Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Сладь, Об электромагнитных формфакторах и поляризациях недираковских частиц со спином покоя $1/2$, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 1, 135–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 09:15:19

© 2009 г.

Л. М. Сладь*

ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФОРМФАКТОРАХ И ПОЛЯРИЗАЦИЯХ НЕДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ ПОКОЯ 1/2

Рассмотрена одна из сторон теоретических оснований поляризационных экспериментов по упругому рассеянию электронов на протонах, дающих для отношений формфакторов значения, не совместимые с теми, которые извлекаются из неполяризационных экспериментов. Анализируются следствия отказа от предположения, что нуклон является дираковской частицей. Показано, что процесс упругого рассеяния электронов на нуклонах описывается одними и теми же формулами независимо от представления собственной группы Лоренца, сопоставляемого нуклону как частице со спином покоя 1/2.

Ключевые слова: рассеяние электронов нуклонами, электромагнитные формфакторы, поляризационные явления, недираковские частицы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы получен ряд удивительных экспериментальных результатов по рассеянию электронов на протонах [1]–[7]. Они в своей совокупности свидетельствуют о несовместимости значений одной и той же величины – отношения электрического G_E и магнитного G_M формфакторов протона, – полученных двумя разными методами.

Один из методов основывается на извлечении отношения формфакторов из формулы Розенблюта [8], описывающей рассеяние неполяризованных электронов на неполяризованных протонах в лабораторной системе отсчета,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 E' \cos^2(\theta/2)}{4E^3 \sin^4(\theta/2)} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (1)$$

где E и E' – энергия электрона соответственно в начальном и конечном состояниях, θ – угол рассеяния электрона, Q^2 – квадрат переданного импульса, $\tau = Q^2/4M^2$, M – масса протона. Недавние высокоточные эксперименты [6], [7] в области $Q^2 \leq 5.5$ (ГэВ/с)² дают для находимой отсюда величины $R = \mu_p G_E/G_M$, где

*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: slad@theory.sinp.msu.ru

μ_p – магнитный момент протона, значения близкие к единице. Такое заключение согласуется с итогами глобального анализа Аррингтона [9], которому он подверг результаты многих прежних экспериментальных работ.

Второй метод получения значений отношения электромагнитных формфакторов протона опирается на поляризационные измерения. Именно, если происходит рассеяние продольно-поляризованных электронов на покоящихся неполяризованных протонах, то поляризация протонов отдачи обладает поперечной (в плоскости импульсов всех частиц) P_x и продольной P_z компонентами и имеет место соотношение [10]

$$\frac{G_E}{G_M} = -\frac{P_x}{P_z} \cdot \frac{E + E'}{2M} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (2)$$

где P_x и P_z относятся к системе покоя конечного протона. Используя эту формулу, авторы работ [1]–[5] пришли к выводу о почти линейном убывании величины R с ростом Q^2 от значения близкого к единице при малых Q^2 до значения равного примерно 0.3 при $Q^2 = 5.6$ (ГэВ/с)².

Описанное расхождение в значениях величины R вызвало новую волну публикаций [11]–[15] с анализом вклада двухфотонного обмена между электронами и протонами в поправки к формулам (1) и (2). Отметим, что радиационные поправки к формуле Розенблюта (1), включающие двухфотонный обмен, являлись предметом неоднократных исследований с давних времен. В свое время итог этих исследований был подведен в работе [16], до сих пор использующейся при обработке экспериментальных данных по рассеянию электронов на нуклонах (например, Аррингтоном [9]). В работах [11]–[15] доминирует мнение, что учет структуры виртуальных адронных состояний в процессах с двухфотонным обменом несколько уменьшает расхождение в значениях величины R , получаемых в поляризационных и в неполяризационных измерениях, но не устраняет его.

По-видимому, вопрос о природе расхождений, касающихся величины R , пока не может получить ясного и однозначного теоретического решения в рамках изучения одних лишь радиационных поправок. Нам представляется необходимым проанализировать также все стороны теоретических моделей и предположений, используемых по ходу получения окончательных результатов в работах по рассеянию электронов на протонах. Так суждения о значениях поляризации протонов отдачи выносятся, во-первых, на основании теоретического моделирования азимутальной асимметрии [17], возникающей в результате спин-орбитального взаимодействия при вторичном рассеянии протонов на углеродной мишени, и, во-вторых, на основании феноменологической формулы Баргманна–Мишеля–Телегди [18], описывающей поворот спина релятивистской частицы в однородном магнитном поле. Наконец, и формула (1), и формула (2) изначально были получены в рамках предположения о том, что протон является дираковской частицей. Настоящая работа посвящена тщательному анализу ряда следствий отказа от этого предположения. Установив, что формулы (1) и (2) носят универсальный характер, т.е. они справедливы как для дираковских, так и недираковских нуклонов, мы уменьшаем количество теоретических аспектов поляризационных экспериментов по рассеянию электронов на протонах, которые, на наш взгляд, требовалось бы вновь подвергнуть всестороннему анализу.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ТОК И ВОЛНОВЫЕ ВЕКТОРЫ ДЛЯ НЕДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ ПОКОЯ 1/2

Сопоставление нуклону дираковского представления собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$ вполне соответствовало ранним воззрениям на внутреннюю структуру нуклона, базировавшимся на мезонной модели, где физический нуклон состоит из голого (дираковского) нуклона и облака псевдоскалярных пионов. Оно влечет за собой следующий наиболее общий вид сохраняющегося нуклонного электромагнитного тока в импульсном пространстве [19], [20]:

$$j^\mu(p, p_0) = ie\bar{u}(p) \left[\gamma^\mu F_1(Q^2) + \frac{i\kappa}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(Q^2) \right] u(p_0), \quad (3)$$

который является полярным 4-вектором ортохронной группы Лоренца $L^\uparrow$. Здесь величины $\bar{u}$ и u – дираковские спиноры для нуклона, κ – аномальный магнитный момент нуклона в ядерных магнетонах, $q = p - p_0$, $Q^2 = -q^2$. Связь формфактора Дирака F_1 и формфактора Паули F_2 из формулы (3) с формфакторами Сакса G_E и G_M из формул (1), (2) дается соотношениями [20]

$$G_E = F_1 - \kappa\tau F_2, \quad G_M = F_1 + \kappa F_2. \quad (4)$$

Кварковая модель адронов, а затем квантовая хромодинамика изменили наше понимание сущности внутренней структуры нуклона. Теперь считается, что нуклон состоит из трех валентных кварков и из моря кварк-антикварковых пар и глюонов. В силу этого его векторнозначная волновая функция партонных координат преобразуется по некоторому представлению собственной группы Лоренца, которое принадлежит прямому произведению счетного множества дираковских представлений группы, приписываемых кваркам, и счетного множества 4-векторных представлений, приписываемых глюонам. Это произведение разлагается в прямую сумму всех конечномерных неприводимых представлений собственной группы Лоренца с полупростыми спинами. Такой вывод охватывает все нуклонные состояния – основное и резонансные. В отношении нуклона как основного состояния нужно учесть то обстоятельство, что он обладает определенным спином в системе покоя. Следовательно, каждое неприводимое представление группы $L_+^\uparrow$, принимающее участие в описании нуклона, должно содержать его спин покоя 1/2. Тем самым, на наш взгляд, современная партонная модель адронов и групповые соображения дают свидетельства в пользу сопоставления нуклону следующего бесконечномерного представления¹⁾:

$$S^{3/2} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} + n \right) \oplus \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} + n \right) \right]. \quad (5)$$

