Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, Квазиуровни двухчастичного оператора Шредингера с возмущенным периодическим потенциалом, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 1, 115–125

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:08:09

© 2009 г.

Ю. П. Чубурин*

КВАЗИУРОВНИ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ВОЗМУЩЕННЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассматривается двумерный периодический оператор Шредингера, возмущенный потенциалом взаимодействия двух (одномерных) частиц. Доказано существование квазиуровней (т.е. собственных значений или резонансов) данного оператора при фиксированном квазиимпульсе и малом возмущении вблизи граничных точек зон соответствующего периодического оператора. Исследовано асимптотическое поведение квазиуровней при стремлении к нулю константы связи. Получено простое условие того, что квазиуровень является собственным значением.

Ключевые слова: двухчастичный оператор Шредингера, периодический потенциал, собственное значение, резонанс.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается оператор Шредингера вида

$$H_\varepsilon = H_0 + V(x) + \varepsilon W(x_1 - x_2), \quad x = (x_1, x_2), \quad (1)$$

действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$. Здесь $H_0 = -\Delta$, $V(x)$ – вещественная ограниченная периодическая по обоим переменным функция с периодами, равными единице для простоты записи (в общем случае периоды должны быть соизмеримы), $\varepsilon > 0$ – (малый) параметр, $W(x_1)$ – вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$|W(x_1)| \leq e^{-a|x_1|}, \quad a > 0. \quad (2)$$

В случае $V(x) = U(x_1) + U(x_2)$ гамильтониан H_ε моделирует взаимодействие двух квантовых частиц в периодической среде.

Гамильтониан, подобный (1), рассматривался в работе [1], в которой для потенциалов нулевого радиуса действия и в рамках двухзонного приближения показано наличие связанного состояния при фиксированном квазиимпульсе и приведена “двухчастичная” интерпретация этого явления.

*Физико-технический институт УрО РАН, Ижевск, Россия.
E-mail: chuburin@otf.pti.udm.ru

В настоящей статье в рамках строгого подхода доказано существование квазиуровней, т.е. собственных значений (резонансов), оператора H_ε при фиксированном квазиимпульсе и малых ε . Исследовано асимптотическое поведение квазиуровней при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получено простое условие того, что квазиуровень является собственным значением.

Заметим, что исследуемые в статье квазиуровни появляются в результате сдвига полюса функции Грина периодического оператора под действием возмущения (в результате межчастичного взаимодействия). В частности, если полюс лежит на границе зоны спектра периодического оператора (спектр такого оператора, как известно, состоит из зон – замкнутых промежутков), а квазиуровень является собственным значением, то в спектре исходного оператора в $L^2(\mathbb{R}^2)$ появляется соответствующая зона, отличная от зон, порождаемых периодическим потенциалом.

Также отметим, что наличие квазиуровней и характер их зависимости от квазиимпульса могут оказать существенное влияние на картину рассеяния в $\mathbb{R}^2$. Это связано с тем, что решения нестационарного уравнения Шредингера в $L^2(\mathbb{R}^2)$ (волновые пакеты), описывающие рассеивающиеся состояния, строятся как интегралы по квазиимпульсу от функции, имеющей в своем составе решение уравнения Липпмана–Швингера в ячейке, а решения уравнения Липпмана–Швингера имеют полюсы там, где находятся квазиуровни (ср. [2]).

В дальнейшем через $\sigma(A)$ будем обозначать спектр оператора A , через $\sigma_{\text{ess}}(A)$ – его существенный спектр.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

В данном разделе приведены некоторые сведения об операторе $H = H_0 + V(x)$, которые понадобятся в дальнейшем.

