Общероссийский математический портал

В. И. Алхимов, Эволюция в случайном гауссовом поле, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 3, 512–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf63>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:51:08

ЭВОЛЮЦИЯ В СЛУЧАЙНОМ ГАУССОВОМ ПОЛЕ

Рассмотрен эволюционный процесс в случайном гауссовом поле $V(q)$ с нулевым средним, $\langle V(q) \rangle = 0$, и корреляционной функцией $W(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) \equiv \langle V(q)V(q') \rangle$, где $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$, d -размерность евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Для усредненной по всем реализациям случайного поля функции Грина $\langle G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0) \rangle$, $t > 0$, эволюционного уравнения с помощью формулы Фейнмана–Каца установлено интегральное уравнение, обладающее свойством инвариантности относительно непрерывной группы ренормировочных преобразований. Это свойство позволяет использовать ренормгрупповой метод для отыскания асимптотики функции $\langle G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0) \rangle$, когда $|\mathbf{q} - \mathbf{q}_0| \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: случайное поле, корреляционная функция, функция Грина, формула Фейнмана–Каца, ренормализационная группа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основная задача теории случайных (неупорядоченных) сред состоит в исследовании двух основных механизмов их эволюции: диссипации (например, диффузии или теплопроводности) и самоорганизации (обусловленной, например, воздействием внешних потенциальных полей или потоков) [1]–[4]. В данной работе используется модель ветвящегося процесса с диффузией для изучения эволюции физической системы в стационарной случайной среде. Предполагается, что среда пространственно-однородна в среднем и в ней отсутствуют статистические корреляции между случайными параметрами, характеризующими неупорядоченность в достаточно удаленных друг от друга точках. Влияние среды на эволюционный процесс мы будем описывать посредством случайного потенциального поля $V(q)$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$, которое имеет гауссово распределение с нулевым средним, $\langle V(q) \rangle = 0$, и корреляционной функцией

$$W(|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|) \equiv \langle V(q)V(q') \rangle,$$

где усреднение выполняется по всем реализациям случайного потенциала $V(q)$. В этом случае все характеристики потенциала $V(q)$ выражаются в терминах корреляционной функции $W(q)$, ограниченной на пространстве $\mathbb{R}^d$,

$$|W(q)| < K, \quad K > 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^d. \quad (1)$$

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: vialkhim@mtu-net.ru

Эта функция предполагается интегрируемой вместе со своей производной на $\mathbb{R}^d$ и достаточно быстро стремящейся к нулю, когда $q/l \rightarrow \infty$, где l – характеристическая длина, например, эффективный радиус корреляции функции $W(q)$, определяемый равенствами

$$wl^d = \int_{\mathbb{R}^d} W(q) d\mathbf{q}, \quad wl^{d+1} = \int_{\mathbb{R}^d} qW(q) d\mathbf{q}. \quad (2)$$

Эволюция во времени многих физических систем описывается уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + H\rho = 0, \quad (3)$$

где ρ обозначает некоторую “плотность” системы, а H – линейный оператор в пространстве непрерывных функций $\rho = \rho(\mathbf{q}, t)$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$. В случае, когда оператор H имеет вид

$$H = -D \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} + V(q), \quad D > 0, \quad (4)$$

уравнение (3) описывает суперпозицию процессов диффузии (или распространения тепла) и ветвления (размножения и гибели) в стационарной среде. Если в уравнениях (3) и (4) формально положить $t = \hbar/(k_B T)$, $D = \hbar/(2m)$, $\hbar$ – постоянная Планка, k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m – масса частицы, то уравнение (3) будет описывать зависимость матрицы плотности для квантово-механической системы, находящейся в тепловом равновесии, от температуры [5]. Ради общности изложения мы не будем конкретизировать изучаемую модель физической системы. Поскольку в рассматриваемой модели взаимодействуют два механизма эволюции, то, очевидно, возможны два предельных режима, в каждом из которых преобладает один из указанных процессов. Эту ситуацию можно описать с помощью безразмерного параметра

$$a = \frac{wl^4}{D^2} \quad (5)$$

следующим образом. Если $a \ll 1$, то в общем процессе эволюции системы преобладает механизм диффузии. В случае $a \gg 1$ превалирует эффект ветвления. Так как последний случай подробно исследован в работе [6], то ниже мы рассмотрим процесс лишь при $a \ll 1$.

Объектом нашего исследования будет являться функция

$$g(r, t) = \langle G(\mathbf{q}_0 + \mathbf{r}, t; \mathbf{q}_0) \rangle \quad \forall \{\mathbf{q}_0, \mathbf{r}\} \in \mathbb{R}^d, \quad (6)$$

где $G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0)$ обозначает функцию Грина уравнения (3) или ядро оператора e^{-tH} с оператором H , определенным в (4). С помощью формулы Фейнмана–Каца [7]–[9] функцию Грина можно записать в виде

$$G(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} (4\pi D\tau)^{-Nd/2} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} e^{-S_N} \prod_{m=1}^{N-1} d\mathbf{q}_m, \quad (7)$$

где $\tau = t/N$, $t_n = n\tau$, $n = 1, 2, \dots, N$, $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}(t_n)$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$,

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left[\frac{(\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{n-1})^2}{4D\tau} + \tau V(\mathbf{q}_n) \right].$$

Далее мы воспользуемся формулой (7), теоремой Фубини и равенством

$$\left\langle \exp \left[-\tau \sum_{n=1}^N V(q_n) \right] \right\rangle = A_N(t) \exp \left[\tau^2 \sum_{0 \leq m < n \leq N} W(|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_m|) \right],$$

в котором

$$A_N(t) = \exp \left[\frac{t^2}{N} \left(\frac{1}{2} W(0) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N W(|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_0|) \right) \right].$$

Вследствие ограниченности функции $W(q)$ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_N(t) = 1.$$

Тогда, как нетрудно видеть, искомую функцию $g(r, t)$ можно привести к виду

$$g(r, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\mathbf{r}\mathbf{p}} g_N(p) d\mathbf{p}, \quad (8)$$

где

$$g_N(p) = \int P_{1N} \prod_{n=1}^N \theta_p(r_n) d\mathbf{r}_n, \quad (9)$$

$$P_{mn} = \prod_{m \leq i \leq j \leq n} (1 + \varepsilon_{ij}), \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon(|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{i-1}|) = \varepsilon \left(\left| \sum_{i \leq k \leq j} \mathbf{r}_k \right| \right), \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1},$$

$$\varepsilon(r) = \exp[\tau^2 W(r)] - 1, \quad (11)$$

а функция $\theta_p(r)$ имеет вид

$$\theta_p(r) = (4\pi D\tau)^{-d/2} \exp \left[-i\mathbf{p}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}^2}{4D\tau} \right]. \quad (12)$$

Из условия (1), равенств (9)–(12) и формулы

$$\Theta(p) \equiv \int \theta_p(r) d\mathbf{r} = \exp[-\tau D p^2] \quad (13)$$

нетрудно получить следующую оценку:

$$|g_N(p)| < \exp \left(\frac{1}{2} K t^2 - D p^2 t \right). \quad (14)$$

Следует отметить, что в соответствующих соотношениях выполняются два независимых функциональных интегрирования: одно – по пространству траекторий $\{\mathbf{q}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d\}$, другое – по всем реализациям случайного потенциала $V(q)$ [10].