¹⁾Для неприводимых представлений τ группы $L_+^\uparrow$ мы пользуемся обозначениями Гельфанда и Яглома [21], [22]: $\tau = (l_0, l_1)$, где $2l_0$ – целое число, l_1 – произвольное комплексное число. Канонический базис пространства представления τ связывают с подгруппой $SO(3)$ и обозначают через $\xi_{(l_0, l_1)lm}$, где l – спин, m – его проекция на третью ось, причем $m = -l, -l+1, \dots, l$ и $l = |l_0|, |l_0|+1, \dots$. В общем случае последняя последовательность бесконечна. Представление (l_0, l_1) конечномерно, а выписанная последовательность спинов обрывается, если $2l_0$ и $2l_1$ являются целыми числами одинаковой четности, причем $|l_1| > |l_0|$. Пары (l_0, l_1) и $(-l_0, -l_1)$ описывают одно и то же представление. Дираковское представление – это $(-1/2, 3/2) \oplus (1/2, 3/2)$.

С таким представлением мы уже имели дело в работах [23]–[26], изучая теорию полей класса ISFIR, т.е. полей, которые преобразуются по представлениям группы $L_+^\uparrow$, разложимым в бесконечную прямую сумму конечномерных неприводимых представлений. Установленное физическое следствие этой теории – характеристики ее спектров масс [26] – находится в хорошем соответствии с экспериментальной картиной.

Тем не менее мы хотим отметить, что все рассуждения и выводы настоящей работы, кроме формулы (65), имеют одинаковую силу и для представления (5), и для любой конечной прямой суммы конечномерных неприводимых представлений группы $L_+^\uparrow$, содержащих спин $1/2$, и для любой конечной или бесконечной прямой суммы бесконечномерных неприводимых представлений вида

$$S^{k_1, \mathcal{K}} = \bigoplus_{n \in \mathcal{K}} \left[\left(-\frac{1}{2}, k_1 + n \right) \oplus \left(\frac{1}{2}, k_1 + n \right) \right], \quad (6)$$

где $\mathcal{K}$ – некоторое подмножество множества целых чисел, а k_1 – действительное число, причем $|k_1| \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$, и для следующих бесконечномерных представлений $S^{1/2} = (-1/2, 1/2) \oplus (1/2, 1/2)$ и $S^{\text{unit}} = (-1/2, i\rho) \oplus (1/2, i\rho)$, где ρ – положительное число. Если бы в формуле (6) число k_1 было комплексным, $\text{Re } k_1 \neq 0$ и $\text{Im } k_1 \neq 0$, то не существовало бы ненулевых релятивистски-инвариантных билинейной формы и лагранжиана свободного поля. Если же в формуле (6) положить $k_1 = 0$, то теория соответствующего свободного поля была бы *CPT*-неинвариантной [27], [28]. Напомним, что теория полей, преобразующихся как конечная прямая сумма бесконечномерных неприводимых представлений собственной группы Лоренца, обладает рядом перечисленных во введении работы [24] свойств, которые делают ее неприемлемой для физики частиц.

Если полю нуклона ψ сопоставляется некоторое недираковское представление группы $L_+^\uparrow$, то у нас нет никаких оснований ограничиваться в лагранжиане только его минимальным взаимодействием с электромагнитным полем A_μ и низшим неминимальным взаимодействием, содержащим калибровочно-инвариантный антисимметричный тензор $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, что с необходимостью имеет место для дираковской частицы. Такому полю ψ в общем случае следует ставить в соответствие электромагнитный ток со счетным множеством слагаемых следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\mu(p, p_0) = ie(\psi(p), [\Gamma^\mu K_0(Q^2) + \Gamma^{\mu\nu} q_\nu K_1(Q^2) + \Gamma^{\mu\nu\nu_1} q_\nu q_{\nu_1} K_2(Q^2) + \dots \\ \dots + \Gamma^{\mu\nu\nu_1 \dots \nu_n} q_\nu q_{\nu_1} \dots q_{\nu_n} K_{n+1}(Q^2) + \dots] \psi(p_0)), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Gamma^{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\mu\nu\nu_1 \dots \nu_n}$, $n = 1, 2, \dots$, – антисимметричные по индексам μ и ν матричные тензорные операторы группы Лоренца. Указанная антисимметричность обеспечивает сохранение тока $\mathcal{J}^\mu$ и калибровочную инвариантность соответствующего лагранжиана. Необходимые сведения о структуре любого 4-векторного оператора Γ^μ и детали, относящиеся к релятивистски-инвариантной билинейной форме типа (ψ_1, ψ_2) , которую мы считаем невырожденной, можно найти в работах [21], [22]. Описания общей структуры матричных операторов $\Gamma^{\mu\nu}$ и тем более операторов $\Gamma^{\mu\nu\nu_1 \dots \nu_n}$ из формулы (7) в литературе до сих пор не существует, да в нем и нет потребности при решении задач настоящей работы. В дальнейшем нам понадобятся свойства

тензоров и тензорных операторов группы Лоренца относительно пространственного отражения. Если не оговорено иное, мы будем полагать, что они везде такие же, как у подходящего тензорного произведения полярных 4-векторов и полярных векторных операторов ортохронной группы Лоренца $L^\uparrow$.

Из всех свойств бесконечной суммы операторов в токе (7), вовлеченных в описание неминимального электромагнитного взаимодействия, мы выделяем только два: антисимметричность результирующего оператора и его зависимость от компонент 4-вектора переданного импульса, – передавая это следующим обозначением:

$$\Lambda^{\mu\nu}(q) \equiv \Gamma^{\mu\nu} K_1(Q^2) + \Gamma^{\mu\nu\nu_1} q_{\nu_1} K_2(Q^2) + \dots + \Gamma^{\mu\nu\nu_1\dots\nu_n} q_{\nu_1} \dots q_{\nu_n} K_{n+1}(Q^2) + \dots \quad (8)$$

Ниже при описании упругого рассеяния электронов на нуклонах мы будем пользоваться лабораторной системой отсчета, в которой импульс нуклона отдачи направлен по третьей координатной оси (оси Z), а импульс начального электрона лежит в плоскости XZ . Следовательно, в дальнейшем

$$p_0 = \{M, 0, 0, 0\}, \quad p = \{E_N, 0, 0, p_N\}, \quad q = p - p_0 = \{q^0, 0, 0, q^3\}. \quad (9)$$

При вычислении характеристик процесса упругого рассеяния электрона на недирекционной частице со спином покоя $1/2$ нам потребуются коммутационные соотношения операторов $\Lambda^{\mu\nu}(q)$ с инфинитезимальным оператором группы вращения²⁾ I^{12} . В выбранной нами системе отсчета они имеют следующий вид:

$$[I^{12}, \Lambda^{\mu\nu}(q)] = -g^{1\mu} \Lambda^{2\nu}(q) + g^{1\nu} \Lambda^{2\mu}(q) + g^{2\mu} \Lambda^{1\nu}(q) - g^{2\nu} \Lambda^{1\mu}(q), \quad (10)$$

где $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$, $g^{\rho\sigma} = 0$, $\rho \neq \sigma$.