Введем обозначения $\Omega_0 = [0, 1]^2$ и $\Omega_0^* = [-\pi, \pi)^2$ для ячеек в прямой и двойственной решетках соответственно. Как известно [3], существуют семейства операторов $H_0(k) = -\Delta$ и $H(k) = H_0(k) + V(x)$, определенных в $L^2(\Omega_0)$ на (достаточно гладких) блоховских функциях и образующих разложения операторов H_0 и H в прямом интеграле пространств

$$\int_{\Omega_0^*}^{\oplus} L^2(\Omega_0) dk \cong L^2(\Omega_0 \times \Omega^*),$$

где $k \in \Omega_0^*$ – квазиимпульс. Под блоховскими функциями понимаются сужения на Ω_0 функций $\psi(x)$, определенных на $\mathbb{R}^2$, таких, что

$$\psi(x + n) = e^{i\langle k, n \rangle} \psi(x), \quad n \in \mathbb{Z}^2$$

(через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}^2$). Оператор $H(k)$ имеет чисто дискретный спектр [3], его собственные значения, занумерованные с учетом кратности в порядке возрастания, будут обозначаться через $\lambda_n(k)$, $n = 1, 2, \dots$.

В дальнейшем нам понадобится следующий явный вид унитарного оператора (преобразования Гельфанда):

$$U: L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\Omega_0 \times \Omega_0^*), \quad \varphi(x) \mapsto \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{i\langle k, n \rangle} \varphi(x - n), \quad (3)$$

переводящего операторы H_0 и H в соответствующие семейства

$$UH_0U^{-1} = \{H_0(k)\}_{k \in \Omega_0^*}, \quad UHU^{-1} = \{H(k)\}_{k \in \Omega_0^*}.$$

Введем следующие обозначения для резольвент:

$$R(\lambda) = (H - \lambda)^{-1}, \quad R_0(k, \lambda) = (H_0(k) - \lambda)^{-1}, \quad R(k, \lambda) = (H(k) - \lambda)^{-1}.$$

Функции Грина (ядра резольвент) операторов $H_0(k)$ и $H(k)$ обозначим соответственно через $G_0(x - y, k, \lambda)$ и $G(x, y, k, \lambda)$. Имеем формулу

$$G_0(x - y, k, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{i\langle k + 2\pi n, x - y \rangle}}{\langle k + 2\pi n, k + 2\pi n \rangle - \lambda}. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. *Предположим, что $\lambda_0 \notin \sigma(H(k_0))$. Тогда функция Грина $G(x, y, k, \lambda)$ является аналитической $L^2(\Omega_0 \times \Omega_0)$ -значной функцией переменных k, λ в некоторой комплексной окрестности точки $(k_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя равенство Парсеваля и (векторнозначную) теорему Вейерштрасса к ряду из аналитических функций (4), получаем, что $G_0(x - y, k, \lambda)$ является аналитической $L^2(\Omega_0 \times \Omega_0)$ -значной функцией при $\lambda \neq \langle k + 2\pi n, k + 2\pi n \rangle$, $n \in \mathbb{Z}^2$. Заменяя при необходимости λ и $V(x)$ на $\lambda + \lambda'$ и $V(x) + \lambda'$ соответственно, можно считать, что $\lambda_0 \neq \langle k + 2\pi n, k + 2\pi n \rangle$ для любого $n \in \mathbb{Z}^2$. В силу аналитической теоремы Фредгольма [4] операторнозначная функция $(1 + R_0(k, \lambda)V)^{-1}$ аналитична всюду, кроме точек $\lambda \in \sigma(H(k))$. Теперь из равенства

$$G(x, y, k, \lambda) = (1 + R_0(k, \lambda)V)^{-1}G_0(x - y, k, \lambda) \quad (5)$$

вытекает утверждение леммы.

Поскольку функция $G_0(x - y, k, \lambda)$ блоховская, из (5) следует, что функция Грина $G(x, y, k, \lambda)$ естественным образом продолжается по переменным x, y на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, причем

$$G(x + n, y, k, \lambda) = G(x, y - n, k, \lambda) = e^{i\langle k, n \rangle} G(x, y, k, \lambda), \quad n \in \mathbb{Z}^2. \quad (6)$$

Далее, из равенств $UR(\lambda) = R(k, \lambda)U$ (см. (3)) и (6) вытекает соотношение

$$G(x, y, k, \lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{i\langle k, n \rangle} G(x - n, y, \lambda), \quad (7)$$

где $\lambda \notin \sigma(H)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Из (7) получаем, что

$$G(x, y, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega_0^*} G(x, y, k, \lambda) dk. \quad (8)$$

3. ДВУХЧАСТИЧНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Перейдем к новой ячейке $\Omega = \mathbb{R} \times [0, 1]$. Введем унитарный оператор

$$\begin{aligned} U' : L^2(\mathbb{R}^2) &\rightarrow L^2(\Omega \times \Omega^*) \cong \int_{\Omega^*}^{\oplus} L^2(\Omega) d\kappa, \\ \varphi(x) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i\kappa\nu} \varphi(x - (\nu, \nu)) = \varphi'(x, \kappa), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Omega^* = [-\pi, \pi)$, $\kappa \in \Omega^*$ – квазимпульс. Очевидно,

$$\varphi'(x + (\mu, \mu), \kappa) = e^{i\mu\kappa} \varphi'(x, \kappa), \quad \mu \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Легко видеть, что оператор H_ε (1) расслаивается в прямом интеграле (9) в семейство операторов

$$H'_\varepsilon(\kappa) = -\Delta + V(x) + \varepsilon W(x_1 - x_2)$$

формально такого же вида (1), но определенных на (достаточно гладких) функциях из $L^2(\Omega)$, являющихся сужениями функций, определенных на $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяющих условию (10). Положим

$$H'(\kappa) = -\Delta + V(x), \quad R'(\kappa, \lambda) = (H'(\kappa) - \lambda)^{-1}.$$

Обозначим через $G'(x, y, \kappa, \lambda)$ функцию Грина оператора $H'(\kappa)$. Предположим, что $\lambda \notin \sigma(H)$. Тогда имеет место равенство (ср. с разделом 2)

$$G'(x, y, \kappa, \lambda) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i\kappa\nu} G(x - (\nu, \nu), y, \lambda). \quad (11)$$

ЛЕММА 2. *Имеет место соотношение*

$$\sigma(H'(\kappa)) = \bigcup_{k_1 + k_2 = \kappa} \sigma(H(k)). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в качестве ячейки в двойственной решетке для оператора $H(k)$ вместо Ω_0^* множество, ограниченное прямыми $k_1 = \pm\pi$, $k_2 = -k_1 \pm \pi$. Запишем действие оператора U (см. (3)) в виде

$$\begin{aligned} (U\varphi)(x, k) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} e^{i(k_1 n_1 + k_2 n_2)} \varphi(x - (n_1, n_2)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{(\nu, \mu) \in \mathbb{Z}^2} e^{i\sigma\mu} e^{i\kappa\nu} \varphi(x - (\nu, \nu) - (\mu, 0)), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\nu = n_2$, $\mu = n_1 - n_2$, $\sigma = k_1$, $\kappa = k_1 + k_2$. Из (13) следует, что оператор U унитарно эквивалентен произведению двух унитарных операторов $U''U'$, где оператор

$$U'' : L^2(\Omega \times \Omega^*) \rightarrow L^2(\Omega_0 \times \Omega_0^*)$$

задается формулой

$$(U''\psi')(x, \kappa, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} e^{i\sigma\mu} \psi'(x - (\mu, 0), \kappa).$$

Следовательно, операторы $H(k_1, \kappa - k_1)$, $k_1 \in [-\pi, \pi)$, образуют разложение оператора $H'(\kappa)$ в прямом интеграле пространств

$$\int_{[-\pi, \pi)}^{\oplus} L^2(\Omega_0) dk_1.$$

Из теории возмущений [3] следует, что собственные значения $\lambda_n(k_1, \kappa - k_1)$, $n = 1, 2, \dots$, оператора $H(k_1, \kappa - k_1)$ непрерывно зависят от k_1 . Отсюда и из теоремы XIII.85 из монографии [3] вытекает (12). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обычным образом доказывается [3], что вдоль прямых $k_1 + k_2 = \kappa$ собственные значения оператора $H(k)$ не имеют участков постоянства и, следовательно, зоны спектра оператора $H'(\kappa)$ невырождены.