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

В этом разделе мы установим уравнение для величины $g(r, t)$, используя при этом некоторые результаты работ [11]–[13]. С этой целью в равенствах (8)–(10) воспользуемся разложением Майера произведения P_{1N} в ряд по ε_{ij} :

$$P_{1N} = 1 + \sum_{i \leq j} \varepsilon_{ij} + \sum_{i \leq j} \sum_{k \leq l} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \sum_{i \leq j} \sum_{k \leq l} \sum_{m \leq n} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \dots, \quad (15)$$

где индексы в каждом из сомножителей $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}, \varepsilon_{mn}, \dots$ располагаются в порядке неубывания, т.е. $i \leq j, k \leq l, m \leq n, \dots$, и, кроме того, первые индексы этих сомножителей в каждом члене указанной суммы тоже образуют неубывающую последовательность, т.е. $i \leq k \leq m \leq \dots$, причем $(i, j) \neq (k, l), (i, j) \neq (m, n), (k, l) \neq (m, n), \dots$. Сомножители ε_{ij} и ε_{kl} назовем связанными, если $i \leq k \leq j$, и несвязанными, если $j < k$. Любое произведение сомножителей в (15), расположенных в порядке неубывания их первых индексов, будем называть комплексом, если в этом произведении каждый сомножитель, начиная со второго, связан по крайней мере с одним из предшествующих сомножителей. Очевидно, любой член суммы в (15) является либо комплексом, либо распадается на произведение некоторого числа комплексов. Обозначим теперь через f_{ij} сумму всех комплексов, зависящих от векторов $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_j, i \leq j$, и назовем ее блоком. Таким образом, по определению

$$\begin{aligned} f_{ij} = & \varepsilon_{ij} P'_{ij} + \sum_{i < k \leq l < j} \varepsilon_{il} \varepsilon_{kj} P_{i, k-1} P_{kl} P_{l+1, j} + \\ & + \sum_{i < k < l \leq m < n < j} (\varepsilon_{in} \varepsilon_{km} \varepsilon_{lj} + \varepsilon_{im} \varepsilon_{kj} \varepsilon_{ln} + \varepsilon_{im} \varepsilon_{kn} \varepsilon_{lj}) P_{i, k-1} P_{k, l-1} P_{lm} P_{m+1, n} P_{n+1, j} + \\ & + \varepsilon_{il} \varepsilon_{kn} \varepsilon_{mj} P_{i, k-1} P_{kl} P_{l+1, m-1} P_{mn} P_{n+1, j} + \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

где произведение $\varepsilon_{ij} P'_{ij}$ определяется равенством

$$\varepsilon_{ij} P'_{ij} = \varepsilon_{ij} P_{ij} (1 + \varepsilon_{ij})^{-1}. \quad (17)$$

В правой части (16) под знаком первой суммы фигурирует всего лишь один представитель комплексов второго порядка по ε_{ij} , в то время как под знаком второй суммы находятся четыре неэквивалентных представителя комплексов третьего порядка относительно ε_{ij} . Если обозначить через N_n полное число неэквивалентных представителей комплексов n -го порядка по ε_{ij} , то оказывается, что $N_4 = 27$. В общем случае для N_n в работе [14] установлено рекуррентное соотношение, из которого следует, что $N_n = O((2n-1)!!)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда нетрудно видеть, что произведение P_{1N} можно разложить по блокам f_{ij} ,

$$\begin{aligned} P_{1N} = & 1 + \sum_{1 \leq i \leq i+k \leq N} f_{i, i+k} + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_1+k_1 < i_2 \leq i_2+k_2 \leq N} f_{i_1, i_1+k_1} f_{i_2, i_2+k_2} + \dots + \\ & + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_1+k_1 < i_2 \leq i_2+k_2 < \dots < i_m \leq i_m+k_m \leq N} \dots \sum_{1 \leq i_1 \leq i_1+k_1} f_{i_1, i_1+k_1} f_{i_2, i_2+k_2} \dots f_{i_m, i_m+k_m} + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

так что каждый член суммы в (18) является либо блоком, либо произведением некоторого числа блоков. Теперь воспользуемся разложением (18) в равенстве (9) и затем проинтегрируем каждый член полученного ряда. Находим, что

$$\int \prod_{n=1}^N \theta_p(r_n) d\mathbf{r}_n = \Theta^N(p),$$

$$\int \left[\sum_{1 \leq i \leq i+k \leq N} f_{i \ i+k} \right] \prod_{n=1}^N \theta_p(r_n) d\mathbf{r}_n = \sum_{n=0}^N (N-n+1) \Theta^{N-n}(p) f_n(p),$$

где

$$f_0(p) \equiv 0, \quad f_n(p) = \int f_{1n} \prod_{m=1}^n \theta_p(r_m) d\mathbf{r}_m \quad \forall n \geq 1, \quad (19)$$

f_{1n} – блок, составленный из всех комплексов, зависящих лишь от векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$, а $(N-n+1)$ – число способов размещения одного отрезка, состоящего из n звеньев, внутри отрезка, содержащего N звеньев. Наконец,

$$\int \sum_{1 \leq i_1 \leq i_1+k_1 < i_2 \leq i_2+k_2 < \dots < i_m \leq i_m+k_m \leq N} f_{i_1 \ i_1+k_1} f_{i_2 \ i_2+k_2} \dots f_{i_m \ i_m+k_m} =$$

$$= \sum_{n=0}^N \frac{(N-n+m)!}{(N-n)! m!} \Theta^{N-n}(p) F_n^{(m)}(p),$$

где

$$F_n^{(0)}(p) \equiv 0, \quad F_n^{(m)}(p) = \sum_{n_1+\dots+n_m=n} \dots \sum f_{n_1}(p) \dots f_{n_m}(p), \quad \forall m \geq 1, \quad (20)$$

