Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Р. Садыков, Влияние поляризации на траекторию
диссипативных солитонов, *ТМФ*, 2009, том 158, но-
мер 1, 126–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:28:35

© 2009 г.

Н. Р. Садыков*

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ НА ТРАЕКТОРИЮ ДИССИПАТИВНЫХ СОЛИТОНОВ

Показано, что для диссипативных солитонов оптический эффект Магнуса определяется не только спиральностью, но и топологическим индексом: магнитным квантовым числом или проекцией орбитального момента солитона на его траекторию. Для неоднородной среды установлена связь между оптическим эффектом Магнуса и неголономностью поля касательных к траектории единичных векторов.

Ключевые слова: диссипативные солитоны, оптический эффект Магнуса, влияние поляризации на траекторию.

1. ВВЕДЕНИЕ

При анализе волновых полей и поляризационных эффектов важную роль играет как метод геометрической оптики, так и волновые методы прикладной электродинамики, которые основаны на методах функций Грина, волноводных мод и др. Геометрическая оптика является простым и наглядным инструментом, обеспечивающим хорошее количественное описание широкого круга волновых явлений различной физической природы в случае, когда длина волны мала по сравнению с характерными масштабами задачи. Геометрическая оптика в узком (лучевом) смысле изучает только способы построения изображений при помощи лучей. В таком понимании построение геометрической оптики было завершено в фундаментальных трудах Гамильтона. В более широком (волновом) понимании геометрическая оптика выступает как метод приближенного описания волновых полей. В этом случае лучи образуют только геометрическую основу, на которую затем “нашивается” волновое поле. Современный волновой период геометрической оптики ведет свое начало с работ Дебая. В рамках такой интерпретации геометрической оптики в последнее время в научных публикациях используют понятие “взаимного влияния” поляризации и траектории [1]. Типичным примером влияния траектории на поляризацию является геометрическая фаза Рытова–Владимирского [2] (прототип фазы

*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. академика Е.И. Забабахина, Снежинск, Челябинская обл., Россия. E-mail: n.r.sadykov@rambler.ru

Берри). Обратными по отношению к указанному эффекту являются эффекты влияния поляризации на траекторию пучка лучей: оптический эффект Магнуса [3], [4], обратный оптический эффект Магнуса [5] (в приближении геометрической оптики) и др. (см. [1]).

В приближении геометрической оптики оптический эффект Магнуса приводит к дополнительному кручению траектории пучка лучей и определяется кривизной траектории и знаком циркулярной поляризации σ . Обратный оптический эффект Магнуса приводит к дополнительному изгибу траектории пучка лучей, который пропорционален кручению траектории пучка лучей и также определяется знаком циркулярной поляризации. При выводе уравнения траектории в [1], [4], [5] считалось, что в случае отсутствия нелинейных эффектов (излучение слабой интенсивности) для волны всегда имеет место условие равенства нулю топологического индекса m (в квантовой механике m – магнитное квантовое число). Но современные возможности экспериментальной техники настолько возросли, что сейчас в нелинейных средах в случае мощного лазерного излучения существуют физические объекты, для которых $m \neq 0$ (например, диссипативные солитоны [6]–[11]). Поэтому в общем случае мы можем считать, что в рамках геометрической оптики выполняется условие $m \neq 0$. В случае обратного оптического эффекта Магнуса зависимость от m была получена в работе [5]. Поэтому естественно предположить, что оптический эффект Магнуса также зависит от топологического индекса m (проекции орбитального момента солитона на его траекторию).

В настоящей работе показано, что для диссипативных солитонов оптический эффект Магнуса определяется не только спиральностью σ , но и топологическим индексом m . Для неоднородной среды установлена связь между оптическим эффектом Магнуса и неголономностью поля касательных к траектории единичных векторов.

