Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Ахметьев, О. В. Кунаковская, В. А. Кутвицкий,
Замечание о диссипации интеграла магнитной спираль-
ности, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 1, 150–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 07:25:50

© 2009 г.

П. М. Ахметьев*, О. В. Кунаковская†,
В. А. Кутвицкий*

ЗАМЕЧАНИЕ О ДИССИПАЦИИ ИНТЕГРАЛА МАГНИТНОЙ СПИРАЛЬНОСТИ

Доказано, что интеграл токовой спиральности для тонкой магнитной трубки прямо пропорционален величине скрученности Tw силовых линий, которая входит как слагаемое в формулу Калугариану. На этой основе анализируется закон изменения магнитной спиральности в проводящей среде с ненулевым коэффициентом магнитной диффузии, а также для уравнения фазового перехода магнитного поля в условиях ранней Вселенной.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, магнитная спиральность, диссипативные эффекты, формула Калугариану, формула Фуллера, Стандартная модель.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о роли магнитной спиральности в эволюции магнитных полей в космосе является одним из центральных в современной магнитной гидродинамике космической среды. При его решении возникают разнообразные трудности: достаточно сказать, что плотность магнитной спиральности является нелокальной величиной (в нее входит векторный потенциал), а опыт работы с подобными законами сохранения в современной астрофизике практически отсутствует. В современную магнитную гидродинамику спиральность введена Моффатом и подробно рассматривалась в его монографии [1].

В настоящей работе предполагается, что пространство подразделено на конечное семейство попарно непересекающихся полноториев, называемых магнитными трубками, внутри которых сосредоточен носитель магнитного поля, и область, внешнюю по отношению к этим трубкам. Понятие магнитной трубки хорошо известно, оно играет первостепенную роль при изучении магнитных полей [2]. Для удобства читателя мы определяем это понятие в разделе 2.

*Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН, г. Троицк, Московская обл., Россия.
E-mail: pmakhmet@mi.ras.ru, vak144@yandex.ru

†Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия. E-mail: ovk@math.vsu.ru

Безусловно, важное значение имеет задача анализа магнитного поля в случае, если силовые линии поля не структурируются в трубки, а формируют более сложную трехмерную среду. Эта проблема многоаспектна, не проста и в настоящей работе не рассматривается. Впервые она была рассмотрена в работе [3] (см. также учебник [4]).

Магнитная спиральность для системы трубок прежде всего требует изучения внутренних (локальных) характеристик поля в каждой трубке: поток Φ поля через трансверсальное сечение трубки и скрученность Tw поля относительно центральной линии трубки. Кроме того, требуется изучить пространственное расположение каждой трубки (ее заузленность и, в частности, величину Wr перекручивания центральной линии), а также взаимное расположение системы трубок в пространстве. Простейшей числовой характеристикой их взаимного расположения служит коэффициент зацепления центральных линий C , C' выбранной пары магнитных трубок, который вычисляется с помощью интеграла Гаусса

$$\text{lk}(C, C') = \frac{1}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \left[\frac{dx(t)}{dt} \frac{dy(s)}{ds} \right] \cdot \frac{x(t) - y(s)}{|x(t) - y(s)|^3} dt ds.$$

Эта интегральная формула была предложена Гауссом без доказательства в работе [5]. Согласно специальным историческим исследованиям [6] Гаусс интересовался числом зацепления земной орбиты с орбитами астероидов. Его аргументация вполне может быть изложена на современном математическом языке (см., например, [3]). Более того, в среде специалистов есть убеждение (см., например, [7]), что Гаусс знал другое, электродинамическое, доказательство этой формулы: пропустить ток через первую петлю и вычислить циркуляцию магнитного поля по второй петле. В силу закона Ампера эта циркуляция равна полному току, ограниченному второй петлей, который равен току, протекающему вдоль первой петли, умноженному на число зацепления этих петель. Применив формулу Био–Савара для магнитного поля

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\mathbf{B}(x') \frac{x - x'}{|x - x'|^3} \right] dx',$$

получаем интеграл зацепления Гаусса, а точнее, величину, которая называется магнитной спиральностью. Поэтому вполне можно сказать, что идея рассмотрения спиральности для магнитного поля принадлежит Гауссу. Тем не менее в этой связи еще часто упоминаются Гельмгольц и Кельвин (см. [8]).