а множитель $(N-n+m)! / ((N-n)! m!)$ равен числу способов размещения m частичных отрезков, состоящих последовательно из $n_1, n_2, \dots, n_m$ звеньев, общее число которых равно n и которые расположены внутри одного отрезка, состоящего из N звеньев, таким образом, чтобы при этом сохранялась последовательность расположения частичных отрезков. В результате величину $g_N(p)$ можно представить в виде

$$g_N(p) = \sum_{m \geq 0} \sum_{n=0}^N \frac{(N-n+m)!}{(N-n)! m!} \Theta^{N-n}(p) F_n^{(m)}(p). \quad (21)$$

По формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{n_1+n_2+\dots+n_m-n-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^m n_j = n, \\ 0, & \text{если } \sum_{j=1}^m n_j \neq n, \end{cases}$$

где замкнутый контур C охватывает начало координат на комплексной z -плоскости, равенство в (20) приводится к виду

$$F_n^{(m)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z^{n+1}} f^m(p, z), \quad (22)$$

где

$$f(p, z) \equiv \sum_{n \geq 0} z^n f_n(p). \quad (23)$$

Используя выражение (22), соотношение (21) запишем в виде

$$g_N(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z^{N+1}} \sum_{m \geq 0} \sum_{n=0}^N \frac{(N-n+m)!}{(N-n)! m!} [z\Theta(p)]^{N-n} f^m(p, z), \quad (24)$$

где суммирование по m можно распространить формально от 0 до ∞ , а по n — от $-\infty$ до N , не оказывая влияния при этом на конечный результат. Принимая во внимание последнее замечание и формулу

$$(1-x-y)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m! n!} x^m y^n, \quad |x+y| < 1,$$

приведем соотношение (24) к виду

$$g_N(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z^{N+1}} [1 - z\Theta(p) - f(p, z)]^{-1}, \quad (25)$$

где замкнутый контур C , охватывающий начало координат $z = 0$, выбран так, чтобы выполнялось неравенство

$$|z\Theta(p) + f(p, z)| < 1. \quad (26)$$

Если определить производящую функцию

$$g(p, z) \equiv \sum_{N \geq 0} z^N g_N(p), \quad (27)$$

то из равенства (25) следует уравнение

$$g^{-1}(p, z) = g_0^{-1}(p, z) - f(p, z), \quad (28)$$

в котором

$$g_0^{-1}(p, z) = 1 - z\Theta(p). \quad (29)$$

Отметим, что согласно условию (14) ряд в (27) абсолютно сходится по крайней мере в области $|z| < 1$. Уравнение (28) имеет вид известного уравнения Дайсона и в решении рассматриваемой задачи играет главную роль. Кроме того, необходимо установить непосредственную связь между производящими функциями $f(p, z)$ и $g(p, z)$, чтобы это уравнение было замкнутым. Для этого подставим определенное в (16) выражение для f_{1n} в равенство (19) и запишем величину ε_{mn} в следующей форме:

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \sum_{j=m}^n \mathbf{r}_j \right] d\mathbf{k}, \quad (30)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varepsilon(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (31)$$

в соответствии с определениями ε_{mn} и $\varepsilon(r)$ в (11). Выполняя затем в (19) интегрирование по $\mathbf{r}_m$, $1 \leq m \leq n$, находим

$$\begin{aligned} f_n(p) = & \frac{1}{(2\pi)^d} \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) g'_n(\mathbf{p} - \mathbf{k}) d\mathbf{k} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \times \\ & \times \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}') g_{i-1}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) g_{j-i+1}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') g_{n-j}(\mathbf{p} - \mathbf{k}') d\mathbf{k} d\mathbf{k}' + \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq k < l < n} \frac{1}{(2\pi)^{3d}} \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}') \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}'') \left\{ g_{i-1}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) g_{j-i}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \right. \\ & \times g_{k-j+1}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') [g_{l-k}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}'') g_{n-l}(\mathbf{p} - \mathbf{k}'') + \\ & + g_{l-k}(\mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') g_{n-l}(\mathbf{p} - \mathbf{k}') + g_{l-k}(\mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') g_{n-l}(\mathbf{p} - \mathbf{k}'')] + \\ & + g_{i-1}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) g_{j-i}(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') g_{k-j+1}(\mathbf{p} - \mathbf{k}') \times \\ & \left. \times g_{l-k}(\mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') g_{n-l}(\mathbf{p} - \mathbf{k}'') \right\} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' + \dots, \end{aligned} \quad (32)$$

где функция $g'_N(p)$ определена выражением (9), в котором произведение P_{1N} должно быть заменено на P'_{1N} . Принимая во внимание равенства (17) и (11), а также учитывая ограниченность функции $W(q)$, нетрудно видеть, что $|g'_n(\mathbf{p}) - g_n(\mathbf{p})| = O(\tau^2)$, когда $\tau \rightarrow 0$. Поскольку для решения задачи нам предстоит в дальнейшем выполнить предельный переход, при котором $\tau \rightarrow 0$, то отсюда следует, что функции $g'_n(\mathbf{p})$ и $g_n(\mathbf{p})$ можно принять совпадающими всюду. Если теперь подставить выражение (32) в равенство (23), то после надлежащего суммирования получим для $f(p, z)$ бесконечный ряд

$$\begin{aligned} f(p, z) = & \frac{1}{(2\pi)^d} \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) g(\mathbf{p} - \mathbf{k}, z) d\mathbf{k} + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}') g(\mathbf{p} - \mathbf{k}, z) g(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}', z) g(\mathbf{p} - \mathbf{k}', z) d\mathbf{k} d\mathbf{k}' + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{3d}} \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}') \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}'') \left\{ g(\mathbf{p} - \mathbf{k}, z) g(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}', z) \times \right. \\ & \times g(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'', z) [g(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}'', z) g(\mathbf{p} - \mathbf{k}'', z) + \\ & + g(\mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'', z) g(\mathbf{p} - \mathbf{k}', z) + g(\mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'', z) g(\mathbf{p} - \mathbf{k}'', z)] + \\ & + g(\mathbf{p} - \mathbf{k}, z) g(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}', z) g(\mathbf{p} - \mathbf{k}', z) g(\mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'', z) \times \\ & \left. \times g(\mathbf{p} - \mathbf{k}'', z) \right\} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' + \dots, \end{aligned} \quad (33)$$

посредством которого описывается искомая связь между функциями $f(p, z)$ и $g(p, z)$.