2. ЗАВИСИМОСТЬ ВЕЛИЧИНЫ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО КРУЧЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ПУЧКА ЛУЧЕЙ ОТ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИНДЕКСА

В работе [5] в результате анализа векторного волнового уравнения в геликоидальной системе координат (неподвижной относительно трехгранника Френе) было показано, что в случае скрученного многомодового световода с величиной кручения $K = \text{const}$ постоянные распространения направляемых мод равны $\beta_{N,m} = \beta_{N,m}^{(0)} - K(\sigma + m)$. После обобщения этих результатов на локально изотропную неоднородную среду из укороченного действия было получено уравнение траектории пучка лучей, описывающее обратный оптический эффект Магнуса, причем величина эффекта определяется полным топологическим зарядом $\sigma + m$ [5]. В то же время оптический эффект Магнуса (учет кривизны траектории пучка лучей) определяется только σ . Покажем, что оптический эффект Магнуса также определяется полным топологическим зарядом $\alpha\sigma + m$, где α – постоянная величина, $\alpha \sim 1$, т.е. поправка к фазе будет зависеть не только от σ , но и от топологического индекса m . При этом следует отметить, что условие $m \neq 0$ означает значительное увеличение оптического объема волноводного канала (см. книгу [12], с. 274). В случае нелинейной среды

волноводный канал формируется за счет самофокусировки, поэтому требуется мощное лазерное излучение. Только в последние десятилетия появилась возможность наблюдать эффекты, которые определяются топологическим индексом m . В случае оптического эффекта Магнуса одним из интересных в этом смысле физических объектов являются диссипативные солитоны [6]–[11].

В оптическом эффекте Магнуса поперечная компонента волнового вектора, обуславливающая этот эффект, определяется параметром траектории – кривизной. Это означает, что волновая функция в каждой точке волнового пакета содержит “добавку”, небольшую в масштабе процессов, происходящих в самом пакете, в результате чего траектория центра волнового пакета начинает скручиваться как единое целое. Применительно к диссипативным солитонам это означает, что можно не рассматривать “внутреннюю структуру” солитона. Понятно, что такой малый эффект, как дополнительное кручение траектории пучком лучей, практически не влияет на происходящие внутри солитона процессы, в частности, не влияет на структуру энергетических потоков [11].

Оптические солитоны, представляющие собой сгустки света, линейное (дифракционное и дисперсионное) расплывание которых уравновешено нелинейным сжатием, делятся на два типа. Первый из них соответствует консервативным солитонам, которые формируются и распространяются в прозрачной среде с малыми потерями [6]. Спектр основных характеристик консервативных солитонов сплошной. Вторым типом соответствуют диссипативным солитонам, или автосолитонам. Диссипативные оптические солитоны были предсказаны и теоретически изучены первоначально в широкоапертурных нелинейных интерферометрах [7] и лазерах с насыщающимся поглощением [8]. По сравнению со случаем консервативных солитонов дополнительное требование энергетического баланса приводит к дискретности спектра основных характеристик диссипативных солитонов. С современным обзором теории и экспериментальных данных для диссипативных солитонов можно ознакомиться в [9]–[11].

В случае двухуровневой модели сред с усилением и поглощением имеет место насыщение поглощения

$$f(|E|^2) = -1 + \frac{g_0}{1 + |E|^2} - \frac{a_0}{1 + b|E|^2}, \quad (1)$$

где функция f определяет нелинейную часть в обобщенном комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау [11].

Поскольку имеются нерезонансные слагаемые, можно предположить наличие слабого насыщения дисперсии, т.е. в этом случае диэлектрическую проницаемость мы можем представить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad \varepsilon'' \ll \varepsilon'. \quad (2)$$

Условие равенства нулю потерь энергии в уравнении баланса означает, что “волновое число” диссипативного солитона является вещественной величиной, именно этим вызвано применение уравнения для комплексной радиальной функции в работе [11] при анализе внутренней структуры такого солитона (см. далее формулу (8)). Воспользуемся аналогичным приближением, но в отличие от [11] анализ, во-первых,

проведем по аналогии с [4] (см. также [1]) в ортогональной тороидальной (изогнутой) системе координат:

$$\begin{aligned} x^1 &= (R + r \cos \varphi) \cos \frac{z}{R}, & x^2 &= (R + r \cos \varphi) \sin \frac{z}{R}, & x^3 &= -r \sin \varphi, \\ h_1 &= 1, & h_2 &= r, & h_3 &= \frac{R + r \cos \varphi}{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

где z – натуральный параметр (отсчитываемый вдоль оси симметрии диссипативного солитона), φ – угол между кривизной и радиусом $\mathbf{r}$ в локально цилиндрической системе координат, центр которой лежит на оси симметрии солитона. Формулы (3) устанавливают связь между переменными x^1, x^2, x^3 декартовой системы координат и переменными r, φ, z криволинейной системы координат.