ЛЕММА 3. *Предположим, что $\lambda \notin \sigma(H'(\kappa))$. Тогда справедливо равенство*

$$G'(x, y, \kappa, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x, y, (k_1, \kappa - k_1), \lambda) dk_1. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (8), (11) и с учетом свойств блоховской функции $G(x, y, k, \lambda)$ имеем

$$\begin{aligned} G'(x, y, \kappa, \lambda) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i\nu\kappa} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Omega_0^*} G(x - (\nu, \nu), y, k, \lambda) dk = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2\pi \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i\nu(\kappa - k_1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i\nu k_2}}{\sqrt{2\pi}} G(x, y, k, \lambda) dk_2 \right) dk_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x, y, (k_1, \kappa - k_1), \lambda) dk_1. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Оператор умножения на функцию $W(x_1 - x_2)$ представляет собой относительно компактное возмущение оператора $H'(\kappa)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 нормы в пространстве $L^2(\Omega_0 \times \Omega_0)$ коэффициентов Фурье

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\nu k_1} G(x, y, (k_1, \kappa - k_1), i) dk_1$$

экспоненциально убывают при $|\nu| \rightarrow \infty$. Учитывая (2), (14), запишем оценку

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} |G'(x, y, \kappa, i) W(x_1 - x_2)|^2 dx dy \leq \\ & \leq C \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega_0} \int_{\Omega_0} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_1(\mu-\nu)} G(x, y, (k_1, \kappa - k_1), i) dk_1 \right|^2 \times \\ & \times e^{-a_1|x_1+\mu|} dx dy \leq C' \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{-a'|\mu-\nu|} \right) e^{-a''|\mu|} < \infty, \end{aligned}$$

где $a', a'' > 0$. Полученная оценка доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\sigma_{\text{ess}}(H'_{\varepsilon}(\kappa)) = \sigma(H'(\kappa)) = \bigcup_{k_1+k_2=\kappa} \sigma(H(k)).$$

Доказательство вытекает из лемм 2, 4 и из книги [3] (см. раздел XIII.4).

4. КВАЗИУРОВНИ

Предположим, что $\lambda_0 = \lambda_{n_0}(k_{10}, \kappa - k_{10})$ является невырожденным собственным значением оператора $H(k_{10}, \kappa - k_{10})$, отвечающим нормированной собственной функции $\psi_{n_0}(x, (k_{10}, \kappa - k_{10}))$. Можно считать, что λ_{n_0} и ψ_{n_0} аналитически зависят от параметра k_1 в комплексной окрестности k_{10} (см., например, [3]), причем ψ_{n_0} – как $L^2(\Omega_0)$ -значная функция. В дальнейшем для простоты записи будут использоваться следующие обозначения:

$$\tilde{\psi}_{n_0}(x, k_1) = \psi_{n_0}(x, (k_1, \kappa - k_1)), \quad \tilde{\lambda}_{n_0}(k_1) = \lambda_{n_0}(k_1, \kappa - k_1),$$

где κ фиксировано.

Предположим далее, что

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})}{\partial k_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})}{\partial k_1^2} \neq 0,$$

а также, что конечно число точек $k_1 \neq k_{10}$ таких, что $\tilde{\lambda}_n(k_1) = \lambda_0$ для некоторого n , и в них $\partial \tilde{\lambda}_n(k_1)/\partial k_1 \neq 0$. В частности, λ_0 может быть граничной точкой некоторой зоны спектра оператора $H'(\kappa)$.

Положим $\xi = k_1 - k_{10}$. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5 [5]. *Для λ из некоторой комплексной окрестности точки λ_0 существуют ровно два корня $\xi_j = \xi_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, уравнения*

$$\tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10} + \xi) = \lambda,$$

совпадающие при $\lambda = \lambda_0$. Кроме того, существует аналитическая в окрестности нуля функция $\xi_2 = \mu(\xi_1)$, причем $\mu'(0) = -1$.

В дальнейшем вместо спектрального параметра λ будет часто использоваться параметр $\xi_1 = \xi_1(\lambda)$ такой, что если $(\lambda - \lambda_0)\partial^2\tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})/\partial k_1^2 > 0$, то $\xi_1 > 0$. Соответственно будем пользоваться обозначениями вида $G'(x, y, \kappa, \xi_1)$ вместо $G'(x, y, \kappa, \lambda)$ и т.п.