Таким образом, соотношения (28) и (33) образуют замкнутую систему уравнений относительно искомой функции $g(p, z)$. Ряд в (33) удобно представить в символической форме

$$f(p, z) = \sum_{n \geq 1} N_n \int \{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k})\}^n \{g(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|, z)\}^{2n-1} \left\{ \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \right\}^n, \quad (34)$$

для того чтобы продемонстрировать инвариантность уравнения (28) относительно мультипликативных преобразований

$$g \rightarrow g' = \alpha g, \quad g_0 \rightarrow g'_0 = \alpha g_0, \quad \tilde{\varepsilon} \rightarrow \tilde{\varepsilon}' = \alpha^{-2} \tilde{\varepsilon}, \quad f \rightarrow f' = \alpha^{-1} f, \quad (35)$$

где α – отличный от нуля параметр. Эти преобразования образуют непрерывную группу, называемую обычно ренормгруппой (РГ), что указывает на возможность применения ренормгруппового метода к исследуемой здесь проблеме.

Обратимся теперь к равенствам (11) и (31), согласно которым

$$\tilde{\varepsilon}(k) \sim \tau^2 u(k), \quad \tau \rightarrow 0, \quad (36)$$

где

$$u(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} W(r) d\mathbf{r} \quad (37)$$

– пространственный спектр случайного потенциала $V(k)$, удовлетворяющий условию

$$0 < u(k) \leq u(0) = w l^d \quad (38)$$

согласно (2). Ранее высказанное предположение о поведении функции $W(r)$ при больших значениях r равносильно предположению о регулярности пространственного спектра $u(k)$ в точке $k = 0$. Кроме того, вследствие предполагаемой интегрируемости производной $dW(r)/dr$, из леммы Римана–Лебега вытекает, что

$$u(k) < \frac{C}{k^2},$$

когда $k \rightarrow \infty$, $C > 0$. В дальнейшем через C мы будем обозначать положительную постоянную, которая в разных формулах может принимать различные значения. Далее, из соотношений (13), (33) и (36) следует, что в случае $\tau \rightarrow 0$ и $\text{Im } p = 0$ условие (26) вырождается в неравенство $|z| < 1$. В связи с этим введем новую переменную E ($\text{Re } E > 0$) посредством равенства

$$z = z(\tau) \equiv e^{-E\tau} \quad (39)$$

и запишем уравнение (28) в виде

$$\begin{aligned} [\tau g(p, z(\tau))]^{-1} &= \tau^{-1} \{1 - \exp[-\tau(E + Dp^2)]\} - \\ &- \sum_{n \geq 1} N_n \int \{\tau^{-2} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k})\}^n \{\tau g(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|, z(\tau))\}^{2n-1} \left\{ \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \right\}^n, \end{aligned} \quad (40)$$

принимая во внимание РГ-свойство (35). Вследствие неравенства

$$|\tau g(p, z(\tau))| < \tau [1 - e^{-\tau E}]^{-1} \exp\left(\frac{1}{2} K t^2 - D p^2 t\right), \quad (41)$$

вытекающего из формул (14) и (27), аналитическая в области $|z| < 1$ функция $(1 - z) \times g(p, z)$ является ограниченной в этой области, и поэтому существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau g(p, z(\tau)) \equiv \varphi(p, E). \quad (42)$$

Выполняя предельный переход в уравнении (40) при $\tau \rightarrow 0$ и учитывая при этом соотношения (36) и (42), получим для функции $\varphi(p, E)$ следующее уравнение:

$$\varphi^{-1}(p, E) = E + Dp^2 - F(p, E; u; \varphi), \quad (43)$$

где величина $F(p, E; u; \varphi)$ согласно (34) выглядит символически как

$$F(p, E; u; \varphi) = \sum_{n \geq 1} N_n \int \{ \varphi(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|, E) \}^{2n-1} \left\{ \frac{u(k) d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \right\}^n. \quad (44)$$

Теперь мы воспользуемся формулой обращения для равенства (27), чтобы выразить функцию $g_N(p)$ через $g(p, z)$, и затем перейдем к пределу в (8), учитывая при этом равенства (39) и (42). В результате получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{Et} \varphi(p, E) dE, \quad (45)$$

где контур интегрирования расположен справа от сингулярных точек функции $\varphi(p, E)$. Учитывая равенство (45) в формуле (8), получим

$$g(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{Et} \psi(r, E) dE, \quad (46)$$

где

$$\psi(r, E) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\mathbf{r}\mathbf{p}} \varphi(p, E) d\mathbf{p}. \quad (47)$$

Таким образом, определение функции $g(r, t)$ сводится к решению уравнения (43). Эта проблема очень трудна, поэтому мы займемся здесь более простой задачей, а именно определением асимптотического поведения функции $g(r, t)$ при $r \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$. Из формул (46) и (47) следует, что в этом случае необходимо знать поведение функции $\varphi(p, E)$ при малых значениях p и $|E - E_0|$, где E_0 — наиболее удаленная вправо вещественная особая точка функции $\varphi(0, E)$, определяемая согласно (43) уравнением

$$E_0 - F(0, E_0; u; \varphi) \equiv 0. \quad (48)$$

Далее, обозначим через $p_{1,2} \equiv \pm i\xi$, $\text{Re } \xi > 0$, ближайшие к началу $p = 0$ корни уравнения $\varphi^{-1}(p, E) = 0$. Тогда, полагая $p = p_1$ в (43), получим тождество

$$E + Dp_1^2 - F(p_1, E; u; \varphi) \equiv 0. \quad (49)$$

Из (48) и (49) вытекает следующая связь между $E - E_0$ и p_1^2 :

$$E - E_0 + Dp_1^2 + F(0, E_0; u; \varphi) - F(p_1, E; u; \varphi) \equiv 0. \quad (50)$$

Наконец, с помощью тождества (49) преобразуем уравнение (43) к виду

$$\varphi^{-1} = \varphi_0^{-1} + \Phi(\chi^2, \xi^2; u; \varphi), \quad (51)$$

где

$$\varphi_0^{-1} = D\chi^2, \quad \chi^2 = p^2 + \xi^2, \quad (52)$$

$$\Phi(\chi^2, \xi^2; u; \varphi) = F(i\xi, E; u; \varphi) - F(p, E; u; \varphi). \quad (53)$$

Система уравнений (50) и (51) составляет основу для отыскания асимптотики функции $g(r, t)$ при $r \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$, если задана корреляционная функция $W(r)$.