Во-вторых, для рассмотрения кручения траектории солитонов воспользуемся не скалярным, а векторным волновым уравнением

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon' + i\varepsilon'') \mathbf{E}. \quad (4)$$

Если же пользоваться скалярным волновым уравнением, то мы получим только деформацию волновой функции вдоль радиуса кривизны траектории уединенного солитона (см. [12], с. 606), которая при большой кривизне изгиба траектории солитона может привести к эффекту “туннелирования”.

В работе [4] было показано, что в случае изогнутого волокна постоянная распространения пробной функции направляемой моды содержит бинормальную компоненту, которая определяется знаком циркулярной поляризации σ . Для этого использовалась система координат (3). По аналогии с работой [4] покажем, что при распространении излучения по изогнутой траектории волновое число (в неоднородной среде оно выполняет роль постоянной распространения) содержит бинормальную компоненту, которая определяется не только σ , но и топологическим индексом m . В нашем случае в отличие от [4] волноводный канал будет формироваться за счет нелинейных эффектов.

Для решения векторного волнового уравнения (4) подберем пробную функцию, воспользовавшись результатами работы [11]. Пробная векторная волновая функция должна быть пропорциональна функции $(\mathbf{e}_x + i\sigma\mathbf{e}_y)e^{i(\beta z - \omega t)}$ и содержать для описания диссипативного солитона радиальную функцию, определяемую “радиальным” числом N и “магнитным” числом m (топологическим индексом); здесь $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ – единичные векторы локально декартовой системы координат. При изгибе, кроме параметра, характеризующего деформацию волновой функции вдоль радиуса кривизны траектории, волновая функция должна содержать параметр, характеризующий наличие поперечной составляющей у волнового числа [4], [13]. С учетом всего вышесказанного зададим пробную функцию как

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \varphi, z) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\beta z - \omega t)} = \frac{\mathbf{e}_x + i\sigma\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \Psi_{mN}(r, \varphi) e^{i(\beta z - \omega t)}, \\ \Psi_{mN}(r, \varphi) &= F_{mN}(r) e^{im\varphi + r(\kappa \cos \varphi + i\eta \sin \varphi)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где параметры κ и η характеризуют соответственно деформацию волновой функции вдоль радиуса кривизны траектории и наличие поперечной составляющей волнового числа. Выразим векторы $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ через единичные векторы локально цилиндрической системы координат $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_r \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi, & \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_r \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi, \\ r^2 &= x^2 + y^2, & x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi.\end{aligned}\quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{e}_x + i\sigma\mathbf{e}_y = (\mathbf{e}_r + i\sigma\mathbf{e}_\varphi)e^{i\sigma\varphi}. \quad (7)$$

В представлении (5) скалярная волновая функция $F_{mN}(r)$ удовлетворяет нелинейному уравнению [11]:

$$\frac{\partial^2 F_{mN}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F_{mN} - \frac{m^2}{r^2} F_{mN} + [i\nu + f(|F_{mN}|^2)] \frac{F_{mN}}{i+d} = 0, \quad (8)$$

где $F_{mN}(r)|_{r=0} = 0$, $F_{mN}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$, d – эффективный коэффициент диффузии, описывающий слабую дисперсию среды, $0 < d \ll 1$, ν – частотный сдвиг для стационарного солитона, являющийся собственным значением задачи (масштаб ν равен обратному значению времени затухания в пустом резонаторе), функция f определена в (1).

По аналогии с работой [4] с учетом (3), (5) и (7) получаем

$$\text{rot } \mathbf{E} = \left[\frac{\sigma\beta}{1+r\cos\varphi/R} \mathbf{E}_0 + \frac{i\sigma\mathbf{e}_z}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + i\sigma \frac{\partial}{r\partial\varphi} \right) \Psi_{mN} \right] e^{i(\beta z - \omega t)}. \quad (9)$$