Функции $\xi_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, порождают двулистное аналитическое накрытие окрестности точки λ_0 [6]. При этом переходе параметра λ на второй лист с верхней полуплоскости через вещественную ось отвечает переход одного корня в другой. Другими словами, после аналитического продолжения одного из корней, например ξ_1 , в окрестность нуля происходит изменение знака $\text{Im } \xi_1$ с плюса на минус. Это дает возможность рассматривать резонансы (см. ниже).

Пусть для определенности $\partial^2\tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})/\partial k_1^2 > 0$. В следующей лемме функция Грина $G'(x, y, \kappa, \lambda)$ аналитически продолжена по параметру λ в окрестности λ_0 с верхней полуплоскости через полюс (λ_0, ∞) на второй лист (возможность такого продолжения видна из доказательства леммы). Соответственно предполагаем, что ξ_1 изменяется в окрестности нуля. Аналог следующей леммы для одночастичного “плечного” оператора Шредингера см. в [5]. В дальнейшем предполагается, что $\sqrt{W} = \sqrt{|W|} \text{sign } W$.

ЛЕММА 6. *Для ξ_1 из достаточно малой комплексной окрестности нуля справедливо равенство*

$$G'(x, y, \kappa, \xi_1) = \frac{i\tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{10})\overline{\tilde{\psi}_{n_0}(y, k_{10})}}{\xi_1\partial^2\tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})/\partial k_1^2} + g(x, y, \kappa, \xi_1).$$

При этом функция

$$\sqrt{|W(x_1 - x_2)|} g(x, y, \kappa, \xi_1) \sqrt{W(y_1 - y_2)}$$

является $L^2(\Omega \times \Omega)$ -значной аналитической функцией параметра ξ_1 .

Доказательство аналогично доказательству леммы 2 в [5].

СЛЕДСТВИЕ. *Операторнозначная функция $\sqrt{|W|} R'(\kappa, \xi_1) \sqrt{W}$ продолжается по параметру ξ_1 до мероморфной функции аргумента ξ_1 в (комплексной) окрестности нуля. При этом (см. лемму 4) эта функция принимает значения в множестве компактных операторов.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу мероморфной теоремы Фредгольма [3] и резольвентного тождества

$$(1 + \varepsilon \sqrt{|W|} R'(\kappa, \xi_1) \sqrt{W})^{-1} = 1 - \varepsilon \sqrt{|W|} R'_\varepsilon(\kappa, \xi_1) \sqrt{W} \quad (15)$$

операторнозначная функция $\sqrt{|W|} R'_\varepsilon(\kappa, \xi_1) \sqrt{W}$ мероморфна по ξ_1 в окрестности нуля и принимает значения в множестве компактных операторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае $V(x) = U(x_1) + U(x_2)$ имеем $\lambda_{n_0}(k_1, \kappa - k_1) = \lambda_{n_1}(k_1) + \lambda_{n_2}(\kappa - k_1)$, где $\lambda_n(k_j)$ – собственные значения оператора $-d^2/dx_1^2 + U(x_1)$ в ячейке $[0, 1]$ для квазиимпульсов k_1 и $k_2 = \kappa - k_1$.

Положим $k_{1j} = k_{10} + \xi_j$, $j = 1, 2$. Через $[x]$ обозначим целую часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Аналог следующей леммы для одночастичного “плёночного” оператора Шредингера имеется в [7].

ЛЕММА 7. *Для всех достаточно малых (комплексных) $\xi_1 \neq 0$ справедливо равенство*

$$G'(x, y, \kappa, \xi_1) = \frac{i\tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{11})\overline{\tilde{\psi}_{n_0}(y, k_{11})}\vartheta([x_1] - [y_1])}{\partial\tilde{\lambda}_{n_0}(k_{11})/\partial k_1} - \\ - \frac{i\tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{12})\overline{\tilde{\psi}_{n_0}(y, k_{12})}\vartheta([y_1] - [x_1])}{\partial\tilde{\lambda}_{n_0}(k_{12})/\partial k_1} + \gamma(x, y, \xi_1),$$