3. РГ-УРАВНЕНИЯ

Представим искомую функцию φ как

$$\varphi = \varphi_0 X, \quad (54)$$

где новая неизвестная величина X удовлетворяет уравнению

$$X^{-1} = 1 + \varphi_0 \Phi(\chi^2, \xi^2; u; \varphi_0 X) \quad (55)$$

согласно (51) и (53). Предположим теперь, что при некотором не равном нулю значении $\chi^2 = \lambda$ справедливо равенство

$$\Phi(\lambda, \xi^2; u; \varphi_0 X) = 0,$$

где $\lambda = \lambda(\xi^2; u)$. Тогда безразмерную величину X можно представить как функцию безразмерных переменных,

$$X = X(x, y, b),$$

где

$$x = \frac{\chi^2}{\lambda}, \quad y = \frac{\xi^2}{\lambda}, \quad b = \frac{a}{(\lambda l^2)^{1-s}}, \quad s = \frac{d-2}{2},$$

причем в точке $x = 1$ выполняется условие нормировки

$$X(1, y, b) = 1. \quad (56)$$

Далее, умножим обе части уравнения (55) на α^{-1} и, учитывая РГ-свойство этого уравнения, запишем его в эквивалентной форме

$$(X')^{-1} = 1 + \varphi_0 \Phi(\chi'^2, \xi'^2; u'; \varphi_0 X') - (1 - \alpha^{-1}), \quad (57)$$

где $X' = \alpha X$, $u' = \alpha^{-2}u$. Теперь выберем значение $\chi'^2 = \lambda'$, $\lambda' \neq 0$, так, чтобы

$$\Phi(\lambda', \xi'^2; u'; \varphi_0 X') = D\lambda'(1 - \alpha^{-1}),$$

т.е.

$$[X']_{\chi^2=\lambda'} = 1. \quad (58)$$

Это означает, что РГ-свойство уравнения (55) можно записать в форме

$$\alpha X(x, y, b) = X\left(\frac{x}{\nu}, \frac{y}{\nu}; b\alpha^{-2}\nu^{s-1}\right), \quad (59)$$

где $\nu = \lambda'/\lambda$. Если в (59) положить $x = \nu$ и учесть условие нормировки (58), то

$$\alpha^{-1} = X(\nu, y, b),$$

а равенство (59) преобразуется к виду

$$X(x, y, b) = X(\nu, y, b)X\left(\frac{x}{\nu}, \frac{y}{\nu}, b\nu^{s-1}X^2(\nu, y, b)\right). \quad (60)$$

Далее, возведем в квадрат обе части уравнения (60) и затем умножим его на $b x^{s-1}$. В результате находим, что величина

$$B(x, y, b) = b x^{s-1} X^2(x, y, b) \quad (61)$$

удовлетворяет уравнению

$$B(x, y, b) = B\left(\frac{x}{\nu}, \frac{y}{\nu}, B(\nu, y, b)\right) \quad (62)$$

с нормировочным условием

$$B(1, y, b) = b. \quad (63)$$

Уравнение (62) замкнуто и может быть решено в общем виде. Однако для практических целей более удобно иметь дело с дифференциальным уравнением Ли, соответствующим непрерывной РГ [15].

Чтобы получить уравнение Ли для функции $B(x, y, b)$, продифференцируем обе части уравнения (62) по x и затем положим $\nu = x$. В результате получим

$$x \frac{\partial B(x, y, b)}{\partial x} = \beta\left(\frac{y}{x}, B(x, y, b)\right), \quad (64)$$

где

$$\beta(y, b) = \left. \frac{\partial B(x, y, b)}{\partial x} \right|_{x=1}, \quad (65)$$

а равенство (63) играет роль граничного условия для уравнения (64). В частном случае, когда $y \rightarrow 0$, для функции

$$B(x, b) = \lim_{y \rightarrow 0} B(x, y, b) \quad (66)$$

уравнение (64) приводится к виду

$$x \frac{\partial B(x, b)}{\partial x} = \beta(B(x, b)), \quad (67)$$

где

$$\beta(b) = \left. \frac{\partial B(x, b)}{\partial x} \right|_{x=1}, \quad (68)$$

а соответствующее граничное условие принимает форму

$$B(1, b) = b. \quad (69)$$

Уравнение (67) совместно с (69) можно записать также в виде уравнения Гелл-Манна–Лоу

$$\int_b^{B(x, b)} \beta^{-1}(\nu) d\nu = \ln x, \quad (70)$$

которое оказывается очень удобным для исследования поведения инвариантной величины $B(x, b)$ при малых значениях x , или $p^2 \ll \lambda$.

Таким образом, согласно РГ-уравнениям $B(x, b)$ является эффективным параметром, характеризующим корреляцию в малой окрестности точек $p = 0$ и $\xi = 0$. Отсюда следует, что для определения асимптотического поведения функции

$$X(x, b) = \lim_{y \rightarrow 0} X(x, y, b), \quad (71)$$

когда $x \rightarrow 0$, необходимо знать свойства функции $\beta(b)$, определяемой уравнением (68). Обычно для вычисления функции $\beta(b)$ используется теория возмущений, в связи с чем реальную информацию о ее поведении удастся получить лишь в малой окрестности точки $b = 0$, где $\beta(0) = 0$. Действительно, если $\beta(b)$ положительна в этой окрестности, то инвариантная величина $B(x, b)$ стремится к нулю, когда $x \rightarrow 0$, т.е. точка $b = 0$ является стабильным нулем. Если же функция $\beta(b)$ отрицательна вблизи нуля, то $B(x, b)$ возрастает, когда $x \rightarrow 0$, что находится за пределами применимости теории возмущений. Согласно выражениям (61) и (71) $B(x, b) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, если

$$X(x, b) = o(x^{(1-s)/2}), \quad x \rightarrow 0. \quad (72)$$

Отсюда следует, что в том случае, когда $X(x, b) = O(x^\mu)$ при $x \rightarrow 0$, условие

$$1 - s < 2\mu \quad (73)$$

является необходимым для определения функции $\beta(b)$ в окрестности точки $b = 0$. Однако величина μ не зависит от y , и поэтому функция $X(x, y, b)$ тоже будет вести себя как $O(x^\mu)$ при $x \rightarrow 0$. Но тогда в соответствии с равенством (54) искомая функция φ должна вести себя в этом случае как $O(x^{\mu-1})$.