При $x/r \ll 1$, $y/r \ll 1$ с учетом (3) из формулы (9) получаем

$$\begin{aligned}\text{rot rot } \mathbf{E} &= \left[\frac{\beta^2}{(1+r\cos\varphi/R)^2} \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{e}_x + i\sigma\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \Delta'_\perp \Psi_{mN} + \vec{\nabla}'_\perp (\vec{\nabla}'_\perp \mathbf{E}_0) - \right. \\ &\quad \left. - i \frac{\sigma}{R} \frac{\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \Psi_{mN}}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial \Psi_{mN}}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\beta\mathbf{e}_z/\sqrt{2}}{1+r\cos\varphi/R} \left(\frac{\partial \Psi_{mN}}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial \Psi_{mN}}{\partial y} \right) \right] e^{i(\beta z - \omega t)},\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$\Delta'_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \vec{\nabla}'_\perp = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (11)$$

и учтено, что

$$\begin{aligned}&\frac{i\sigma}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{r\partial\varphi} - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\frac{\partial \Psi_{mN}}{\partial r} + \frac{\Psi_{mN}}{r} + i\sigma \frac{\partial \Psi_{mN}}{r\partial\varphi} \right] = \\ &= -\frac{\mathbf{e}_x + i\sigma\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \Delta'_\perp \Psi_{mN} + \vec{\nabla}'_\perp (\vec{\nabla}'_\perp \mathbf{E}_0);\end{aligned}\quad (12)$$

при выводе равенства (10) учтены также соотношения (6).

С учетом (10) векторное волновое уравнение (4) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{e}_x + i\sigma\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \Delta'_\perp \Psi_{mN} - \frac{\beta^2}{(1+x/R)^2} \mathbf{E}_0 - \vec{\nabla}'_\perp (\vec{\nabla}'_\perp \mathbf{E}_0) + \\ + i \frac{\sigma}{R} \frac{\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \Psi_{mN}}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial \Psi_{mN}}{\partial y} \right) - \\ - \frac{i\beta\mathbf{e}_z/\sqrt{2}}{1+x/R} \left(\frac{\partial \Psi_{mN}}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial \Psi_{mN}}{\partial y} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon' + i\varepsilon'') \mathbf{E}_0 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Умножим это уравнение на $(\mathbf{e}_x - i\sigma\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$. При $r \ll R$ получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 F_{mN}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F_{mN} - \frac{m^2}{r^2} F_{mN} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon' + i\varepsilon'') F_{mN} - \beta^2 F_{mN} + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{e}_x - i\sigma\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \vec{\nabla}'_\perp (\vec{\nabla}'_\perp \mathbf{E}_0) \right] + i \left\{ \frac{\sigma}{2R} \frac{\partial F_{mN}}{\partial y} + 2\eta \frac{\partial F_{mN}}{\partial y} - \frac{m}{2R} \frac{y}{r^2} F_{mN} \right\} + \\ + \left\{ 2\kappa \frac{\partial F_{mN}}{\partial x} + \frac{1}{2R} \frac{\partial F_{mN}}{\partial x} + 2 \frac{\beta^2 x}{R} F_{mN} - \frac{\sigma m}{2R} \frac{x}{r^2} F_{mN} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где учтено, что (см. также (6))

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial}{\partial y} = e^{i\sigma\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r} + i\sigma \frac{\partial}{r \partial \varphi} \right]. \quad (15)$$

Выражение в квадратных скобках в (14) эквивалентно левой части (8), т.е. равно нулю. При этом в данном выражении в отличие от (8) имеется поляризационное слагаемое (последнее слагаемое), учет которого в соответствии с хорошо разработанной теорией волноводных мод приведет к незначительной корректировке величины β^2 в (14) (см. [12], с. 260). Кроме того, при выводе (14) мы пренебрегли слабой пространственной дисперсией (в (8) положили $d = 0$). Выражение во вторых фигурных скобках в (14) приводит к деформации волновой функции вдоль радиуса кривизны траектории [1], [4], а выражение в первых фигурных скобках в (14) – к наличию поперечной составляющей волнового числа диссипативного солитона. Для оценки величины поперечной составляющей поступим следующим образом. Пусть выражение в первых фигурных скобках после умножения на $F_{mN}^* \sin \varphi$ (F_{mN}^* – комплексно-сопряженная величина к F_{mN}) и интегрирования по поперечному сечению равняется нулю. Тогда получаем

$$i \int r \sin^2 \varphi \left[\left(\frac{\sigma}{2R} + 2\eta \right) F_{mN}^* \frac{\partial F_{mN}}{\partial r} - \frac{m}{2R} \frac{|F_{mN}|^2}{r} \right] dr d\varphi = 0. \quad (16)$$