В бесконечном пространстве спиральность может быть введена для любого бездивергентного поля с правильными граничными условиями на бесконечности.

В 50-е годы XX века вопросы, связанные со спиральностью в идеальной МГД, изучались в работах [9], [10]. Явное выражение спиральности $H = 2n\Phi_1\Phi_2$ магнитного поля, носитель которого заключен в двух трубках с потоками Φ_1 , Φ_2 , через интеграл зацепления Гаусса $n = \text{lk}(C, C')$, было получено в работах [11], [12]. Название “магнитная спиральность” для величины H было введено Моффатом [12]. В предположении, что силовые линии магнитного поля $\mathbf{B}$ замкнуты, в [12] (см. также [13]) магнитная спиральность была интерпретирована как среднее попарное зацепление силовых линий поля $\mathbf{B}$. Этому вопросу посвящена работа [14], которую следует считать “мостиком” между теорией узлов и магнитной гидродинамикой.

Целью настоящей работы является изучение геометрического и топологического смысла токовой спиральности

$$\chi^c = \int \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} dx$$

(см. теорему в разделе 4) и ее физического проявления. Эта задача важна в первую очередь потому, что с помощью токовой спиральности формулируется закон изменения магнитной спиральности χ^m в диссипативной среде: $d\chi^m/dt = -2\eta\chi^c$. Это соотношение хорошо известно (см., например, [1], [4], [14]). В настоящей работе приводится его подробный вывод в лемме 1 (см. раздел 3).

Наш подход к этой задаче основан на анализе Моффата и Рико [15] формулы Калугариану [16], [17], позволяющей представить магнитную спиральность в виде

$$\chi^m = (Tw + Wr)\Phi^2.$$

В разделе 4, записав с помощью локальных цилиндрических координат (r, λ, z) компоненты магнитного поля в виде

$$\mathbf{B}(r, \lambda, z) = \left(0, \frac{2\pi r}{L} \kappa \theta(r), \theta(r)\right),$$

мы интерпретируем величину Tw скручивания магнитной трубки длины L с помощью коэффициента скручивания κ :

$$Tw = \kappa.$$

Полученная в настоящей работе приближенная формула $\chi^c \approx 2\rho Tw \Phi^2$ (ср. формулу (10) в разделе 4) показывает, что спиральность силовых линий поля плотности тока $\mathbf{j}$ пропорциональна скручиванию Tw силовых линий магнитного поля $\mathbf{B}$. На этой основе удалось выяснить геометрическую причину изменения магнитной спиральности в среде с ненулевым коэффициентом магнитной проницаемости η . Известно, что в диссипативной среде магнитная спиральность убывает (см. приведенную выше формулу для $d\chi^m/dt$). Однако теперь мы можем сказать, что магнитная спиральность убывает тем быстрее, чем более скручены силовые линии магнитного поля $\mathbf{B}$ в трубках (см. далее формулу (12) в разделе 4). При этом величина Wr не влияет на скорость диссипации магнитной спиральности.