В самом деле, объявление оператора $\Lambda^{\mu\nu}(q)$ антисимметричным тензорным оператором означает, что величина $(\psi_1, \Lambda^{\mu\nu}(q) \psi_2)$ преобразуется относительно группы $L^\uparrow$ как антисимметричный тензор, а свертка $(\psi_1, \Lambda^{\mu\nu}(q) \eta_{\mu\nu} \psi_2)$, где $\eta_{\mu\nu}$ – любой антисимметричный тензор второго ранга, представляет собой релятивистски-инвариантную невырожденную билинейную форму. Если положить, что полевые векторы ψ_1 и ψ_2 принадлежат пространству представления $S(g)$ ортохронной группы Лоренца, имеем

$$[S(g)]^{-1} \Lambda^{\mu\nu}(q') \eta'_{\mu\nu} S(g) = \Lambda^{\mu\nu}(q) \eta_{\mu\nu}, \quad (11)$$

причем

$$\begin{aligned} \chi'_\mu &= [l(g)]_\mu{}^\rho \chi_\rho, \\ \eta'_{\mu\nu} &= [T(g)]_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \eta_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \{ [l(g)]_\mu{}^\rho [l(g)]_\nu{}^\sigma - [l(g)]_\nu{}^\rho [l(g)]_\mu{}^\sigma \} \eta_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (12)$$

где χ – произвольный полярный 4-вектор. Рассмотрим бесконечно малое вращение g_1 вокруг третьей координатной оси. Тогда $q' = q$, а также

$$\chi' = \{\chi_0, \chi_1 - \epsilon_{12}\chi_2, \chi_2 + \epsilon_{12}\chi_1, \chi_3\}, \quad S(g_1) = 1 + \epsilon_{12}I^{12}. \quad (13)$$

²⁾В статье [24], где приведены краткие сведения о представлениях группы Лоренца и о релятивистски-инвариантных уравнениях, почерпнутые из [21], [22], не было выписано действие на базисные векторы $\xi_{\tau lm}$ инфинитезимальных операторов группы вращения, так как там, в отличие от настоящей работы, в этом не было необходимости. Введем обозначения: $H^3 = iI^{12}$, $H^- = iI^{23} + I^{31}$ и $H^+ = iI^{23} - I^{31}$. Тогда $H^3 \xi_{\tau lm} = m \xi_{\tau lm}$, $H^- \xi_{\tau lm} = \sqrt{(l-m+1)(l+m)} \xi_{\tau l m-1}$ и $H^+ \xi_{\tau lm} = \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \xi_{\tau l m+1}$.

Используя (13), (12) и (11), получаем коммутационные соотношения (10). При других бесконечно малых вращениях или собственно лоренцовых преобразованиях 4-вектор q изменяется и формула (11) не может привести к коммутационным соотношениям операторов $\Lambda^{\mu\nu}(q)$ с каким-либо из остальных ($\{\rho, \sigma\} \neq \{1, 2\}$) инфинитезимальных операторов $I^{\rho\sigma}$ группы $L_+^\dagger$.

Мы предполагаем, что волновая функция недираковского нуклона $\psi(p)$, так же как и дираковского, преобразуясь по одному из перечисленных выше представлений S_0 группы $L_+^\dagger$, подчиняется некоторому вполне определенному релятивистски-инвариантному уравнению

$$(\Gamma^\mu p_\mu - R)\psi(p) = 0, \quad (14)$$

где R – некоторый скалярный матричный оператор.

Поскольку матричные операторы Γ^0 и R диагональны по спину l и по его проекции на третью ось m , причем их элементы не зависят от m [21], [22], то каждой частице, описываемой некоторым решением $\psi(p)$ уравнения (14), можно сопоставить в ее системе покоя вполне определенный спин и не зависящие от m компоненты волновой функции. В частности, для частицы со спином $1/2$ двум ее независимым состояниям в системе покоя можно поставить в соответствие векторы

$$\psi_m(p_0) = \sum_{(l_0, l_1) \in S_0} u_{(l_0, l_1) \frac{1}{2} m}(0) \xi_{(l_0, l_1) \frac{1}{2} m}, \quad (15)$$

где $m = -1/2, 1/2$, причем

$$u_{(l_0, l_1) \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}(0) = u_{(l_0, l_1) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}(0). \quad (16)$$

В силу инвариантности уравнения (14) относительно пространственных отражений каждый вектор состояния частицы в ее системе покоя обладает определенной P -четностью, а именно

$$P\psi_m(p_0) = r\psi_m(p_0), \quad u_{(-\frac{1}{2}, l_1) \frac{1}{2} m}(0) = ru_{(\frac{1}{2}, l_1) \frac{1}{2} m}(0), \quad (17)$$

где $r = +1$ или $r = -1$.

При переходе от системы покоя частицы к выбранной нами лабораторной системе, отвечающем элементу g_0 собственной группы Лоренца, преобразования в пространстве волновых векторов ψ даются оператором $S(g_0) = e^{\alpha I^{03}}$, где $\text{th } \alpha = v = p_N/E_N$. Матричные элементы этого оператора диагональны по проекции спина на третью ось:

$$e^{\alpha I^{03}} \xi_{(l_0, l_1) lm} = \sum_{l'} A_{l' m, lm}^{(l_0, l_1)}(\alpha) \xi_{(l_0, l_1) l' m}. \quad (18)$$

Действуя этим оператором на обе части равенства (15), получаем векторы

$$\psi_m(p) = S(g_0)\psi_m(p_0) = \sum_{(l_0, l_1) \in S_0} \sum_l u_{(l_0, l_1) lm}(\alpha) \xi_{(l_0, l_1) lm}, \quad (19)$$

где

$$u_{(l_0, l_1) lm}(\alpha) = A_{lm, \frac{1}{2} m}^{(l_0, l_1)}(\alpha) u_{(l_0, l_1) \frac{1}{2} m}(0). \quad (20)$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие общие соотношения между матричными элементами конечных преобразований группы $L_+^\uparrow$:

$$A_{l-m, \frac{1}{2}-m}^{(l_0, l_1)}(\alpha) = A_{lm, \frac{1}{2}m}^{(-l_0, l_1)}(\alpha) = [A_{lm, \frac{1}{2}m}^{(l_0, l_1)}(-\alpha)]^*, \quad (21)$$

которые являются простым следствием результата действия инфинитезимального оператора I^{03} на векторы канонического базиса (см. формулы ³⁾ (I.7) и (I.9)).

