Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Журавлев, Метод обобщенных подстановок Коула–Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 1, 58–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:06:33

© 2009 г.

В. М. Журавлев*

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ПОДСТАНОВОК КОУЛА–ХОПФА И НОВЫЕ ПРИМЕРЫ ЛИНЕАРИЗУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложен новый подход к конструированию нелинейных эволюционных уравнений в матричной форме, интегрируемых с помощью подстановок, аналогичных подстановке Коула–Хопфа, линеаризующей уравнение Бюргерса. С помощью нового подхода найдены новые интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения и их иерархии.

Ключевые слова: точно интегрируемые нелинейные уравнения, уравнения типа Бюргерса, подстановки Коула–Хопфа.

1. ВВЕДЕНИЕ

До появления развитого метода обратной задачи (МОЗ), связанного с представлением нелинейных волновых уравнений в форме условия коммутативности двух или более дифференциальных операторов, одним из наиболее важных результатов в теории нелинейных уравнений математической физики был факт интегрируемости уравнения Бюргерса с помощью линеаризующей подстановки Коула–Хопфа [1], [2]. Вид подстановки Коула–Хопфа сыграл определенную роль в создании МОЗ [2]. Например, подстановка Миуры [3], в некотором смысле аналогичная подстановке Коула–Хопфа, преобразующая уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) в модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКдФ), позволила получить бесконечный набор нетривиальных законов сохранения для обоих этих уравнений и доказать их полную интегрируемость.

В дальнейшем метод подстановок типа Коула–Хопфа был существенно расширен. В работе [4] этот метод был распространен на класс эволюционных уравнений вида $u_t = u_n + f(u, u_1, \dots, u_{n-1})$, где $u = u(x, t)$ – функция двух переменных, $u_n = \partial^n u / \partial x^n$, и составлен полный список уравнений, которые линеаризуются с помощью подстановки Коула–Хопфа. Такие уравнения получили название уравнений типа Бюргерса. В дальнейшем, при развитии симметричного подхода в теории интегрируемости нелинейных уравнений, уравнения типа Бюргерса обычно приводились

*Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия.
E-mail: zhvictorm@gmail.com

в качестве дополнения к спискам интегрируемых уравнений из-за наличия у них бесконечных серий законов сохранения [5]–[10]. С помощью симметричного подхода (инварианты Лапласа), в работах [11], [12] был рассмотрен метод нахождения уравнений, которые с помощью дифференциальных подстановок могут быть преобразованы в уравнения аналогичного типа. Матричное обобщение метода подстановки Коула–Хопфа, называемое *C*-интегрируемостью, было предложено в работе [13]. Связь этого метода с другими методами интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных была рассмотрена в работе [14], где содержится достаточно полная библиография по этой теме (см. также работу [15]). Кроме того, методы, аналогичные подстановкам Коула–Хопфа в виде преобразований Беклунда и методов факторизации в рамках симметричного подхода, использовались в задаче классификации интегрируемых нелинейных уравнений [5]–[10]. В этих работах была проведена классификация всех нелинейных уравнений, которые обладают бесконечной серией законов сохранения. Однако при таком симметричном подходе нет прямой возможности сразу в явном виде указать метод построения всех точных решений изучаемых уравнений после доказательства их интегрируемости. Эта проблема обычно решалась в тех случаях, когда для уравнения явно указывалось представление Лакса–Захарова–Шабата (ЛЗШ) или преобразование, сводящее его к уравнению, имеющему представление ЛЗШ. Для таких уравнений можно сразу в явном виде указать их точные солитонные или периодические решения (см., например, [16]–[19] и библиографию в них). Аналогичным свойством обладают уравнения, которые линеаризуются с помощью подстановок типа Коула–Хопфа. Для МОЗ построены алгоритмы вычисления представлений типа ЛЗШ и истинных представлений ЛЗШ даже для многомерных уравнений (см. [18], [19] и библиографию в них). Аналогичный универсальный алгоритм для метода подстановок типа Коула–Хопфа был найден в работах [20]–[22], где с помощью результатов работы [23] получен новый метод построения интегрируемых уравнений типа Бюргерса и их точных решений, основанный на обобщенных линеаризующих подстановках типа Коула–Хопфа, который фактически дает общий алгоритм построения таких уравнений. Идея метода состоит в использовании замыкания совокупности линейных дифференциальных соотношений относительно некоторого набора смешанных производных функции, удовлетворяющей уравнению теплопроводности и уравнению переноса изолиний этой функции [21], [23].