С учетом краевых условий для F_{mN} (см. (8)) это равенство эквивалентно равенству

$$\int \left(\frac{\sigma}{2R} + 2\eta + \frac{m}{R} \right) |F_{mN}|^2 dr = 0. \quad (17)$$

Отсюда получаем приближенное значение величины η , которая характеризует наличие поперечной составляющей у волнового числа диссипативного солитона:

$$\eta = -\frac{\sigma}{4R} - \frac{m}{2R}. \quad (18)$$

Далее, поступая аналогично работам [1], [4], из (18) получаем укороченное действие для диссипативного солитона (принцип Ферма)

$$\int_1^2 (\beta ds + A_\alpha dx^\alpha), \quad (19)$$

где $\beta = nk$, $k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны излучения в вакууме, n – показатель преломления; s – натуральный параметр, отсчитываемый вдоль траектории солитона; A_α – α -я компонента вектора $\mathbf{A} = -(\sigma/4 + m/2)\mathbf{l} \times \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}/R^2 = -\mathbf{l} \times \vec{\nabla} \ln n \times \mathbf{l}$; $R = |\mathbf{R}|$; $\mathbf{R}$ – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке; $\mathbf{l}$ – касательный к траектории единичный вектор.

Приравняв вариацию от действия (19) нулю, получаем уравнение траектории для диссипативного солитона в неоднородной локально изотропной среде, аналогичное уравнению [1]:

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \mathbf{l} \times \vec{\nabla} \ln n \times \mathbf{l} + \frac{1}{kn} \mathbf{l} \times \text{rot } \mathbf{A}. \quad (20)$$

С учетом сказанного во введении и аналогично работе [5] уравнение траектории диссипативного солитона (20) при наличии кручения K запишем в виде

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \frac{\mathbf{l} \times \vec{\nabla} \ln n \times \mathbf{l}}{1 - K(\sigma + m)} + \frac{1}{kn} \mathbf{l} \times \text{rot } \mathbf{A}. \quad (21)$$

Это уравнение совпадает с уравнением траектории пучка лучей, полученным в [1], [4] для более простых случаев (при $K = 0$, $m = 0$) и описывающим в приближении геометрической оптики оптический эффект Магнуса. Кроме того, уравнение (21) совпадает с уравнением траектории пучка лучей спиновых частиц [13], описывающим оптический эффект Магнуса для таких частиц (в последнем случае $\mathbf{A} = -\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}/2$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, направленный вдоль поляризации спиновой частицы).

Уравнение (21) при $\mathbf{A} = 0$, $m = 0$, $K = 0$ совпадает с полученным в [14] уравнением траектории пучка лучей для спиновых частиц (и описывает обратный оптический эффект Магнуса для спиновых частиц), если в правой части (21) в знаменателе первого слагаемого вместо величины $\sigma + m$ взять величину $\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}/2$, т.е. величину проекции спина на траекторию частицы. Естественным обобщением результата работы [14] была бы замена величины $\sigma + m$ на величину $\mathbf{l} \cdot \mathbf{J}$, где $\mathbf{J}$ – полный момент спиновой частицы.

3. СВЯЗЬ ОПТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА МАГНУСА С НЕГОЛОНОМНОСТЬЮ ПОЛЯ КАСАТЕЛЬНЫХ К ТРАЕКТОРИИ ЕДИНИЧНЫХ ВЕКТОРОВ

В соответствии с [15], [16] векторное поле касательных к траектории единичных векторов образует голономное векторное поле [17], т.е. определяет систему кривых (нормальную конгруэнцию, см. книгу [16], с. 154). Это приводит к тому, что можно провести к пучку лучей семейство ортогональных поверхностей, пересекающих каждую кривую под прямым углом. Такие ортогональные поверхности отождествляются с волновыми фронтами (см. [16], с. 812) или волновыми поверхностями

(см. [16], с. 41). Выполнение условия голономности для поля касательных к траектории единичных векторов приводит к тому, что в оптике имеет место инвариант Лагранжа (см. [16], с. 155).

