrow (1 + B_0(z))^{-1}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ в смысле равномерной сходимости. Таким образом, $F(z) = 0$, что доказывает первое утверждение теоремы.

2. Прежде чем приступить к непосредственному доказательству второго случая, сформулируем следующее важное утверждение.

ЛЕММА 6. Для всех достаточно малых $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ справедливо следующее разложение:

$$(1 + z + B_0(z))^{-1} = z^{-1} P + \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n T^{n+1},$$

где $P = \langle \varphi | \cdot \rangle \varphi$ – проектор на собственное подпространство $B_0(z)$, соответствующее -1 , T – равномерный предел оператора $(1 + z + B_0(z))^{-1} (1 - P)$ при $z \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемое утверждение следует из результатов раздела III.6.5 в [14], необходимо лишь доказать, что из равенства $(1 + B_0(z))^2 g = 0$, $g \in L^2(X)$, следует $(1 + B_0(z))g = 0$.

Итак, пусть $f = (1 + B_0(z))g$ и $(1 + B_0(z))f = 0$. Тогда

$$\langle f | f \rangle = \langle (1 + B_0(z))g | f \rangle = \langle g | (1 + B_0(z))f \rangle = 0.$$

Значит,

$$0 = \langle f | (1 + B^0(z))f \rangle = \langle f | f \rangle + \langle f | B_0(z)f \rangle = \int_X (B_0(z)f)(x)f(x) dx = \|T^{1/2}V^{1/2}f\|^2,$$

где T – оператор с интегральным ядром $G^T(x, y) = 1/4\pi\rho(x, y)$. Отсюда получаем $V^{1/2}f \equiv 0$, следовательно, $f \equiv 0$, что доказывает утверждение леммы.

Вернемся к доказательству теоремы. Используя утверждение леммы 5, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon(1 + B_\varepsilon(z))^{-1} &= \varepsilon[1 + B_0(z) + \varepsilon B_\varepsilon(z) + o(\varepsilon)]^{-1} = \\ &= [1 + \varepsilon(1 + \varepsilon + B_0(z))^{-1}(B_1(z) - 1 + o(1))]^{-1}\varepsilon(1 + \varepsilon + B_0(z))^{-1}. \end{aligned}$$

Из утверждения леммы 6 вытекает

$$\varepsilon(1 + \varepsilon + B_0(z))^{-1} = \varepsilon(\varepsilon^{-1}P + O(1)) = P + O(\varepsilon) = P + o(1).$$

Следовательно,

$$\varepsilon(1 + B_\varepsilon(z))^{-1} = [1 + P(B_1 - 1) + o(1)]^{-1}(P + O(\varepsilon)). \quad (11)$$

Далее воспользуемся формулой $B_1(z) = \lambda'(0)B_0(z) + D_0$, где

$$(D_0g)(x) = \int_X Q(z; q)v(x)v(y)g(y) dy = Q(z; q)v(x)\langle v | g \rangle.$$

Итак,

$$\begin{aligned} 1 + P(B_1(z) - 1) &= 1 + P(\lambda'(0)B_0(z) + Q(z; q)v\langle v | \cdot \rangle - 1) = \\ &= 1 - (1 + \lambda'(0))\langle \varphi | \cdot \rangle\varphi + Q(z; q)\langle \varphi | v \rangle\langle v | \cdot \rangle\varphi. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что обратный оператор имеет вид

$$\begin{aligned} (1 + P(B_1(z) - 1))^{-1} &= \\ &= 1 - [\lambda'(0) - Q(z)|\langle \varphi | v \rangle|^2]^{-1}[(1 + \lambda'(0))\langle \varphi | \cdot \rangle - Q(z)\langle \varphi | v \rangle\langle v | \cdot \rangle]\varphi. \end{aligned}$$

Теперь подставим полученный результат в (11). Имеем

$$F(z) = [Q(z)|\langle \varphi | v \rangle|^2 - \lambda'(0)]^{-1}\langle \varphi | \cdot \rangle\varphi.$$

Обозначим $\lambda'(0)|\langle \varphi | v \rangle|^{-2}$ через α , получим

$$F(z) = |\langle \varphi | v \rangle|^{-2}(Q(z) - \alpha)^{-1}\langle \varphi | \cdot \rangle\varphi.$$

Далее получаем

$$(A_0(z)F(z)C_0(z)f)(x) = (Q(z) - \alpha)^{-1} \langle \overline{G^0(q, y; z)} | f(y) \rangle G^0(x, q; z).$$

Окончательно получаем (см. (3)), что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} R_\varepsilon(z) &= R_0(z) - A_0(z)F(z)C_0(z) = \\ &= R_0(z) - (Q(z) - \alpha)^{-1} \langle \overline{G^0(q, y; z)} | f(y) \rangle G^0(x, q; z) = R_\alpha(z), \end{aligned}$$

где $\alpha = \lambda'(0)|\langle \varphi | v \rangle|^{-2}$. Что и требовалось доказать.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 09-01-90410).

Список литературы

- [1] R. de L. Kronig, W. G. Penney, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **130**:814 (1931), 499–513.
- [2] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *ДАН СССР*, **137** (1961), 1011–1014.
- [3] С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Холден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, М., 1991.
- [4] A. V. Chaplik, L. I. Magarill, D. A. Romanov, *Phys. B*, **249–251** (1998), 377–382.
- [5] V. V. Gritsev, Yu. A. Kurochkin, *Phys. Rev. B*, **64**:3 (2001), 035308.
- [6] I. V. Krive, S. Naftulin, A. S. Rozhavsky, *Ann. Phys.*, **232**:2 (1994), 225–242.
- [7] Л. П. Нижник, *Укр. матем. журн.*, **49**:11 (1997), 1557–1560.
- [8] M. A. Shubin, “Spectral theory of elliptic operators on noncompact manifolds”, *Méthodes semi-classiques*, V. 1, Astérisque, **207**, ed. D. Robert, Soc. Mat. France, Paris, 1992, 35–108.
- [9] J. Brüning, V. Geyler, K. Pankrashkin, *Ann. Henri Poincaré*, **8**:4 (2007), 781–816.
- [10] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 2003.
- [11] C. Groshe, F. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals*, Springer Tracts Modern Phys., **145**, Springer, Berlin, 1998.
- [12] J. Brüning, V. Geyler, V. Pankrashkin, *J. Math. Phys.*, **46**:11 (2005), 113508.
- [13] Б. С. Павлов, *УМН*, **42**:6(258) (1987), 99–131.
- [14] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

Поступила в редакцию 13.12.2007,
после доработки 22.03.2008