3. СЕЧЕНИЕ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ НЕПОЛЯРИЗОВАННОГО ЭЛЕКТРОНА НА НЕПОЛЯРИЗОВАННОЙ НЕДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЕ СО СПИНОМ ПОКОЯ 1/2

Если электромагнитный ток нуклона дается формулами (7), (8), то упругому рассеянию электрона на таком нуклоне с заданными значениями его проекции спина на третью ось в начальном и конечном состояниях соответствует матричный элемент вида

$$\mathcal{M}_{m_2 m_1} = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}_{e'}(k') \gamma_\mu u_e(k) \cdot (\psi_{m_2}(p), [\Gamma^\mu K_0(Q^2) + \Lambda^{\mu\nu}(q) q_\nu] \psi_{m_1}(p_0)), \quad (22)$$

где k и k' – 4-импульсы падающего и рассеянного электронов соответственно, описываемых дираковскими спинорами $u_e(k)$ и $\bar{u}_{e'}(k')$.

При вычислении квадрата модуля матричного элемента $\overline{\mathcal{M}^2}$, просуммированного по поляризациям конечных частиц и усредненного по поляризациям начальных, для электрона как дираковской частицы можно использовать хорошо известные формулы. Именно [29],

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{polar. e, e'}} [\bar{u}_{e'}(k') \gamma_\mu u_e(k)] [\bar{u}_{e'}(k') \gamma_\nu u_e(k)]^* = l_{\mu\nu} = 4k_\mu k_\nu + g_{\mu\nu} + 2(k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu). \quad (23)$$

Это равенство позволяет нам в своих выкладках избавиться от волновых векторов электронов – их дираковских спиноров. Но в общем случае при нахождении величины $\mathcal{M}^2$ мы обязаны постоянно иметь дело с волновыми векторами недираковских нуклонов. Чтобы представить эту величину в максимально простом виде, близком по структуре к виду для дираковского нуклона, мы должны аккуратно установить целый ряд общих соотношений для элементов его электромагнитного тока. Займемся этим.

Во-первых, используем соотношение, отражающее релятивистскую инвариантность билинейной формы,

$$(I^{\mu\nu} \psi_1, \psi_2) = -(\psi_1, I^{\mu\nu} \psi_1) \quad (24)$$

и его следствие [21], [22]

$$(\xi_{\tau' l' m'}, \xi_{\tau l m}) = \delta_{\tau' \tau^*} \delta_{l' l} \delta_{m' m} a_{\tau^* \tau}(l), \quad (25)$$

где $\tau^* = (l_0, -l_1^*) \sim (-l_0, l_1^*)$, если $\tau = (l_0, l_1)$, а также соотношения (I.14) и (I.17), уравнение (14) и формулы (15) и (19). Вначале получим равенство

$$(\Gamma^\mu \psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \Gamma^\mu \psi_2), \quad (26)$$

³⁾Здесь и далее ссылка вида (I.N) означает формулу (N) из работы [24].

для всех значений индекса μ , а затем

$$\begin{aligned} (\psi_{m_2}(p), \Gamma^0 \psi_{m_1}(p_0)) &= \delta_{m_2 m_1} \frac{1}{M} (\psi_{m_1}(p), R \psi_{m_1}(p_0)), \\ (\psi_{m_2}(p), \Gamma^3 \psi_{m_1}(p_0)) &= \delta_{m_2 m_1} \frac{q^0}{q^3 M} (\psi_{m_1}(p), R \psi_{m_1}(p_0)). \end{aligned} \quad (27)$$

Во-вторых, отметим, что в то время, как оператор Γ^0 , действуя на какой-либо вектор канонического базиса, не изменяет его квантовое число m , инфинитезимальные операторы I^{10} и I^{20} (см. соотношения (I.7), (I.9) и (I.10)), а следовательно, и находящиеся по формуле (I.17) операторы Γ^1 и Γ^2 , изменяют это квантовое число на ± 1 . К тому же на основании формулы (10) и явного вида оператора I^{12} в каноническом базисе нетрудно установить, что две компоненты $\Lambda^{12}(q)$ и $\Lambda^{30}(q)$ антисимметричного тензора $\Lambda^{\mu\nu}(q)$ не изменяют числа m в векторах $\xi_{\tau lm}$, а остальные компоненты изменяют его на ± 1 . Все это вместе с равенствами (15) и (19), в которых $m = \pm 1/2$, и формулой (25) дает

$$\begin{aligned} (\psi_{m_2}(p), U_1 \psi_{m_1}(p_0)) &= \delta_{m_2 m_1} (\psi_{m_1}(p), U_1 \psi_{m_1}(p_0)), \\ (\psi_{m_2}(p), U_2 \psi_{m_1}(p_0)) &= \delta_{m_2 - m_1} (\psi_{-m_1}(p), U_2 \psi_{m_1}(p_0)), \end{aligned} \quad (28)$$

если $U_1 \in \{\Lambda^{12}(q), \Lambda^{30}(q)\}$ и $U_2 \in \{\Gamma^1, \Gamma^2, \Lambda^{23}(q), \Lambda^{31}(q), \Lambda^{10}(q), \Lambda^{20}(q)\}$.

В-третьих, оправдаем интуитивное ожидание, что величины $(\psi_{m_2}(p), W \psi_{m_1}(p_0))$ и $(\psi_{-m_2}(p), W \psi_{-m_1}(p_0))$, где W – или некоторый скалярный, или 4-векторный, или тензорный оператор группы Лоренца, имеют одинаковое значение, по крайней мере с точностью до фазового множителя. Сразу отметим, что требуемое доказательство в достаточно общей ситуации, имеющей дело с элементами тока (7), (8), нетривиально. Оно опирается на то обстоятельство, что параметры $\varepsilon_{\mu\nu}$ собственных преобразований ортохронной группы Лоренца составляют антисимметричный тензор этой группы. Пусть поле ψ является вектором пространства $\mathcal{L}$ представления $S(g)$ группы $L^\uparrow$. Вектор $\psi' = e^{\varepsilon_{\mu\nu} I^{\mu\nu}/2} \psi$, принадлежащий пространству $\mathcal{L}$, можно подвергнуть преобразованию группы $L^\uparrow$, порождаемому элементом g , двумя эквивалентными способами, отображенными соответственно левой и правой частями следующего равенства:

$$S(g) \psi' = e^{[T(g)]_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma} I^{\mu\nu}/2} S(g) \psi. \quad (29)$$

Отсюда получаем⁴⁾

$$S(g) e^{\varepsilon_{\mu\nu} I^{\mu\nu}/2} = e^{[T(g)]_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma} I^{\mu\nu}/2} S(g). \quad (30)$$

Пусть элемент g_2 ортохронной группы Лоренца означает вращение на угол π вокруг первой оси (оси X) с последующим пространственным отражением. При таком преобразовании, оставляющем полярный 4-вектор q неизменным, имеем

$$\{\eta'_{12}, \eta'_{23}, \eta'_{31}, \eta'_{01}, \eta'_{02}, \eta'_{03}\} = \{-\eta_{12}, \eta_{23}, -\eta_{31}, -\eta_{01}, \eta_{02}, \eta_{03}\}, \quad S(g_2) = P e^{\pi I^{23}}. \quad (31)$$

⁴⁾Вполне возможно, что соотношение (30) является новым в теории групп. Аналогичное соотношение можно привести и в отношении любой группы Ли G , приняв во внимание, что ее параметры являются компонентами векторов из пространства присоединенного представления группы G .