где $\vartheta(t)$ – функция Хевисайда, а γ удовлетворяет оценке

$$\|\gamma(x, y, \xi_1)\|_{L^2(\Omega_0 \times \Omega_0 + ([x_1], [y_1]))} \leq C e^{-\sigma|[x_1] - [y_1]|}, \quad \sigma > 0. \quad (16)$$

Назовем *квазиуровнем* оператора $H'_\varepsilon(\kappa)$ полюс по переменной ξ_1 операторнозначной функции $\sqrt{|W|} R'_\varepsilon(\kappa, \xi_1) \sqrt{W}$ в окрестности нуля (а также соответствующее значение спектрального параметра $\lambda = \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10} + \xi_1)$). Назовем *кратностью* квазиуровня $\xi_1 \neq 0$ число $\dim \ker(1 + \varepsilon \sqrt{|W|} R'_\varepsilon(\kappa, \xi_1) \sqrt{W})$.

В силу (15) и аналитической теоремы Фредгольма [5] достаточно близкое к нулю число $\xi_1 \neq 0$ является квазиуровнем тогда и только тогда, когда в классе $L^2(\Omega)$ существует ненулевое решение уравнения

$$\varphi = -\varepsilon \sqrt{|W|} R'(\kappa, \xi_1) \sqrt{W} \varphi. \quad (17)$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что*

$$\int_{\Omega} W(x_1 - x_2) |\tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{10})|^2 dx \neq 0.$$

Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует ровно один квазиуровень $\lambda = \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{11})$ кратности единица, при этом

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\varepsilon^2 \left(\int_{\Omega} W(x_1 - x_2) |\tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{10})|^2 dx \right)^2}{2\partial^2 \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})/\partial k_1^2} + O(\varepsilon^3). \quad (18)$$

Если, кроме того,

$$\frac{\partial^2 \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})}{\partial k_1^2} \int_{\Omega} W(x_1 - x_2) |\tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{10})|^2 dx < 0,$$

то квазиуровень является собственным значением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение теоремы. Пользуясь леммой 6, перепишем уравнение (17) в виде

$$\varphi(x) = -\frac{\varepsilon i \tilde{\varphi}_{n_0}(x, k_{10})}{\xi_1 \partial^2 \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})/\partial k_1^2} \int_{\Omega} \overline{\tilde{\varphi}'_{n_0}(y, k_{10})} \varphi(y) dy + \varepsilon A(\xi_1) \varphi(x), \quad (19)$$

где $\tilde{\varphi}_{n_0} = \sqrt{|W|} \tilde{\psi}_{n_0}$, $\tilde{\varphi}'_{n_0} = \sqrt{W} \tilde{\psi}_{n_0}$, $A(\xi_1)$ – это оператор с ядром $-\sqrt{|W|} g \sqrt{W}$. Положим для достаточно малых ε

$$f = (1 - \varepsilon A(\xi_1))\varphi,$$

тогда в силу (19) $f = C\tilde{\varphi}_{n_0}$, где $C = \text{const}$. Отсюда вытекает, что в случае $\xi_1 \neq 0$ существование ненулевого решения уравнения (17) эквивалентно существованию решения алгебраического уравнения

$$\xi_1 = -\frac{i\varepsilon((1 - \varepsilon A(\xi_1))^{-1}\varphi_{n_0}, \tilde{\varphi}'_{n_0})}{\partial^2 \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})/\partial k_1^2}, \quad (20)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. В силу леммы 6 оператор $A(\xi_1)$ аналитически зависит от ξ_1 в окрестности нуля. Согласно теореме Руше уравнение (20) для всех достаточно малых ε имеет единственное решение (квазиуровень) ξ_1 . Разлагая $(1 - \varepsilon A(\xi_1))^{-1}$ в ряд по степеням ε и пользуясь (20), получаем формулу

$$\xi_1 = \frac{\varepsilon}{i\partial^2 \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})/\partial k_1^2} \int_{\Omega} W(x_1 - x_2) |\tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{10})|^2 dx + O(\varepsilon^2), \quad (21)$$