Учитывая последнее замечание, обратимся к уравнению (55) и в его правой части рассмотрим поведение функции $\chi^{-2}\Phi(\chi^2, \xi^2; u; \varphi)$ для малых значений параметра a и

значений p , принадлежащих малой окрестности точки $p = p_1$. Для этого воспользуемся разложением функции Φ , определяемым равенствами (53) и (44),

$$\begin{aligned} \Phi(\chi^2, \xi^2; u; \varphi) = & \frac{1}{(2\pi)^d} \int [\varphi(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}|, E) - \varphi(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|, E)] u(k) d\mathbf{k} + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int [\varphi(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}|, E) \varphi(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - \mathbf{k}'|, E) \varphi(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}'|, E) - \\ & - \varphi(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|, E) \varphi(|\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}'|, E) \varphi(|\mathbf{p} - \mathbf{k}'|, E)] u(k) u(k') d\mathbf{k} d\mathbf{k}' + \dots, \end{aligned} \quad (74)$$

где указаны явно лишь члены первого и второго порядка относительно $u(k)$. Асимптотическая оценка подынтегральных функций в каждом члене ряда (74), когда $\varphi(k, E) = O(k^2 + \xi^2)^{\mu-1}$ и $u(k) < Ck^{-2}$ при $k \rightarrow \infty$, показывает, что сходимость интегралов в (74) будет обеспечена, если выполнено условие

$$\mu < 1 - s. \quad (75)$$

Тогда условия (73) и (75) можно объединить в одно условие

$$\mu < 1 - s < 2\mu, \quad (76)$$

где $0 \leq s < 1$ (или $2 \leq d < 4$). Таким образом, для определения асимптотической формы функции $\varphi(p, E)$, когда $p \rightarrow 0$ и $E \rightarrow E_0$ (или $\xi \rightarrow 0$), необходимо найти значение $\mu = \mu(s)$, удовлетворяющее условию (76).

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В соответствии с вышесказанным примем в качестве исходного приближения для $\varphi(p, E)$ выражение

$$\tilde{\varphi}(p, \xi) = AD^{-1} \left(\frac{L}{\chi} \right)^{1-\mu} K_{1-\mu}(L\chi), \quad l \ll L, \quad (77)$$

в котором значения параметров A и $\mu = \mu(s)$, $0 \leq s < 1$, должны быть найдены, а использование функции Макдональда $K_\nu(z)$ обусловлено ее известными [16] асимптотическими свойствами

$$K_\nu(z) \sim \begin{cases} 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) z^{-\nu}, & z \rightarrow 0, \\ \sqrt{\pi/2z} e^{-z}, & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad K_{-\nu}(z) = K_\nu(z), \quad \nu > 0, \quad (78)$$

адекватными свойствам решения уравнения (51). Здесь следует подчеркнуть, что выбор конкретной формы исходного приближения для функции $\varphi(p, E)$ неоднозначен, если нас интересует ее асимптотика при $\xi \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 0$. Этот выбор определяется двумя требованиями. Во-первых, необходимо учесть вклад в величину $\tilde{\varphi}(p, \xi)$ только ближайшей к началу $p = 0$ особой точки $p_1 = i\xi$. Во-вторых, в соответствии с вышеприведенным анализом поведение функции $\tilde{\varphi}(p, \xi)$ в окрестности точки $p = p_1$ должно иметь вид

$$\tilde{\varphi}(p, \xi) = O(\chi^{2(\mu-1)}), \quad \chi \rightarrow 0. \quad (79)$$

Но тогда, согласно (47) и (77), соответствующее приближение для функции $\psi(r, E)$ есть

$$\tilde{\psi}(r, \xi) = (2\pi)^{-d/2} A D^{-1} R^{-2\nu} \overline{K}_\nu(\xi R), \quad (80)$$

где

$$R^2 = r^2 + L^2, \quad \overline{K}_\nu(z) = z^\nu K_\nu(z), \quad \nu = \mu + s. \quad (81)$$

Из свойства (79) и условия нормировки функции

$$\tilde{X}\left(\frac{\chi^2}{\lambda}, \frac{\xi^2}{\lambda}, b\right) = D \chi^2 \tilde{\varphi}(p, \xi) \quad (82)$$

в точке $\chi^2 = \lambda$ следует, что

$$A^{-1} = \lambda^\mu \overline{K}_{1-\mu}(L\sqrt{\lambda}), \quad L\sqrt{\lambda} \ll 1, \quad (83)$$

откуда, в свою очередь, вытекает неравенство $l\sqrt{\lambda} \ll 1$. В рассматриваемом приближении согласно соотношениям (44) и (53) запишем функцию $\Phi(\chi^2, \xi^2; u; \tilde{\varphi})$ в виде

$$\begin{aligned} D^{-1} \chi^{-2} \Phi(\chi^2, \xi^2; u; \tilde{\varphi}) &= \sum_{n \geq 1} N_n b^n \left(\frac{\chi^2}{\lambda}\right)^{n(2\mu+s-1)-\mu} \times \\ &\times \int \left[\{Z_\chi(\eta_1(\varkappa))\}^{2n-1} - \{Z_\chi(\eta(\varkappa))\}^{2n-1} \right] \left\{ \frac{\bar{u}(\chi \varkappa)}{(2\pi)^d} d\varkappa \right\}^n, \end{aligned} \quad (84)$$

где

$$Z_\chi(z) = z^{\mu-1} \frac{\overline{K}_{1-\mu}(L\chi\sqrt{z})}{\overline{K}_{1-\mu}(L\sqrt{\lambda})}, \quad \bar{u}(k) = \frac{u(k)}{u(0)}, \quad (85)$$

$$\eta(\varkappa) = \varkappa^2 - 2\varkappa\epsilon + 1, \quad \epsilon = \frac{\mathbf{P}}{\chi}, \quad \eta_1(\varkappa) = \varkappa^2 - 2\varkappa\epsilon_1, \quad \epsilon_1 = \frac{\mathbf{P}_1}{\chi}. \quad (86)$$