В настоящей работе показано, что результаты работ [21], [22] можно обобщить и применить к построению широкого класса нелинейных уравнений и их систем, линеаризуемых с помощью подстановок типа Коула–Хопфа. Перечислены все возможные уравнения типа Бюргерса в размерности $1 + 1$, в том числе и матричные. Приведен ряд примеров использования этого метода для нахождения конкретных уравнений, в том числе уравнений динамики сжимаемой жидкости.

2. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОДСТАНОВОК КОУЛА–ХОПФА

Как отмечалось в разделе 1, подход, основанный на матричном обобщении подстановок Коула–Хопфа, называется *C*-интегрируемостью [13], [14]. Приведенные ниже результаты дают общий алгоритм построения матричных уравнений, интегрируемых с помощью матричного аналога подстановок типа Коула–Хопфа.

Следуя работам [21], [22], рассмотрим следующую пару матричных уравнений относительно матричной функции $\hat{T}$:

$$\hat{T}_t - \hat{D}\hat{T}_{xx} + \hat{W}\hat{T}_x = 0, \quad (1)$$

$$\hat{T}_t + \hat{V}\hat{T}_x = 0, \quad (2)$$

где $\hat{T}$, $\hat{W}$, $\hat{V}$, $\hat{D}$ – квадратные $(M \times M)$ -матрицы, элементы которых являются функциями x и t . Вычисляя совокупность производных согласно [22] для скалярного случая, получаем систему соотношений для производных в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{tt} - \hat{D}\hat{T}_{xxt} + \hat{W}_t\hat{T}_x + \hat{W}\hat{T}_{xt} - \hat{D}_t\hat{T}_{xx} &= 0, \\ \hat{T}_{tt} + \hat{V}_t\hat{T}_x + \hat{V}\hat{T}_{tx} &= 0, \\ \hat{T}_{xt} - \hat{D}\hat{T}_{xxx} + \hat{W}_x\hat{T}_x + \hat{W}\hat{T}_{xx} - \hat{D}_x\hat{T}_{xx} &= 0, \\ \hat{T}_{xt} + \hat{V}_x\hat{T}_x + \hat{V}\hat{T}_{xx} &= 0, \\ \hat{T}_{txx} + \hat{V}_{xx}\hat{T}_x + 2\hat{V}_x\hat{T}_{xx} + \hat{V}\hat{T}_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Исключая последовательно из этих уравнений все высшие производные матрицы $\hat{T}$, получаем систему базовых соотношений:

$$\begin{aligned} \hat{T}_t &= -\hat{V}\hat{T}_x, & \hat{T}_{xx} &= -\hat{U}\hat{T}_x, & \hat{T}_{xt} &= -\hat{Q}\hat{T}_x, \\ \hat{T}_{tt} &= -[\hat{V}_t - \hat{V}\hat{Q}]\hat{T}_x, \\ \hat{T}_{xxx} &= [-\hat{U}_x + \hat{U}^2]\hat{T}_x, \\ \hat{T}_{xxt} &= [-\hat{U}_t + \hat{U}\hat{Q}]\hat{T}_x = [-\hat{V}_{xx} + \hat{Q}\hat{U} + \hat{V}_x\hat{U} + \hat{V}\hat{U}_x]\hat{T}_x, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\hat{U} = \hat{D}^{-1}(\hat{V} - \hat{W})$, $\hat{Q} = \hat{V}_x - \hat{V}\hat{U}$. Сравнивая два выражения, полученных для $\hat{T}_{xxt}$, приходим к следующему уравнению совместности этой системы:

$$\hat{U}_t + [\hat{Q}, \hat{U}] + \frac{\partial}{\partial x}(\hat{V}\hat{U}) - \hat{V}_{xx} = 0 \quad (5)$$

или

$$\hat{U}_t + [\hat{Q}, \hat{U}] - \frac{\partial}{\partial x}\hat{Q} = 0, \quad (6)$$

где $[\hat{Q}, \hat{U}] = \hat{Q}\hat{U} - \hat{U}\hat{Q}$ – коммутатор матриц. Уравнение (6), как нетрудно видеть, является уравнением нулевой кривизны Захарова–Шабата [16] для двух линейных матричных операторов первого порядка:

$$\Psi_x = \hat{U}\Psi, \quad \Psi_t = \hat{Q}\Psi,$$

где $\Psi = \hat{T}_x$. Это уравнение является центральным в теории МОЗ. Однако, в отличие от МОЗ, при таком подходе не требуется наличия спектрального параметра для построения решений уравнений, соответствующих (6). Точные решения получаются из базовых соотношений (4), а дополнительная связь возникает из дополнительного условия для матричной функции $\hat{T}$.