Учитывая релятивистскую инвариантность билинейной формы, соотношения (11), (30), (31), (15), явный вид оператора I^{23} в каноническом базисе и соотношения (16) и (17), получаем

$$\begin{aligned}
 (\psi_{m_2}(p), \Lambda^{\rho\sigma}(q) \eta_{\rho\sigma} \psi_{m_1}(p_0)) &= (S(g_2) e^{\alpha I^{03}} \psi_{m_2}(p_0), S(g_2) \Lambda^{\rho\sigma}(q) \eta_{\rho\sigma} \psi_{m_1}(p_0)) = \\
 &= \left(e^{\alpha I^{03}} S(g_2) \sum_{\tau} u_{\tau \frac{1}{2} m_2}(0) \xi_{\tau \frac{1}{2} m_2}, \Lambda^{\rho\sigma}(q) \eta'_{\rho\sigma} S(g_2) \sum_{\tau} u_{\tau \frac{1}{2} m_1}(0) \xi_{\tau \frac{1}{2} m_1} \right) = \\
 &= \left(e^{\alpha I^{03}} P \sum_{\tau} u_{\tau \frac{1}{2} m_2}(0) (-i) \xi_{\tau \frac{1}{2} - m_2}, \Lambda^{\rho\sigma}(q) \eta'_{\rho\sigma} P \sum_{\tau} u_{\tau \frac{1}{2} m_1}(0) (-i) \xi_{\tau \frac{1}{2} - m_1} \right) = \\
 &= \left(e^{\alpha I^{03}} P \sum_{\tau} u_{\tau \frac{1}{2} - m_2}(0) \xi_{\tau \frac{1}{2} - m_2}, \Lambda^{\rho\sigma}(q) \eta'_{\rho\sigma} P \sum_{\tau} u_{\tau \frac{1}{2} - m_1}(0) \xi_{\tau \frac{1}{2} - m_1} \right) = \\
 &= (e^{\alpha I^{03}} r \psi_{-m_2}(p_0), \Lambda^{\rho\sigma}(q) \eta'_{\rho\sigma} r \psi_{-m_1}(p_0)) = (\psi_{-m_2}(p), \Lambda^{\rho\sigma}(q) \eta'_{\rho\sigma} \psi_{-m_1}(p_0)). \quad (32)
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$(\psi_{m_2}(p), \Lambda^{\mu\nu}(q) \psi_{m_1}(p_0)) = \kappa_1 (\psi_{-m_2}(p), \Lambda^{\mu\nu}(q) \psi_{-m_1}(p_0)), \quad (33)$$

где $\kappa_1 = 1$, если ни один из двух индексов μ и ν не равен единице, и $\kappa_1 = -1$ в противном случае. Аналогично устанавливается, что

$$(\psi_{m_2}(p), \Gamma^{\mu} \psi_{m_1}(p_0)) = \kappa_0 (\psi_{-m_2}(p), \Gamma^{\mu} \psi_{-m_1}(p_0)), \quad (34)$$

где $\kappa_0 = 1$, если $\mu = 0, 2$ или 3 , и $\kappa_0 = -1$, если $\mu = 1$.

В-четвертых, используя формулы (28), (I.15), (10), (24), (15) и (19) и явный вид инфинитезимального оператора I^{12} , получим

$$\begin{aligned}
 (\psi_{-m_1}(p), \Gamma^2 \psi_{m_1}(p_0)) &= 2im_1 (\psi_{-m_1}(p), \Gamma^1 \psi_{m_1}(p_0)), \\
 (\psi_{-m_1}(p), \Lambda^{2\sigma} \psi_{m_1}(p_0)) &= 2im_1 (\psi_{-m_1}(p), \Lambda^{1\sigma} \psi_{m_1}(p_0)), \quad (35)
 \end{aligned}$$

где $\sigma = 0$ или $\sigma = 3$.

Только теперь, основываясь на соотношениях (22), (23), (27), (28) и (33)–(35), находим максимально простое выражение для квадрата модуля матричного элемента $\overline{\mathcal{M}}^2$, описывающего процесс упругого рассеяния неполяризованных электронов на неполяризованных нуклонах. Затем, пользуясь стандартной формулой (см., например, [30]), выражающей дифференциальное сечение процесса через $\overline{\mathcal{M}}^2$, получаем распределение по телесному углу рассеянных электронов. Устанавливаем, что это распределение описывается не чем иным, как формулой Розенблюта (1). При этом роль электромагнитных формфакторов G_E и G_M играют в ней следующие величины:

$$G_E = \frac{C}{\sqrt{\tau+1}} (\psi_{+\frac{1}{2}}(p), [K_0(Q^2)R - Mq^3 \Lambda^{03}(q)] \psi_{+\frac{1}{2}}(p_0)), \quad (36)$$

$$G_M = \frac{MC}{\sqrt{\tau}} (\psi_{+\frac{1}{2}}(p), [K_0(Q^2)\Gamma^1 + q^0 \Lambda^{10}(q) - q^3 \Lambda^{13}(q)] \psi_{-\frac{1}{2}}(p_0)), \quad (37)$$

где

$$C = (\psi_{+\frac{1}{2}}(p_0), R \psi_{+\frac{1}{2}}(p_0))^{-1}. \quad (38)$$

4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ НУКЛОНОВ ОТДАЧИ ПРИ УПРУГОМ РАССЕЙНИИ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ НА НЕПОЛЯРИЗОВАННЫХ НЕДИРАКОВСКИХ НУКЛОНАХ

Вычисления, принимающие во внимание поляризацию электрона с массой m_e , основываются на следующем соотношении [29]:

$$u_e(k)\bar{u}_e(k) = \frac{1}{2}(\hat{k} + m_e)(1 - \gamma^5 \hat{a}), \quad (39)$$

причем компоненты входящего в него аксиального 4-вектора a имеют вид

$$a^0 = \frac{\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}}{m_e}, \quad \mathbf{a} = \boldsymbol{\xi} + \frac{(\mathbf{k}\boldsymbol{\xi})\mathbf{k}}{m_e(m_e + E)}, \quad (40)$$

где $\boldsymbol{\xi}$ – единичный вектор поляризации электрона в его системе покоя. Напомним, что под поляризацией спинорной частицы в некотором состоянии понимают удвоенное среднее значение спина в этом состоянии.