при этом по условию теоремы $\xi_1 \neq 0$. Из (21) вытекает (18). Утверждение о кратности следует из равенства $\varphi = C(1 - \varepsilon A(\xi_1))^{-1}\tilde{\varphi}_{n_0}$.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $\varphi \neq 0$ удовлетворяет уравнению (17), тогда функция

$$\psi = -\varepsilon R'(\kappa, \xi_1) \sqrt{W} \varphi = -\varepsilon R'(\kappa, \xi_1) W \psi$$

удовлетворяет уравнению Шредингера $H'_\varepsilon(\kappa)\psi = \lambda\psi$, где $\lambda = \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10} + \xi_1)$. Поэтому достаточно показать, что $\psi \in L^2(\Omega)$. В силу леммы 7

$$\begin{aligned} \psi(x) = & -\frac{i\varepsilon \tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{11})}{\partial \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{11})/\partial k_1} \int_{\Omega \cap \{[y_1] \leq [x_1]\}} \overline{\tilde{\psi}_{n_0}(y, k_{11})} \sqrt{W(y_1 - y_2)} \varphi(y) dy + \\ & + \frac{i\varepsilon \tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{12})}{\partial \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{12})/\partial k_1} \int_{\Omega \cap \{[y_1] \geq [x_1]\}} \overline{\tilde{\psi}_{n_0}(y, k_{12})} \sqrt{W(y_1 - y_2)} \varphi(y) dy - \\ & - \varepsilon \int_{\Omega} \gamma(x, y, \xi_1) \sqrt{W(y_1 - y_2)} \varphi(y) dy. \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть для определенности $x_1 \geq 0$. Пользуясь (16), неравенством Коши–Буняковского и неравенством (2), оценим для $x \in \Omega_0$ и целого $n \geq 0$ интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left| \int_{\Omega} \gamma(x + (n, 0), y, \xi_1) \sqrt{W(y_1 - y_2)} \varphi(y) dy \right|^2 dx \leq \\ & \leq C \int_{\Omega_0} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega_0} |\gamma(x + (n, 0), y + (m, 0), \xi_1)|^2 |W(y_1 - y_2 + m)| dy \right) dx \leq \\ & \leq C_1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-2\sigma|n-m|} e^{-a|m|} = C_1 \left(e^{-2\sigma n} \frac{1 - e^{(2\sigma-a)(n+1)}}{1 - e^{2\sigma-a}} + \right. \\ & \left. + e^{2\sigma n} \frac{e^{-(2\sigma+a)(n+1)}}{1 - e^{-(2\sigma+a)}} + e^{-2\sigma n} \frac{e^{-(2\sigma+a)}}{1 - e^{-(2\sigma+a)}} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Данное выражение экспоненциально убывает при $n \rightarrow \infty$. Это же, очевидно, верно и при $n \rightarrow -\infty$.

Заметим, что в силу равенства

$$\psi_{n_0}(x, k) = - \int_{\Omega_0} G_0(x - y, k, \lambda_{n_0}(k)) V(y) \psi_{n_0}(y, k) dy, \quad (24)$$

а также формулы (4) и неравенства Коши–Буняковского для комплексных k из окрестности точки $k_0 \in \Omega_0^*$ справедлива оценка

$$|\psi_{n_0}(x, k)| \leq e^{|\operatorname{Im} k_1| \cdot |x_1| + |\operatorname{Im} k_2| \cdot |x_2|}. \quad (25)$$

(Если $\lambda_{n_0}(k_0) = \langle k_0 + 2\pi m, k_0 + 2\pi m \rangle$ для некоторого m , то, как и выше, заменяем λ и $V(x)$ на $\lambda + \lambda'$ и $V(x) + \lambda'$ для подходящего λ' .)