Из (18) и (19) видно, что в случае оптического эффекта Магнуса возникает аналогия с движением заряженной частицы в электромагнитном поле, где вектор $\mathbf{A}$ играет роль векторного потенциала, а величина $\sigma + m/2$ – роль заряда. Известно, что при движении заряженной частицы в магнитном поле имеется существенное различие по сравнению с частным случаем чистого электрического поля (см. [16], с. 811). В этом случае существует обобщение инварианта Лагранжа (см. [16], с. 805) – одного из инвариантов Пуанкаре. Наличие магнитного поля приводит к тому, что обобщенный импульс содержит векторный потенциал, ротор от которого равен вектору магнитной индукции (в (19) это вектор $\mathbf{A}$). В свою очередь это приводит к неголономности касательного к траектории векторного поля (к косой конгруэнции (см. [16], с. 154)). Действительно, мерой неголономности касательного к траектории единичного векторного поля будет величина $\mathbf{l} \cdot \text{rot } \mathbf{l}$ (см. монографию [17], с. 12). Из (20) видно, что при $\mathbf{A} = 0$ величина неголономности будет равна нулю, $\mathbf{l} \cdot \text{rot } \mathbf{l} = 0$, а при $\mathbf{A} \neq 0$ величина $\mathbf{l} \cdot \text{rot } \mathbf{l} \neq 0$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, эффект дополнительного кручения траектории луча при наличии переменной кривизны траектории (в приближении геометрической оптики – оптический эффект Магнуса) зависит как от знака циркулярной поляризации, так и от топологического индекса $\alpha\sigma + m$, где $\alpha \sim 1$. В этом случае существует качественная аналогия с эффектом дополнительного изгиба при наличии кручения $\sigma + m$ (в приближении геометрической оптики это обратный оптический эффект Магнуса). Количественное отличие, по-видимому, объясняется следующим моментом. В настоящей работе для вывода поперечной составляющей волнового числа (18) использовался подход, аналогичный подходу в [4]. В то же время в работе [18] (или работе [1]) показано, что в действительности величина η при $m = 0$ будет в два раза больше. Поэтому в (18) скорее всего реализуется соотношение $\eta \sim \sigma + m$. Этот анализ выходит за рамки настоящей работы. Результаты, полученные в работе, применимы к слабозадействующим диссипативным солитонам, когда взаимодействие солитонов между собой аналогично наличию “неоднородной среды” для каждого из взаимодействующих солитонов.

Список литературы

- [1] Н. Р. Садыков, *ТМФ*, **149:1** (2006), 65–79.
- [2] В. В. Владимировский, *ДАН СССР*, **31** (1941), 222; С. М. Рытов, *ДАН СССР*, **18** (1938), 263–266.
- [3] А. В. Дугин, Б. Я. Зельдович, Н. Д. Кундикова, В. С. Либерман, *ЖЭТФ*, **100:5(11)** (1991), 1474–1482.
- [4] Н. Р. Садыков, *Квантовая электроника*, **19:10** (1992), 1021–1023.
- [5] Н. Р. Садыков, *Опт. и спектр.*, **84:4** (1998), 589–597.

- [6] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [7] Н. Н. Розанов, Г. В. Ходова, *Опт. и спектр.*, **65**:6 (1988), 1375–1377.
- [8] Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, *Опт. и спектр.*, **72**:6 (1992), 1403–1408.
- [9] V. B. Taranenko, C. O. Weiss, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron*, **8**:3 (2002), 488–496.
- [10] N. N. Rosanov, *Spatial Hysteresis and Optical Patterns*, Springer, Berlin, 2002.
- [11] Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, А. Н. Шацев, *ЖЭТФ*, **125**:3 (2004), 486–498.
- [12] А. Снайдер, Дж. Лав, *Теория оптических волноводов*, Радио и связь, М., 1987.
- [13] Н. Р. Садыков, *ТМФ*, **135**:2 (2003), 280–288.
- [14] Н. Р. Садыков, *ТМФ*, **144**:3 (2005), 555–563.
- [15] Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред*, Наука, М., 1980.
- [16] М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, М., 1970.
- [17] Ю. А. Аминов, *Геометрия векторного поля*, Наука, М., 1990.
- [18] Н. Р. Садыков, *Квантовая электроника*, **20** (1993), 1140–1142.

Поступила в редакцию 4.09.2007,
после доработки 9.03.2008