Таким образом, полученный результат сводится к тому, что для любой матричной функции $\hat{T}(x, t)$, имеющей все смешанные производные до третьего порядка включительно в заданной области переменных x, t , матричные функции $\hat{U}(x, t)$ и $\hat{V}(x, t)$, связанные с $\hat{T}(x, t)$ соотношениями (4), удовлетворяют структурному уравнению (6).

Высшие производные матричной функции T связаны с производной $\hat{T}_x$ соотношениями следующего общего вида:

$$\hat{T}^{[n,k]} = \hat{A}^{nk}[\hat{V}, \hat{U}]\hat{T}_x, \quad (7)$$

где матричные функции $\hat{A}^{nk}[\hat{V}, \hat{U}]$ являются дифференциальными полиномами от матриц $\hat{V}$, $\hat{U}$ и их производных. Дифференциальные полиномы $\hat{A}^{nk}[\hat{V}, \hat{U}]$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} \hat{A}^{n+1,k} &= \hat{A}_x^{nk} + \hat{A}^{nk}\hat{A}^{20}, \\ \hat{A}^{n,k+1} &= \hat{A}_t^{nk} + \hat{A}^{nk}\hat{A}^{11}, \\ \hat{A}^{20} &= -\hat{U}, \quad \hat{A}^{11} = -\hat{Q}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

которые получаются из расширенной системы базовых соотношений (4), (7) дифференцированием по x и t до любого конечного порядка $[k, n]$ (при естественном предположении существования производных соответствующего порядка матричной функции $\hat{T}$).

Пусть существуют матричные функции $\hat{C}_{kn}(x, t)$ такие, что между функциями $\hat{U}$ и $\hat{V}$ имеется следующая связь:

$$\sum_{k=0}^M \sum_{n=1}^N \hat{C}_{kn}(x, t) \hat{A}^{kn}[\hat{V}, \hat{U}] = 0. \quad (9)$$

Тогда функция $\hat{T}$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{k=0}^M \sum_{n=1}^N \hat{C}_{kn} \hat{T}^{[k,n]} = 0, \quad (10)$$

при этом совместное решение относительно функций $\hat{U}$, $\hat{V}$ и $\hat{Q}$ уравнения (6) со связью (9) имеет вид

$$\hat{V} = -\hat{T}_t[\hat{T}_x]^{-1}, \quad U = -\hat{T}_{xx}[\hat{T}_x]^{-1}, \quad \hat{Q} = -\hat{T}_{xt}[\hat{T}_x]^{-1}. \quad (11)$$

Последние соотношения вместе с формулой (7) назовем обобщенными подстановками Коула–Хопфа. Этот результат является обобщением результата работы [22] и служит основой для вычисления всей совокупности уравнений типа Бюргерса. Сформулируем его в виде следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Любое нелинейное уравнение типа Бюргерса конечного порядка, линеаризуемое с помощью обобщенных подстановок Коула–Хопфа (11) и, возможно, (7), может быть представлено системой двух уравнений (9) и (5).

Справедливость данного утверждения вытекает из следующих фактов. Списки уравнений (9) и (10) имеют взаимно однозначное соответствие, определяемое соотношениями (7), (8), вид которых не зависит ни от функциональной формы $\hat{T}$,

ни от вида уравнений (10). Кроме того, соотношения (7) определены для любого конечного порядка производных матричной функции $\hat{T}$. Далее, уравнение (10) представляет собой линейное уравнение общего вида произвольного конечного порядка с переменными коэффициентами и, следовательно, представляет полный список таких уравнений. По определению *уравнением типа Бюргерса* называется уравнение, которое сводится к некоторому линейному уравнению с помощью подстановок (11) и, возможно, (7). Следовательно, каждому уравнению типа Бюргерса соответствует хотя бы одно линейное уравнение из списка (10) в силу полноты этого списка. Поскольку каждому уравнению из списка (10) соответствует одно уравнение (9), а все обобщенные подстановки перечислены соотношениями (7) и (8), то уравнение типа Бюргерса может быть представлено как система уравнений (9) и (5).

3. СКАЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В частном случае при размерности матриц $M = 1$ (скалярный случай) структурное уравнение (5) преобразуется в более простое уравнение

$$U_t = Q_x. \quad (12)$$

При этом функции $A^{nk}[U, V]$ будут удовлетворять рекуррентным соотношениям

$$A^{n+1k} = A_x^{nk} + A^{nk}A^{11}, \quad A^{n+1k} = A_t^{nk} + A^{nk}A^{02}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots,$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} A^{01} &= 1, & A^{10} &= -\frac{1}{V}, & A^{11} &= \left[\frac{V_x}{V} - U \right], \\ A^{20} &= \frac{U}{V}, & A^{02} &= \left[\frac{V_t}{V} - V_x + VU \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

В частности, для производных $T^{[n,0]}$ имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$T^{[n,0]} = \frac{1}{V} G_n[U]T_t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где $G_n[U]$ – дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами относительно функции U , удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$G_{n+1}[U] = \frac{\partial}{\partial x} G_n[U] - UG_n[U], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

с начальным условием

$$G_1[U] = -1.$$

Для нескольких первых рекуррентных соотношений имеем

$$\begin{aligned} G_2 &= U, & G_3 &= U_x - U^2, & G_4 &= U_{xx} - 3UU_x + U^3, \\ G_5 &= U_{xxx} - 4UU_{xx} - 3U_x^2 + 6U^2U_x - U^4, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Для производных $T^{[n,1]}$ рекуррентные соотношения имеют вид

$$T^{[n,1]} = H_n[Q]T_t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где $H_n[Q]$ – дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами относительно функции

$$Q = \frac{\partial}{\partial x} \ln V - U. \quad (18)$$

Функции $H_n[Q]$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$H_{n+1}[Q] = \frac{\partial}{\partial x} H_n[Q] + Q H_n[Q], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

с начальным условием

$$H_1[Q] = Q.$$

Для нескольких первых рекуррентных соотношений имеем

$$\begin{aligned} H_2 &= Q_x + Q^2, & H_3 &= Q_{xx} + 3QQ_x + Q^3, \\ H_4 &= Q_{xxx} + 4QQ_{xx} + 3(Q_x)^2 + 6Q^2Q_x + Q^4, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Различные совокупности рекуррентных соотношений порождают определенные иерархии нелинейных уравнений, линеаризуемых с помощью предложенного метода. Приведем несколько примеров.

Используя соотношения (14) и полагая в качестве условия связи соотношение

$$V = \sum_{n=1}^N C_n(x, t) G_n[U], \quad (21)$$

которое соответствует базовому уравнению

$$\sum_{n=1}^N C_n(x, t) T^{[n,0]} = T_t, \quad (22)$$

получаем последовательную цепочку уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} \left[U \sum_{n=1}^N C_n(x, t) G_n[U] \right] = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^N C_n(x, t) G_n[U]$$

при произвольных функциях $C_n(x, t)$, которая аналогична высшим уравнениям иерархии КдФ, но интегрируется не с помощью метода обратной задачи рассеяния, а линеаризуется с помощью обобщенной подстановки Коула–Хопфа (11). Первые уравнения этой иерархии, соответствующие $G_1, G_2, G_3, \dots$ и постоянным коэффициентам C_n , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U_t + C_1 \frac{\partial}{\partial x} U &= 0, \\ U_t + C_2 \frac{\partial}{\partial x} (U^2 - U_x) &= 0, \\ U_t + C_3 \frac{\partial}{\partial x} (3UU_x - U^3 - U_{xx}) &= 0, \\ U_t + C_4 \frac{\partial}{\partial x} (4UU_{xx} + 3U_x^2 - 6U^2U_x + U^4 - U_{xxx}) &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Первым нетривиальным уравнением в этой цепочке при $n = 1$ в (14) является уравнение простой волны, затем уравнение Бюргерса, уравнение мКдФ и т.д. Все эти уравнения принадлежат общему классу уравнений, полученных в работе [4].

Эту иерархию можно преобразовать в более сложную иерархию уравнений. Именно, вместо (22) рассмотрим базовое соотношение вида

$$\sum_{n=1}^N C_n(x, t) T^{[n, 0]} = T_{tt}, \quad (24)$$

полученное из (22) заменой в правой части первой производной функции T по времени на вторую. Этому базовому соотношению соответствуют связи

$$V_t - VV_x + V^2U = VF_N[U], \quad (25)$$

где

$$F_N[U] = \left(\sum_{n=1}^N C_n(x, t) G_n[U] \right)^{-1}.$$

При этом структурное уравнение (12) принимает вид

$$U_t - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ln V + \frac{\partial}{\partial x} F_N[U] = 0. \quad (26)$$

Аналогичным образом могут быть получены и другие типы иерархий, связанные с рекуррентной цепочкой соотношений (14).

4. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Уравнения вида (26) представляют собой нелинейные уравнения типа телеграфного уравнения и встречаются в теории двухпроводных нелинейных линий связи [19], [24], [25]. Уравнения таких линий можно представить в следующем общем виде:

$$\frac{\partial i}{\partial \xi} + C \frac{\partial u}{\partial \tau} + J(u) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + L \frac{\partial i}{\partial \tau} + I(u) = 0, \quad (28)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[C \frac{\partial u}{\partial \tau} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \tau} J(u) - \frac{\partial}{\partial \xi} I(u) = 0, \quad (29)$$

где C , L – погонные индуктивность и емкость линии, $J(u)$, $I(u)$ – вольт-амперные характеристики нелинейных активных элементов линии. Нетрудно видеть, что каждое из построенных выше уравнений представляет собой модель двухпроводной линии с определенным типом нелинейных свойств.

Наиболее простыми примерами могут служить два уравнения. Первое из них соответствует следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} T_{xt} + aT_t + bT_x &= 0, \\ V_x - UV + aV - b &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t \partial x} \ln V + \frac{\partial}{\partial t} \left[a - \frac{b}{V} \right] + \frac{\partial}{\partial x} [aV - b] &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где a, b – произвольные заданные функции x, t . Второе уравнение соответствует следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} T_{tt} + \gamma T_{xx} + \alpha T_t + \beta T_x &= 0, \\ [V_t - VV_x + V^2U] + \gamma U + \alpha V - \beta &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{V_t + \gamma_x/2}{\gamma + V^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma V_x - \gamma_t/2}{\gamma + V^2} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha V - \beta}{\gamma + V^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{V(\alpha V - \beta)}{\gamma + V^2} \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где α, β, γ – произвольные функции x, t .

В частности, используя подстановку

$$V = e^u, \quad u = u(\xi, \tau),$$

где $\xi = x + t, \tau = x - t$, и, полагая для простоты $\alpha = \beta = \text{const}$, приведем уравнение (30) к виду (27):

$$u_\xi + i_\tau - 2\alpha \operatorname{sh} u = 0, \quad u_\tau + i_\xi - 2\alpha \operatorname{ch} u = 0$$

или (29) при $C = L = 1$:

$$u_{\xi\xi} - u_{\tau\tau} + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{sh} u + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{ch} u = 0.$$

Характеристики нелинейных элементов в такой модели имеют простой вид $J(u) = -2\alpha \operatorname{ch} u$, $I(u) = 2\alpha \operatorname{sh} u$ и реализуются в линиях с распределенными (p–n)-переходами и биологических мембранах [19], [24], [25].

Динамика напряжений в линиях такого типа описывается общим решением линейного телеграфного уравнения, которое можно представить в виде интеграла Фурье–Лапласа

$$T(\xi, \tau) = \int_C A(k) e^{ik\xi - i\omega(k)\tau} dk,$$

где $\omega(k) = \pm\sqrt{k^2 - 2\alpha ik}$, $A(k)$ – произвольная комплексная функция и интеграл берется по некоторому контуру C в комплексной плоскости параметра k . Соответствующее решение для $u = \ln V$ может быть записано в виде

$$u = \ln V = \ln \left\{ \frac{\int_C A(k)(\omega(k) + k) \exp[ik\xi - i\omega(k)\tau] dk}{\int_C A(k)(\omega(k) - k) \exp[ik\xi - i\omega(k)\tau] dk} \right\}.$$

Асимптотические свойства решений такого типа могут быть установлены методом перевала [2].

Отметим, что уравнение (31) и все уравнения типа (26) и аналогичных цепочек могут служить моделями двухпроводных линий с нелинейностью обобщенного вида.

5. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Развитый подход имеет еще одну модификацию, позволяющую находить уравнения, которые не линеаризуются, но с помощью тех же подстановок (11) сводятся к некоторому интегрируемому нелинейному дифференциальному уравнению. Систематизацию таких случаев провести сложно. Поэтому мы рассмотрим несколько отдельных примеров, которые могут продемонстрировать некоторые возможности данного подхода и имеют важное прикладное значение.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим базовое соотношение

$$\frac{T_{xx}}{T_t} + p \frac{T_{xt}}{T_x} = 0, \quad (32)$$

где $p = p(t)$ – произвольная функция t . Это уравнение эквивалентно связи следующего вида:

$$U - pV(V_x - UV) = 0. \quad (33)$$

Отсюда получаем

$$U = \frac{pVV_x}{1 + pV^2}.$$

Подставляя это выражение в (12), получаем линеаризуемое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{pVV_x}{1 + pV^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{V_x}{1 + pV^2} \right] = 0, \quad (34)$$

которое допускает однократное интегрирование по x . В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (pV^2) + V_x = C_0(t)(1 + pV^2),$$

где $C_0(t)$ – постоянная интегрирования, параметрически зависящая от t . Это уравнение аналогично уравнению “простых” волн (см., например, [2], [26], [27] и библиографию в них).