Пусть $x_1 \geq 0$ и $|\xi_1| \leq \delta < a/2$. Запишем, пользуясь (25), оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega \cap \{[y_1] \geq [x_1]\}} \overline{\tilde{\psi}_{n_0}(y, k_{1j})} \sqrt{W(y_1 - y_2)} \varphi(y) dy \right| &\leq \\ &\leq C \left(\int_{[x_1]}^{\infty} e^{2\delta y_1} e^{-a y_1} dy \right)^{1/2} = C \frac{e^{-(a-2\delta)[x_1]}}{a - 2\delta}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (26)$$

Из формулы (22), равенства $\vartheta(x_1 - y_1) = 1 - \vartheta(y_1 - x_1)$, $x_1 \neq y_1$, и оценок (23), (26) вытекает, что для $x_1 \geq 0$

$$\psi(x) = - \frac{i\varepsilon \tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{11})}{\partial \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{11}) / \partial k_1} \int_{\Omega} \overline{\tilde{\psi}_{n_0}(y, k_{11})} \sqrt{W(y_1 - y_2)} \varphi(y) dy + \eta_+(x), \quad (27)$$

где $\eta_+ \in L^2(\Omega \cap \{x_1 \geq 0\})$. Аналогично для $x_1 \leq 0$

$$\psi(x) = \frac{i\varepsilon \tilde{\psi}_{n_0}(x, k_{12})}{\partial \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{12}) / \partial k_1} \int_{\Omega} \overline{\tilde{\psi}_{n_0}(y, k_{12})} \sqrt{W(y_1 - y_2)} \varphi(y) dy + \eta_-(x), \quad (28)$$

где $\eta_- \in L^2(\Omega \cap \{x_1 \leq 0\})$.

Используя (4), перепишем (24) для $k = (k_1, \kappa - k_1)$ в виде

$$\begin{aligned} \psi_{n_0}(x, (k_1, \kappa - k_1)) &= - \frac{1}{2\pi} e^{i\langle (k_1, \kappa - k_1), x \rangle} \times \\ &\times \int_{\Omega_0} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{i\langle 2\pi n, x - y \rangle} e^{-i\langle (k_1, \kappa - k_1), y \rangle}}{\langle (k_1, \kappa - k_1) + 2\pi n, (k_1, \kappa - k_1) + 2\pi n \rangle - \lambda_{n_0}(k_1, \kappa - k_1)} \right) \times \\ &\times V(y) \psi_{n_0}(y, (k_1, \kappa - k_1)) dy. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда следует, что $|\psi_{n_0}|$ экспоненциально убывает при $x_1 \rightarrow \infty$ или $x_1 \rightarrow -\infty$ в случае $\operatorname{Im} k_1 x_1 > 0$ и экспоненциально возрастает в случае $\operatorname{Im} k_1 x_1 < 0$. Второе утверждение теоремы следует теперь из соотношений (21), (27), (28), а также леммы 5 и равенств $\operatorname{Im} k_{1j} = \operatorname{Im} \xi_j$, $j = 1, 2$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В условиях теоремы 2 собственная функция $\psi(x)$ убывает в соответствии с неравенством

$$\int_{\Omega_0} |\psi(x + (n, 0))|^2 dx \leq C e^{-\gamma|n|}, \quad \gamma > 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если

$$\frac{\partial^2 \tilde{\lambda}_{n_0}(k_{10})}{\partial k_1^2} \int_{\Omega} W(y_1 - y_2) |\tilde{\psi}_{n_0}(y, k_{10})|^2 dx > 0$$

и

$$\int_{\Omega} \overline{\tilde{\psi}_{n_0}(y, k_{1j})} \sqrt{W(y_1 - y_2)} \varphi(y) dy \neq 0, \quad j = 1, 2,$$

то, как и в доказательстве теоремы 2, получаем, что функция $\psi(x)$ экспоненциально возрастает, если $|x_1| \rightarrow \infty$. Поскольку при этом $\text{Im } \xi_1 < 0$, то ξ_1 является резонансом.

Список литературы

- [1] S. M. Mahajan, A. Thyagaraja, *J. Phys. A*, **39**:47 (2006), 667–671.
- [2] Г. В. Вольф, Ю. П. Чубурин, *ФТТ*, **47**:6 (2005), 1015–1018.
- [3] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. Т. 4. *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [4] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. Т. 1. *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [5] Ю. П. Чубурин, *ТМФ*, **110**:3 (1997), 443–453.
- [6] Р. Ганнинг, Х. Росси, *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.
- [7] Ю. П. Чубурин, *ТМФ*, **98**:1 (1994), 38–47.

Поступила в редакцию 31.10.2007,
после доработки 14.05.2008