Выполняя суммирование по поляризациям рассеянного релятивистского электрона, используя формулы (39), (40) и пренебрегая членами порядка m_e/E , получают [10]

$$\sum_{\text{polar. } e'} [\bar{u}_{e'}(k')\gamma_\mu u_e(k)] [\bar{u}_{e'}(k')\gamma_\nu u_e(k)]^* = l_{\mu\nu} + 2i\xi_{\parallel}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q^\rho k^\sigma, \quad (41)$$

где $l_{\mu\nu}$ дается соотношением (23), а $\xi_{\parallel}$ обозначает продольную поляризацию начального электрона, $-1 \leq \xi_{\parallel} \leq +1$. Отметим, что поперечная поляризация начального электрона, будучи не нулевой как только $|\xi_{\parallel}| \neq 1$, дает пренебрежимо малый вклад $O(m_e/E)$ в правую часть равенства (41).

Аналог формул (39), (40) является существенным элементом стандартной процедуры вычисления поляризации родившихся в некотором процессе дираковских частиц [29]. Он использовался в работе [10] по отношению к нуклонам отдачи в процессе рассеяния поляризованных электронов на неполяризованной мишени. Рассматривая недираковские частицы, мы лишаемся этой процедуры вместе с формулами (39), (40).

Наша методика нахождения поляризации нуклонов отдачи основывается на явном виде их векторов состояний $\Psi_m^{\lambda'}$, каждый из которых являет собой суперпозицию двух векторов состояний (19) с определенными проекциями спина на третью ось, причем коэффициенты этой суперпозиции даются подходящими матричными элементами процесса рассеяния электронов на нуклонах, а именно

$$\Psi_{m_1}^{\lambda'} = N_{m_1}^{\lambda'} [\mathcal{M}_{-\frac{1}{2}m_1}^{\lambda'} \psi_{-\frac{1}{2}}(p) + \mathcal{M}_{\frac{1}{2}m_1}^{\lambda'} \psi_{\frac{1}{2}}(p)], \quad (42)$$

где

$$N_{m_1}^{\lambda'} = (|\mathcal{M}_{-\frac{1}{2}m_1}^{\lambda'}|^2 + |\mathcal{M}_{\frac{1}{2}m_1}^{\lambda'}|^2)^{-1/2}, \quad (43)$$

а λ' – поляризация (спиральность) рассеянного электрона (в формуле (22) она в явном виде не выписывалась).

Среднее значение b какой-нибудь величины, характеризующей нуклоны отдачи и описываемой оператором B , находится по формуле

$$b = D_0^{-1} \sum_{\lambda', m_1} (\Psi_{m_1}^{\lambda'}, B \Psi_{m_1}^{\lambda'}) w_{m_1}^{\lambda'}, \quad (44)$$

где

$$D_0 = (\psi_m(p_0), \psi_m(p_0)), \quad (45)$$

а $w_{m_1}^{\lambda'}$ – вероятность того, что родившийся нуклон и электрон будут иметь соответственно одно из двух возможных значений проекции спина на третью ось m_1 и одно из двух возможных значений поляризации (спиральности) λ' . Очевидно,

$$w_{m_1}^{\lambda'} = N^2 (N_{m_1}^{\lambda'})^{-2}, \quad (46)$$

где

$$N = \left(\sum_{\lambda', m_1, m_2} |\mathcal{M}_{m_1 m_2}^{\lambda'}|^2 \right)^{-1/2}. \quad (47)$$

В квантовой релятивистской теории оператор спина отождествляется с антисимметричным тензорным оператором $iI^{\mu\nu}$, состоящим из генераторов собственной группы Лоренца. Нас будут интересовать в первую очередь средние значения чисто пространственных компонент спина, образующие вектор $\mathbf{s}$. Существенно, что в системе покоя дираковской или недираковской спинорной частицы для любого состояния с определенной P -четностью средние значения остальных компонент тензора спина равны нулю:

$$(\psi(p_0), I^{0i} \psi(p_0)) = 0, \quad (48)$$

где

$$\psi(p_0) = c_{-\frac{1}{2}} \psi_{-\frac{1}{2}}(p_0) + c_{\frac{1}{2}} \psi_{\frac{1}{2}}(p_0), \quad (49)$$

$i = 1, 2, 3$, а c_m – произвольные коэффициенты суперпозиции. В самом деле, принимая во внимание соотношения (49), (17), инвариантность билинейной формы относительно пространственных соотношений и соотношение (11) с заменой в нем $\Lambda^{\mu\nu}(q)$ на $I^{\mu\nu}$ и $S(g)$ на P^{-1} , имеем

$$\begin{aligned} (\psi(p_0), [I^{0i} \eta_{0i} + I^{jk} \eta_{jk}] \psi(p_0)) &= (P \psi(p_0), [I^{0i} \eta_{0i} + I^{jk} \eta_{jk}] P \psi(p_0)) = \\ &= (\psi(p_0), P^{-1} [I^{0i} \eta_{0i} + I^{jk} \eta_{jk}] P \psi(p_0)) = \\ &= (\psi(p_0), [-I^{0i} \eta_{0i} + I^{jk} \eta_{jk}] \psi(p_0)). \end{aligned} \quad (50)$$

Представляется интересным, что Френкель, предложивший релятивистское описание классического спина в виде антисимметричного тензора, еще до появления уравнения Дирака сформулировал правило, согласно которому в системе покоя частицы могут быть отличными от нуля только чисто пространственные компоненты ее тензора спина [31] (обзор трудов Френкеля по классической теории спина можно найти в работе [32]).

Используя равенство (48) и известные формулы преобразования Лоренца компонент антисимметричного тензора при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, получаем

$$s_x = \text{ch } \alpha \cdot s_{0x}, \quad s_y = \text{ch } \alpha \cdot s_{0y}, \quad s_z = s_{0z}, \quad (51)$$

где вектор $\mathbf{s}_0$ относится к системе покоя конечного нуклона, вектор $\mathbf{s}$ – к выбранной нами лабораторной системе отсчета.

Подставляя в формулу (44) вместо оператора B последовательно операторы iI^{23} , iI^{31} и iI^{12} с учетом их действия на векторы канонического базиса и принимая во внимание формулы (42), (45), (46), (19)–(21) и (17), имеем

$$\begin{aligned} s_x &= N^2 \sum_{\lambda', m_1} \operatorname{Re}[(\mathcal{M}_{\frac{1}{2}m_1}^{\lambda'})^* \mathcal{M}_{-\frac{1}{2}m_1}^{\lambda'}] D(\alpha), \\ s_y &= N^2 \sum_{\lambda', m_1} \operatorname{Im}[(\mathcal{M}_{\frac{1}{2}m_1}^{\lambda'})^* \mathcal{M}_{-\frac{1}{2}m_1}^{\lambda'}] D(\alpha), \\ s_z &= \frac{N^2}{2} \sum_{\lambda', m_1} [|\mathcal{M}_{\frac{1}{2}m_1}^{\lambda'}|^2 - |\mathcal{M}_{-\frac{1}{2}m_1}^{\lambda'}|^2], \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$D(\alpha) = D_0^{-1} \sum_{\tau', \tau \in S_0} \sum_l (u_{\tau'l\frac{1}{2}}(\alpha) \xi_{\tau'l\frac{1}{2}}, (l+1/2) u_{\tau l-\frac{1}{2}}(\alpha) \xi_{\tau l\frac{1}{2}}). \quad (53)$$