Поскольку параметр μ не зависит от переменных p и ξ , то для определения его значения можно перейти к пределу $\xi \rightarrow 0$. В таком случае выражение (84) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} D^{-1} p^{-2} \Phi(p^2, 0; u; \tilde{\varphi}) &= A_1 b (\lambda l^2)^{1-\nu} \left(\frac{l}{L}\right)^{2\nu} \overline{K}_{1-\mu}^{-1}(L\sqrt{\lambda}) + \\ &+ A_2 b^2 \lambda^{1-\gamma} \overline{K}_{1-\mu}^{-3}(L\sqrt{\lambda}) (pL^\gamma)^{-2} (\overline{K}_\gamma(0) - \bar{u}^2(p) \overline{K}_\gamma(pL)) + \\ &+ \sum_{n \geq 3} N_n b^n \left(\frac{p^2}{\lambda}\right)^{n(2\mu+s-1)-\mu} \times \\ &\times \int \left[\{Z_p(\varkappa^2)\}^{2n-1} - \{Z_p((\varkappa - \epsilon_0)^2)\}^{2n-1} \right] \left\{ \frac{\bar{u}(p\varkappa)}{(2\pi)^d} d\varkappa \right\}^n, \end{aligned} \quad (87)$$

где

$$A_1 = \frac{M \overline{K}_\nu(0)}{(2\pi)^{s+1}}, \quad M = -l^{-2} \frac{d\bar{u}(p)}{dp^2} \Big|_{p=0}, \quad (88)$$

$$A_2 = \frac{\Gamma^3(\nu)}{4(2\pi)^d \Gamma(3\nu)}, \quad \gamma = 3\mu + 2s - 1, \quad |\epsilon_0| = 1. \quad (89)$$

В выражении (87) указаны в явной форме лишь первые два члена ряда, представляющего функцию $D^{-1}p^{-2}\Phi(p^2, 0; u; \tilde{\varphi})$. Согласно (77), (82), (83) и (85) исходное приближение $\tilde{X}$ в рассматриваемом случае теперь имеет вид

$$\tilde{X}\left(\frac{p^2}{\lambda}, 0, b\right) = \left(\frac{p^2}{\lambda}\right)^\mu Z_p(1). \quad (90)$$

Далее, в уравнении (55) величину X мы заменим выражением (90) и примем во внимание тот факт, что функция $\overline{K}_1(z)$ в малой окрестности точки $z = 0$ ведет себя как

$$\overline{K}_1(z) = 1 + \frac{z^2}{2} \ln z + O(z^2). \quad (91)$$

Поэтому в (87) положим $\gamma = 1$ или

$$\mu = \frac{2}{3}(1 - s), \quad (92)$$

что не противоречит условию (76). Тогда второй член в правой части равенства (87) примет вид

$$A_2 b^2 \overline{K}_{1-\mu}^{-3}(L\sqrt{\lambda})(pL)^{-2}(1 - \bar{u}^2(p)\overline{K}_1(pL)),$$

где

$$(pL)^{-2}(1 - \bar{u}^2(p)\overline{K}_1(pL)) \sim -\frac{1}{2} \ln(pL) + O(1), \quad p \rightarrow 0, \quad (93)$$

а степенная функция $(p^2/\lambda)^{n(2\mu+s-1)-\mu}$ под знаком суммы по n , $n \geq 3$, будет равна $(p^2/\lambda)^{\mu(n-2)/2}$. Если еще учесть условие $0 < \bar{u}(p\lambda) \leq 1$, то отсюда можно заключить, что любая частичная сумма ряда по $n \geq 3$ в (87) стремится к нулю при $p \rightarrow 0$. Кроме того, поскольку по условию нормировки в точке $p^2 = \lambda$ должно выполняться равенство $\Phi(\lambda, 0; u; \tilde{\varphi}) = 0$, то отсюда следует, что в рассматриваемом приближении правая часть уравнения (55) ведет себя в окрестности точки $p = 0$ как

$$1 - \frac{1}{4} A_2 b^2 \overline{K}_{1-\mu}^{-3}(L\sqrt{\lambda}) \ln \frac{p^2}{\lambda} + O\left(p^2 l^2 \ln \frac{p^2}{\lambda}\right), \quad p \rightarrow 0. \quad (94)$$

Тогда, следуя изложенной выше схеме РГ-метода, коэффициент при $\ln(p^2/\lambda)$ в выражении (94) необходимо приравнять μ . В результате мы находим связь между точкой нормировки $p^2 = \lambda$ и параметром a ,

$$a = \alpha_s (\lambda l^2)^{1-s}, \quad (95)$$

где

$$\alpha_s = (4\pi)^{s+1} \left(\frac{\mu \Gamma^3(1-\mu) \Gamma(3\nu)}{\Gamma^3(\nu)} \right)^{1/2}, \quad \nu = \frac{s+2}{3}.$$

Отметим при этом, что $\alpha_s \rightarrow 0$, когда $s \rightarrow 1$ ($d \rightarrow 4$).

Для определения асимптотики функции $g(r, t)$, когда $r \gg L$, $t \rightarrow \infty$, обратимся к формуле (46) и запишем ее в виде

$$\tilde{g}(t, r) = e^{E_0 t} \frac{1}{2\pi i} \int_{E_0 - i\infty}^{E_0 + i\infty} e^{(E - E_0)t} \tilde{\psi}(r, \xi) dE, \quad (96)$$

где функция $\tilde{\psi}(r, \xi)$ определена в (80), а связь между переменными E и ξ осуществляется посредством тождества (50), которое в принятом здесь приближении имеет вид

$$\begin{aligned} E - E_0 &= D\xi^2 + [S_1(p_1, \xi) - S_1(0, 0)] + [S_2(p_1, \xi) - S_2(0, 0)] + \\ &+ D\xi^2 \sum_{n \geq 3} N_n b^n \left(\frac{\xi^2}{\lambda} \right)^{\mu(n-2)/2} \times \\ &\times \int \left[\{Z_\xi(\eta_0(\mathcal{K}))\}^{2n-1} - \{Z_\xi(\mathcal{K}^2)\}^{2n-1} \right] \left\{ \frac{\bar{u}(\xi \mathcal{K})}{(2\pi)^d} d\mathcal{K} \right\}^n, \end{aligned} \quad (97)$$