Уравнение (32) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} [(T_x)^2 + p(T_t)^2] = 0,$$

или

$$[(T_x)^2 + p(T_t)^2] = C_1(t).$$

Это уравнение следует разрешить относительно одной из производных

$$T_x = \pm \sqrt{C_1 - p(T_t)^2}.$$

Положим $C_1 = \text{const}$ и введем новую переменную $d\tau = (p(t))^{-1/2} dt$. Далее, вводя обозначение $\zeta = T_\tau$ и дифференцируя это соотношение по τ , приходим к уравнению обрुшивающихся волн

$$\zeta_x \mp \frac{\zeta}{\sqrt{C_1 - \zeta^2}} \zeta_\tau = 0,$$

решение которого сводится к решению неявного алгебраического уравнения

$$F(\zeta, \tau \sqrt{C_1 - \zeta^2} \mp x\zeta) = 0,$$

где $F(\zeta, \xi)$ – произвольная дифференцируемая функция двух аргументов.

ПРИМЕР 2. Пример, рассмотренный в работе [22], дает базовое уравнение для T следующего вида:

$$T_{xx}T_{tt} - (T_{xt})^2 = 0. \quad (35)$$

Этому уравнению соответствует связь

$$U(V_t - VV_x + V^2U) = (V_x - VU)^2.$$

Преобразуя последнее соотношение и объединяя его с (12), получаем систему уравнений гидродинамического типа:

$$\begin{aligned} U(V_t + VV_x) &= (V_x)^2, \\ U_t + \frac{\partial}{\partial x}(UV) &= V_{xx}. \end{aligned} \quad (36)$$

Умножая второе уравнение (36) на V и складывая его с первым, получаем следующую эквивалентную систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(UV) + \frac{\partial}{\partial x}(UV^2) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} V^2, \\ U_t + \frac{\partial}{\partial x}(UV) &= V_{xx}. \end{aligned} \quad (37)$$

Положим

$$\rho = U, \quad u = V - U^{-1}V_x, \quad p = V_t + VV_x - U^{-1}(V_x)^2 = 0. \quad (38)$$

Тогда система (37) приводится к системе уравнений одномерного течения сжимаемого газа

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) = -\frac{\partial}{\partial x} p, \quad (39)$$

$$\rho_t + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad (40)$$

где ρ – плотность сжимаемого газа, u – скорость течения газа, p – давление. В силу уравнения (36) давление в этом случае обращается в нуль. Полученные уравнения и их решения соответствуют баротропному течению сжимаемой жидкости.

Решение уравнения (35) будем искать в виде

$$T_t = S(T_x), \quad (41)$$

где $S(z)$ – произвольная дифференцируемая функция своего аргумента. В результате замены $T_x = q$ последнее уравнение приводится к уравнению

$$q_t = S'(q)q_x,$$

решение которого является решением алгебраического уравнения (см. [2], [27])

$$F(q, x - S'(q)t) = 0,$$

где $F(\xi, \tau)$ – произвольная дифференцируемая функция. После построения решения для T функции V и U находятся с помощью подстановок

$$V = -\frac{T_t}{T_x}, \quad \rho = U = -\frac{T_{xx}}{T_x}, \quad u = -\frac{T_{xt}}{T_{xx}}.$$

Учитывая соотношения (38), находим плотность потока, его давление и скорость. Все решения уравнений (39) определяются двумя дифференцируемыми функциями S и F .

Нетрудно видеть, что базовое соотношение можно дополнить его квадратичными слагаемыми по производным T таким образом, чтобы получались интегрируемые по T уравнения. Если ввести скобки

$$\{G, H\} = G_x H_t - G_t H_x,$$

то в самом общем виде базовое соотношение, приводящее к системе (39) с ненулевым давлением, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{U(T_x)^2} \{T_x, \Phi\} - \int \frac{1}{(T_x)^2} \{T_x, \Phi\} dx = \\ &= -\frac{1}{UT_x} [U\Phi_t - Q\Phi_x] + \int \frac{1}{T_x} [U\Phi_t - Q\Phi_x] dx, \end{aligned} \quad (42)$$