Выкладки, опирающиеся на соотношения (52), (22), (41), (23), (27), (28) и (33)–(37), дают следующие результаты:

$$\begin{aligned} s_x &= 8N^2 \xi_{\parallel} \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 \frac{\tau}{C^2} \sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} G_E G_M D(\alpha), \\ s_y &= 0, \\ s_z &= -4N^2 \xi_{\parallel} \left(\frac{e^2}{q^2} \right)^2 \frac{(E+E')\tau}{MC^2} \sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}} G_M^2. \end{aligned} \quad (54)$$

Принимая во внимание формулы (51) и выражение вектора поляризации через спин покоя фермиона ($\mathbf{P} = 2\mathbf{s}_0$), получаем отсюда

$$\frac{G_E}{G_M} = -\frac{P_x}{P_z} \cdot \frac{E+E'}{2M} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha}{D(\alpha)} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (55)$$

Докажем теперь, что для любого из рассматриваемых нами представлений S_0 группы $L_+^{\uparrow}$ справедливо равенство

$$D(\alpha) = \operatorname{ch} \alpha. \quad (56)$$

Введем 4-векторный оператор L^{μ} , который для каждого из неприводимых представлений $(\pm 1/2, l_1)$, принадлежащего S_0 , имеет только одно зацепление, а именно с представлением $(\mp 1/2, l_1)$. Положим все произвольные константы, сопоставляемые в общем случае оператору L^0 , равными единице. Тогда (см. формулы (I.20) и (I.21))

$$L^0 \xi_{(\pm \frac{1}{2}, l_1) l m} = (l+1/2) \xi_{(\mp \frac{1}{2}, l_1) l m}. \quad (57)$$

Введем также такой полярный 4-вектор ζ , у которого в выбранной нами лабораторной системе отсчета только временная компонента не равна нулю: $\zeta_0 = 1$, $\zeta_i = 0$,

$i = 1, 2, 3$. В системе покоя конечного нуклона, переходу к которой соответствует элемент g_0^{-1} группы $L_+^\uparrow$, имеем

$$\zeta' = \{\zeta'_0, \zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3\} = \{\text{ch } \alpha, 0, 0, \text{sh } \alpha\}. \quad (58)$$

Обращаясь к соотношениям (53), (57), (25), (16), (20), (21), с учетом релятивистской инвариантности билинейной формы и соотношений (I.13) и (58) получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= D_0^{-1} \sum_{l'_0, l'_1} \sum_{l_1} \sum_{l_0=-1/2}^{1/2} \sum_{l', l} (u_{(l'_0, l'_1) l \frac{1}{2}}(\alpha) \xi_{(l'_0, l'_1) l' \frac{1}{2}}, (l+1/2) r u_{(-l_0, l_1) l \frac{1}{2}}(\alpha) \xi_{(l_0, l_1) l \frac{1}{2}}) = \\ &= D_0^{-1} r \sum_{l'_0, l'_1} \sum_{l_1} \sum_{l_0=-1/2}^{1/2} \sum_{l', l} (u_{(l'_0, l'_1) l \frac{1}{2}}(\alpha) \xi_{(l'_0, l'_1) l' \frac{1}{2}}, L^\mu \zeta_\mu u_{(-l_0, l_1) l \frac{1}{2}}(\alpha) \xi_{(-l_0, l_1) l \frac{1}{2}}) = \\ &= D_0^{-1} r (\psi_m(p), L^\mu \zeta_\mu \psi_m(p)) = \\ &= D_0^{-1} r (\psi_m(p_0), S(g_0^{-1}) L^\mu \zeta_\mu S^{-1}(g_0^{-1}) \psi_m(p_0)) = \\ &= D_0^{-1} r (\psi_m(p_0), L^\mu \zeta'_\mu \psi_m(p_0)) = \\ &= D_0^{-1} r (\psi_m(p_0), [\text{ch } \alpha \cdot L^0 + \text{sh } \alpha \cdot L^3] \psi_m(p_0)). \end{aligned} \quad (59)$$

К тому же из предпоследнего равенства в (59) и формулы (17), из инвариантности билинейной формы относительно пространственных отражений, из соотношения (I.13), в котором берется $S(g) = P^{-1}$, и из (58) следует, что

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= D_0^{-1} r (P \psi_m(p_0), L^\mu \zeta'_\mu P \psi_m(p_0)) = \\ &= D_0^{-1} r (\psi_m(p_0), P^{-1} L^\mu \zeta'_\mu P \psi_m(p_0)) = \\ &= D_0^{-1} r (\psi_m(p_0), [L^0 \zeta'_0 - L^i \zeta'_i] \psi_m(p_0)) = \\ &= D_0^{-1} r (\psi_m(p_0), [\text{ch } \alpha \cdot L^0 - \text{sh } \alpha \cdot L^3] \psi_m(p_0)). \end{aligned} \quad (60)$$

Сравнивая конечные результаты в цепочках (59) и (60), имеем

$$(\psi_m(p_0), L^3 \psi_m(p_0)) = 0 \quad (61)$$

и, следовательно, учитывая (45), получаем

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= \text{ch } \alpha \cdot D_0^{-1} r (\psi_m(p_0), L^0 \psi_m(p_0)) = \\ &= \text{ch } \alpha \cdot D_0^{-1} \sum_{l'_0, l'_1} \sum_{l_1} \sum_{l_0=-1/2}^{1/2} (u_{(l'_0, l'_1) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}(0) \xi_{(l'_0, l'_1) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}, r u_{(l_0, l_1) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}(0) \xi_{(-l_0, l_1) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}) = \\ &= \text{ch } \alpha \cdot D_0^{-1} \sum_{l'_0, l'_1} \sum_{l_1} \sum_{l_0=-1/2}^{1/2} (u_{(l'_0, l'_1) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}(0) \xi_{(l'_0, l'_1) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}, u_{(-l_0, l_1) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}(0) \xi_{(-l_0, l_1) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}) = \\ &= \text{ch } \alpha \cdot D_0^{-1} (\psi_m(p_0), \psi_m(p_0)) = \text{ch } \alpha, \end{aligned} \quad (62)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, каким бы из недираковских представлений S_0 ни описывался нуклон, справедлива одна и та же формула (2), полученная ранее для дираковских нуклонов.