где

$$\begin{aligned} [S_1(p_1, \xi) - S_1(0, 0)] &= -k_s (Dwl^d)^{1/3} \xi^{2\nu} + O(Ml^2 D\xi^2), \\ k_s &= \frac{4^{1-s} \Gamma(1 + \mu/2)}{\Gamma(2 - \mu/2) \Gamma^2(1 - \mu)} \left(\frac{\Gamma(2 + s)}{2\pi^{1+s} \mu^2} \right)^{1/3}, \\ [S_2(p_1, \xi) - S_2(0, 0)] &= O((1 - s) D\xi^2). \end{aligned}$$

В итоге мы приходим к следующей связи между переменными $E - E_0$ и ξ :

$$E_0 - E = k_s (Dwl^d)^{1/3} \xi^{2\nu} + O(D\xi^2 \max(C, Ml^2)), \quad \xi \rightarrow 0. \quad (98)$$

Теперь для асимптотической оценки интеграла в формуле (96), когда значения переменных r и t стремятся к бесконечности, но их отношение r/t фиксировано и $r/t \ll 1$, мы воспользуемся методом перевала. В результате получим для $\tilde{g}(r, t)$ асимптотическое выражение

$$\tilde{g}(r, t) \sim \pm \sum_n \frac{C_d}{wl^d t^2} \Lambda^{\mu/2}(r, t) \exp[E_0 t - \eta_n \Lambda(r, t) + i\delta_n], \quad (99)$$

в котором

$$\Lambda(r, t) = \left[\frac{r^{d+2}}{Dwl^d t^3} \right]^{1/(d-1)}, \quad \eta_n = c_d \exp\left(3\pi i \frac{2n+1}{d-1}\right), \quad \delta_n = \frac{\pi}{2} \frac{d+2+6n}{d-1},$$

C_d и c_d суть положительные постоянные, пропорциональные $(4-d)^{d/(d-1)}$ и $(4-d)^{2/(d-1)}$, соответственно, а знак перед суммой в (99) выбирается так, чтобы правая часть (99) принимала неотрицательные значения. В случаях $d=2$ ($s=0$) и $d=3$ ($s=1/2$) откуда находим

$$\tilde{g}(r, t) \sim \begin{cases} \frac{C_2}{wl^2 t^2} \left(\frac{r^4}{Dwl^2 t^3} \right)^{1/3} \exp\left(E_0 t + \frac{c_2 r^4}{Dwl^2 t^3}\right), & \text{если } d=2, \\ \frac{C_3}{wl^3 t^2} \left(\frac{r^5}{Dwl^3 t^3} \right)^{1/12} \exp(E_0 t) \left| \cos\left[c_3 \left(\frac{r^5}{Dwl^3 t^3} \right)^{1/2} + \frac{\pi}{4} \right] \right|, & \text{если } d=3. \end{cases} \quad (100)$$

Из формул (99) и (100) непосредственно следует, что, несмотря на малость параметра a , характеризующую формально преобладание механизма диффузии в эволюции системы, влияние корреляционного эффекта на асимптотику функции $\tilde{g}(r, t)$ в случае $d < 4$ оказывается очень существенным и, по-видимому, им можно пренебречь лишь при $d > 4$. Уместно отметить, что в противоположном случае $a \gg 1$ искомая асимптотика определяется главным образом корреляционным эффектом, следствием чего в показателе ее экспоненты будет фигурировать величина, пропорциональная t^2 .

В заключение укажем на важное следствие, вытекающее из формулы (99). Согласно определению функции $\Lambda(r, t)$ ее область определения можно разделить линией $r_d(t) = (D\omega l^d t^3)^{1/(d+2)}$ на две части, в одной из которых (где $r < r_d(t)$) реализуется асимптотический режим $\Lambda(r, t) \rightarrow 0$, а в другой (где $r > r_d(t)$) — $\Lambda(r, t) \rightarrow \infty$. Эти два предельных случая приводят соответственно к различным асимптотическим выражениям функции $\tilde{g}(r, t)$. При этом показатель степени $3/(d+2)$ в функциональной зависимости $r_d(t)$ известен в некоторых задачах статистической физики как один из их критических индексов, что, по-видимому, свидетельствует о родстве с ними рассматриваемой здесь задачи.

Благодарности. Автор искренне благодарен Л. В. Богачеву, Р. А. Минлосу, Е. А. Печерскому, С. А. Пирогову, Д. Д. Соколову и Е. Б. Яровой за полезные обсуждения изложенных здесь результатов.

Список литературы

- [1] Ya. B. Zeldovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokoloff. Sov. Sci. Rev. C. 1988. V. 7. P. 1–110.
- [2] S. A. Molchanov. Lectures on the random media. In: Lectures on Probability Theory. Lect. Notes Math. V. 1581. Eds. D. Bakry et al. Berlin: Springer, 1994. P. 242–411.
- [3] Л. В. Богачев, С. А. Молчанов. ТМФ. 1989. Т. 81. С. 281–290; 1990. Т. 82. С. 143–154; 1991. Т. 87. С. 254–273.
- [4] S. Albeverio, L. V. Bogachev, S. A. Molchanov, E. B. Yarovaya. Markov Processes and Related Fields. 2000. V. 6. P. 473–516.
- [5] Р. Фейнман. Статистическая механика. М.: Мир, 1978.
- [6] Я. Б. Зельдович, С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов. УФН. 1987. Т. 152. С. 3–32.
- [7] М. Кац. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
- [8] Дж. Глимм, А. Джаффе. Математические методы квантовой физики. (Подход с использованием функциональных интегралов). М.: Мир, 1984.
- [9] P. Cartier, C. DeWitt-Morette. A Rigorous Mathematical Foundation of Functional Integration. New York: Plenum Press, 1997.
- [10] L. S. Schulman. Techniques and Applications of Path Integration. New York: Wiley, 1981.
- [11] В. И. Алхимов. ТМФ. 1976. Т. 29. С. 424–429.
- [12] В. И. Алхимов. ТМФ. 1979. Т. 39. С. 215–218.
- [13] D. C. Brydges. A short course on cluster expansions. In: Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories. Les Houches Summer School (1984). Eds. K. Osterwalder, R. Stora. Amsterdam: North Holland, 1986. P. 131–183.
- [14] Э. З. Кучинский, М. В. Садовский. ЖЭТФ. 1998. Т. 113. С. 664–678.
- [15] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [16] М. Абрамовиц, И. Стиган. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 23.VII.2002 г.,
после доработки 27.V.2003 г.