где $\Phi = \Phi(x, t)$ – произвольная функция x, t , при этом

$$U(V_t + VV_x) - (V_x)^2 = \{T_x, \Phi\}.$$

Давление в уравнении (39) принимает вид

$$p = U^{-1} \{T_x, \Phi\} - \int \{T_x, \Phi\} dx,$$

а интегралом базового соотношения (42) будет уравнение

$$T_t = S(T_x) + \Phi(x, t). \quad (43)$$

Функцию Φ определим следующим образом:

$$\Phi = \alpha T + \nu T_{xx} + \gamma T_{xxx}.$$

В результате уравнение (43) принимает вид

$$T_t = S(T_x) + \alpha T + \nu T_{xx} + \gamma T_{xxx},$$

который при выборе $S(q) = Aq + Bq^2 + cq^3$ и подходящем подборе постоянных $\alpha, \nu, \gamma, A, B, C$ приводит к различным вариантам интегрируемых уравнений для T . В частности, при $\gamma = 0$ первое уравнение в (39) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \rho \frac{\partial}{\partial x} u \right) = (\alpha - \nu \rho^2) u_x. \quad (44)$$

Уравнение (44) представляет собой одномерное уравнение Навье–Стокса для сжимаемой жидкости с кинематической вязкостью ν , функция в правой части уравнения может рассматриваться как градиент давления в среде. Более общий результат относительно уравнений сжимаемой жидкости изложен в работе [22].

6. ЛИНЕАРИЗУЕМЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В случае матриц размерности $M > 1$ линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула–Хопфа уравнения представляют собой системы нелинейных уравнений. Таких систем гораздо больше, чем в скалярном случае, поэтому приведем лишь несколько простых примеров.

ПРИМЕР 3. В случае связи $\hat{Q} = \hat{C}\hat{U}$, где $\hat{C}$ – некоторая постоянная матрица, базовым интегрирующим уравнением является уравнение вида

$$\hat{T}_{xt} = \hat{C}\hat{T}_{xx}.$$

Структурное уравнение приобретает в этом случае следующий вид:

$$\hat{U}_t + [\hat{C}, \hat{U}]\hat{U} - \hat{C}\hat{U}_x = 0. \quad (45)$$

Уравнения этого типа имеют квадратичную нелинейность, аналогичную нелинейности уравнений генерации второй гармоники и взаимодействия n -волн [16], которые встречаются в нелинейной оптике и акустике. Для иллюстрации структуры получаемых уравнений рассмотрим случай матриц размерности $M = 2$. Введем следующие обозначения:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} a(x, t) & u(x, t) \\ v(x, t) & b(x, t) \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$A(x, t) = a(x, t) + iv(x, t), \quad B(x, t) = b(x, t) + iu(x, t).$$

В этом случае система (45) будет иметь вид системы уравнений для комплексных амплитуд A и B двух связанных волноводов с квадратичной нелинейностью без дисперсии и с диссипацией:

$$A_t + i\lambda A_x + i\lambda A^* B^* - i\lambda |A|^2 = 0,$$

$$B_t - i\lambda B_x - i\lambda B^* A^* + i\lambda |B|^2 = 0.$$

ПРИМЕР 4. Следующим по сложности матричным нелинейным уравнением, которое линеаризуется с помощью данного подхода, является матричное уравнение, соответствующее связи $\hat{V} = \hat{C}\hat{U}$, где $\hat{C}$ – также некоторая постоянная матрица. Базовым уравнением, к которому оно приводится, будет матричное уравнение следующего вида:

$$\hat{T}_{xx} + \hat{C}\hat{T}_t = 0,$$

а само уравнение принимает следующий вид:

$$\hat{C}^{-1}(\hat{U}_t - [\hat{C}, \hat{U}]\hat{U}^2) + 2\hat{U}_x\hat{U} + \frac{\partial}{\partial x}(\hat{U}^2) - \hat{U}_{xx} = 0. \quad (47)$$

Система уравнений для элементов матрицы $\hat{U}$ уже имеет кубическую нелинейность, аналогичную нелинейному уравнению Шредингера. Если матрицы $\hat{U}$ и $\hat{C}$ выбрать так же, как в предыдущем примере (46), система (47) будет иметь вид системы уравнений для комплексных амплитуд A и B уже с кубической нелинейностью:

$$A_t + i\lambda A_{xx} - i\lambda AB_x^* + i\lambda M_x + i\lambda \frac{H}{2} = 0,$$

$$B_t - i\lambda B_{xx} + i\lambda BA_x^* + i\lambda N_x + i\lambda \frac{G}{2} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} M &= A^* B^* - \frac{A^2}{2} - |A|^2, & N &= A^* B^* - \frac{B^2}{2} - |B|^2, \\ H &= A[|A|^2 + |B|^2 - BA] + A^*[|A|^2 + |B|^2 + (A + A^*)(B - B^*) - BA^*], \\ G &= B[|A|^2 - |B|^2 + BA] - B^*[|A|^2 - |B|^2 + (A - A^*)(B + B^*) - BA^*]. \end{aligned}$$