Рассмотрим частный случай равенства (56), когда представление S_0 является прямой суммой двух неприводимых конечномерных представлений собственной группы Лоренца вида $\tau^* \oplus \tau = (-1/2, 1/2 + n) \oplus (1/2, 1/2 + n)$, где n – любое целое положительное число. Можно положить [24]

$$a_{\tau^* \tau}(l) = (-1)^{l-1/2}. \quad (63)$$

Зафиксируем в согласии с соотношениями (16) и (17) следующие значения компонент векторов состояния $\psi_m(p_0)$:

$$u_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + n) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}(0) = u_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + n) \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}(0) = r u_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + n) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}(0) = r u_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + n) \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (64)$$

Тогда $D_0 = r$, а равенство (56) с учетом формул (53), (45), (25), (63), (20) и (21) принимает вид

$$\sum_{l=1/2}^{n-1/2} (-1)^{l-1/2} (l+1/2) \left[\left| A_{l \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + n)}(\alpha) \right|^2 + \left| A_{l \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + n)}(-\alpha) \right|^2 \right] = 2 \operatorname{ch} \alpha. \quad (65)$$

Это тождество для конечных преобразований собственной группы Лоренца при $n = 1, 2, \dots, 5$ мы вначале обнаружили и проверили напрямую, зная явный вид подходящих матричных элементов.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Полученные нами результаты относительно поляризаций недираковской частицы со спином покоя $1/2$ не были интуитивно ожидаемыми, скорее наоборот. Наши исходные прикидки строились на том, что вектор состояния такой частицы, относимый, например, к представлению $S^{3/2}$ (5) группы $L_+^\uparrow$, в лабораторной системе отсчета будет обладать всеми полуцелыми значениями спина. Казалось бы, в этой ситуации среднее значение проекции спина на любое направление, отличное от направления импульса частицы, вдоль которого оно одинаково и в системе покоя, и в лабораторной системе, должно зависеть как от скорости частицы, так и от конкретного распределения компонент ее вектора состояния (15) по неприводимым представлениям, входящим в $S^{3/2}$. Эти априорные суждения перечеркиваются замечательным соотношением (56), предугадать существование которого без детального анализа было невозможно.

Настоящей работой мы внесли полную ясность в один из аспектов теоретических основ экспериментов по упругому рассеянию электронов на протонах, установив непричастность свободы в приписывании нуклону того или иного представления собственной группы Лоренца к противоречию в результатах поляризационных и неполяризационных экспериментов, извлекаемых соответственно с помощью формул (2) и (1).

Может быть, в некоторой другой публикации автор обрисует ряд проблем, касающихся другого аспекта теоретических основ поляризационных экспериментов [1]–[5], а именно справедливость уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди для поворота спина релятивистского нуклона при его движении в однородном магнитном поле. Магнитное поле между двумя мишенями является необходимым элементом для измерения продольной компоненты поляризации протона отдачи, так как само по себе вторичное рассеяние протонов позволяет извлекать только ее поперечные компоненты.

Продольная же компонента поляризации обнаруживает себя, благодаря вращению спина, в определенном изменении поперечной компоненты P_x (в плоскости импульсов электронов и протона отдачи) и в появлении компоненты P_y (в направлении, перпендикулярном названной плоскости), которая после рассеяния электрона была нулевой (см. второе равенство в (54)).

Благодарности. Автор очень признателен С.П. Баранову и В.Е. Троицкому за многочисленные стимулирующие обсуждения проблем, затронутых в настоящей работе.

Список литературы

- [1] M. K. Jones, K. A. Aniol, F. T. Baker et al., *Phys. Rev. Lett.*, **84**:7 (2000), 1398–1402.
- [2] O. Gayou, K. Wijesooriya, A. Afanasev et al., *Phys. Rev. C*, **64**:3 (2001), 038202.
- [3] O. Gayou, K. A. Aniol, T. Averett et al., *Phys. Rev. Lett.*, **88**:9 (2002), 092301.
- [4] V. Punjabi, C. F. Perdrisat, K. A. Aniol et al., *Phys. Rev. C*, **71**:5 (2005), 055202.
- [5] M. K. Jones, A. Aghalaryan, A. Ahmidouch et al., *Phys. Rev. C*, **74**:3 (2006), 035201.
- [6] M. E. Christy, A. Ahmidouch, C. S. Armstrong et al., *Phys. Rev. C*, **70**:1 (2004), 015206.
- [7] I. A. Qattan, J. Arrington, R. E. Segel, et al., *Phys. Rev. Lett.*, **94**:14 (2005), 142301.
- [8] M. N. Rosenbluth, *Phys. Rev.*, **79**:4 (1950), 615–619.
- [9] J. Arrington, *Phys. Rev. C*, **68**:3 (2003), 034325.
- [10] А. И. Ахиезер, М. П. Рекало, *ЭЧАЯ*, **4**:3 (1973), 662–688.
- [11] P. A. M. Guichon, M. Vanderhaeghen, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:14 (2003), 142303.
- [12] P. G. Blunden, W. Melnitchouk, J. A. Tjon, *Phys. Rev. C*, **72**:3 (2005), 034612.
- [13] A. V. Afanasev, S. J. Brodsky, C. E. Carlson, Y.-C. Chen, M. Vanderhaeghen, *Phys. Rev. D*, **72**:1 (2005), 013008.
- [14] S. Kondratyuk, P. G. Blunden, W. Melnitchouk, J. A. Tjon, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:17 (2005), 172503.
- [15] S. Kondratyuk, P. G. Blunden, *Phys. Rev. C*, **75**:3 (2007), 038201.
- [16] L. W. Mo, Y. S. Tsai, *Rev. Modern Phys.*, **41**:1 (1969), 205–235.
- [17] E. Aprile-Giboni, R. Hausammann, E. Heer et al., *Nucl. Instrum. Methods Phys. Research*, **215**:1–2 (1983), 147–157.
- [18] V. Bargmann, L. Michel, V. L. Telegdi, *Phys. Rev. Lett.*, **2**:10 (1959), 435–436.
- [19] D. R. Yennie, M. M. Levy, D. G. Ravenhall, *Rev. Modern Phys.*, **29**:1 (1957), 144–157.
- [20] L. N. Hand, D. G. Miller, R. Wilson, *Rev. Modern Phys.*, **35**:2 (1963), 335–349.
- [21] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, *ЖЭТФ*, **18** (1948), 703–733.
- [22] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения*, Физматгиз, М., 1958.
- [23] L. M. Slad, *Modern Phys. Lett. A*, **15**:5 (2000), 379–389.
- [24] Л. М. Сладь, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 68–86.
- [25] Л. М. Сладь, *ТМФ*, **133**:1 (2002), 54–68.
- [26] Л. М. Сладь, *ТМФ*, **142**:1 (2005), 21–36.
- [27] E. Abers, I. T. Grodsky, R. E. Norton, *Phys. Rev.*, **159**:5 (1967), 1222–1227.
- [28] Л. М. Сладь, *ТМФ*, **2**:1 (1970), 67–72.
- [29] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1981.
- [30] W.-M. Yao, C. Amsler, D. Asner et al., *J. Phys. G*, **33**:1 (2006), 1–1232.
- [31] J. Frenkel, *Zs. Phys.*, **37**:4–5 (1926), 243–262.
- [32] В. А. Бордовицын, И. М. Тернов, *УФН*, **132**:10 (1980), 345–352.