Еще одним полезным примером является простая связь $V = C(U_x - U^2)$, которая приводит к матричному обобщению уравнений КдФ и мКдФ, но в силу его громоздкости мы приводить ее не будем. Это уравнение линеаризуется к матричному уравнению

$$\hat{T}_{xxx} = \hat{C}\hat{T}_t.$$

Следует отметить, что в матричном случае существуют иерархии уравнений, которые строятся по аналогии со скалярным случаем.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было показано, рассмотренный в работе подход является универсальным способом для построения уравнений, которые линеаризуются с помощью подстановок типа Коула–Хопфа. Фактически метод перечисляет все такие уравнения в размерности $1 + 1$. На конкретных примерах показано, что метод имеет приложения в различных разделах теоретической и математической физики. Сам метод основывается на достаточно общих аналитических свойствах функций общего вида, в том числе и матричных. По всей видимости, он может иметь приложения в более широкой области математической физики, чем простое генерирование линеаризуемых нелинейных уравнений. Однако в таком виде рассмотренные примеры дают ценную информацию о классах полностью интегрируемых нелинейных уравнений, но не с помощью МОЗ, а с помощью метода линеаризации. Можно, однако, высказать гипотезу, что рассмотренный в данной работе подход тесным образом связан с МОЗ, поскольку структурные уравнения (6) имеют вид уравнений, используемых в представлении ЛЗШ, интегрируемых с помощью МОЗ. Отличие этих подходов состоит в различных видах ограничений на функции $\hat{T}$. Для данного подхода это дополнительное уравнение для $\hat{T}$ общего вида (10), а для МОЗ – это дополнительные условия на спектральные свойства функции $\hat{T}$ и соответствующих базовым соотношениям линейные операторы. Однако этот вопрос требует отдельного анализа.

Список литературы

- [1] J. M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation. Asymptotic Solutions and Statistical Problems*, Reidel, Dordrecht, Holland, 1974.
- [2] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1978.
- [3] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.
- [4] С. И. Свинолупов, *ТМФ*, **65**:2 (1985), 303–307.
- [5] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [6] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *УМН*, **42**:4(256) (1987), 3–53.
- [7] В. В. Соколов, *УМН*, **43**:5(263) (1988), 133–163.
- [8] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, *УМН*, **47**:3(285) (1992), 115–146.

- [9] С. И. Свинолулов, В. В. Соколов, *ТМФ*, **100**:2 (1994), 214–218.
- [10] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [11] С. Я. Старцев, *ТМФ*, **116**:3 (1999), 336–348.
- [12] С. Я. Старцев, *ТМФ*, **127**:1 (2001), 63–74.
- [13] F. Calogero, “Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable?”, *What is Integrability?*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., ed. V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1991, 1–62.
- [14] A. I. Zenchuk, P. M. Santini, *On the remarkable relations among PDEs integrable by the inverse spectral transform method, by the method of characteristics and by the Hopf–Cole transformation*, [arXiv: 0801.3945](https://arxiv.org/abs/0801.3945).
- [15] P. M. Santini, *Inverse Problems*, **8**:2 (1992), 285–301.
- [16] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [17] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррио, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М., 1988.
- [18] В. М. Журавлев, *ЖЭТФ*, **110**:6 (1996), 2243–2262.
- [19] В. М. Журавлев, *Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией*, Изд. УлГУ, Ульяновск, 2002.
- [20] В. М. Журавлев, А. В. Никитин, *Третьи Курдюмовские чтения “Синергетика в естественных науках”*, Материалы межд. междисциплинар. науч. конф. (Тверь, 19–22 апреля 2007), Тверской гос. ун-т, Тверь, 2007, 60–61.
- [21] В. М. Журавлев, А. В. Никитин, *Нелинейный мир*, **5**:9 (2007), 603–611.
- [22] В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев, *Письма в ЖЭТФ*, **87**:5 (2008), 314–318.
- [23] Б. А. Урюков, *Теплофизика и аэромеханика*, **6**:3 (1999), 421–424.
- [24] Э. Скотт, *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*, Советское радио, М., 1977.
- [25] В. М. Журавлев, *ЖЭТФ*, **129**:3 (2006), 587–604; *Письма в ЖЭТФ*, **75**:1 (2002), 11–16.
- [26] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, М., 1953.
- [27] О. В. Руденко, С. И. Солуян, *Теоретические основы нелинейной акустики*, Наука, М., 1975.

Поступила в редакцию 11.09.2007,
после доработки 25.06.2008