В разделе 5 мы рассматриваем обобщение магнитной гидродинамики, предложенное в [18]. Речь идет о модификации уравнения Фарадея с целью учета слабых взаимодействий. В этом случае для эволюции спиральности справедлива формула (14). По нашему мнению, другие важные следствия, вытекающие из работы [18], могут быть дополнительно найдены в последующих исследованиях.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ МАГНИТНЫХ ТРУБОК

Пусть $V = D^2(r_0) \times \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^3$ – бесконечный открытый цилиндр в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, снабженный цилиндрической системой координат (r, λ, z) , где $0 \leq r < r_0$. Рассмотрим сдвиг $t: V \rightarrow V$, определенный в выбранной системе координат формулой $t(r, \lambda, z) = (r, \lambda + \lambda_0, z + z_0)$ при некоторых фиксированных значениях

констант λ_0, z_0 (удобно считать, что $z_0 = 2\pi$). В этом случае определен полноторий $U = V/t$, который служит базой циклического накрытия $V \rightarrow U$. Многообразие U наделяется римановой метрикой, индуцированной стандартной метрикой цилиндра V . Индуцированные координаты на U обозначим так же, как и координаты на V с учетом неоднозначности при факторизации.

Определим на V инвариантное при трансляции вдоль вертикальной оси z векторное поле $\mathbf{B}^V: V \rightarrow \mathbb{R}^3$, полагая $\mathbf{B}^V(r, \lambda, z) = (0, 0, \theta(r))$. При этом считаем, что задана функция интенсивности поля $\mathbf{B}^V$ – гладкая невозрастающая функция $\theta: [0, +\infty) \rightarrow [0, \theta_0]$, где $\theta_0 > 0$, $\theta_0 = \theta(0) \geq \theta(r) \geq \theta(r_0) = 0$, $r \in [0, +\infty)$ (см. рисунок).

Очевидно, что $\operatorname{div}(\mathbf{B}^V) = 0$, $\operatorname{rot}(\mathbf{B}^V) = (0, -\theta'(r), 0)$. Поскольку поле $\mathbf{B}^V$ инвариантно при сдвиге t , при проекции $V \rightarrow U$ поле $\mathbf{B}^V$ факторизуется до бездивергентного (в другой терминологии, соленоидального) векторного поля $\mathbf{B}$ на U . Поля $\mathbf{B}$ и $\operatorname{rot}(\mathbf{B}^V)$ являются касательными к краю трубки U . Кроме того, очевидно, они касательны к краю каждой из вложенных коаксиальных трубок $U(r) = V(r)/t$ радиуса r , $0 < r < r_0$, $V(r) = D^2(r) \times \mathbb{R}^1 \subset V$.

Образ произвольного гладкого вложения $\iota: U \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, сохраняющего объем, будем называть *магнитной трубкой*. По определению она представляет собой (возможно, заузленный) полноторий (далее также обозначаемый через U), снабженный векторным полем $\iota_*(\mathbf{B})$ (далее его будем обозначать $\mathbf{B}$), касающимся края магнитной трубки. Предположим, что наибольший радиус поперечного сечения трубки U много меньше наименьшего радиуса кривизны ее центральной линии (в дальнейшем такую трубку будем называть тонкой).

При этом *поток* (или *интенсивность*) бездивергентного векторного поля $\mathbf{B}$ в трубке U назовем числом Φ , равное потоку векторного поля $\mathbf{B}$ через любое трансверсальное сечение трубки U . В нашем случае получаем

$$\Phi = 2\pi \int_0^{r_0} r\theta(r) dr.$$

При условии $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ определен вектор-потенциал $\mathbf{A}$ поля $\mathbf{B}$: $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Потребуем, чтобы

$$\mathbf{A}(r) \sim r^{-2} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (1)$$

В общем случае, как известно, вектор-потенциал определен с точностью до калибровочного преобразования $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } f$, где $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная гладкая функция. Кулоновская калибровка $\text{div } \mathbf{A} = 0$ и граничные условия (1) определяют (нелокальное) векторное поле $\mathbf{A}$ однозначно.

Вектор-потенциал $\mathbf{A}_0^V$ поля $\mathbf{B}^V$ внутри бесконечной прямой трубки V можно определить стандартным способом по формуле

$$\mathbf{A}_0^V = (0, A_\lambda(r), 0), \quad A_\lambda(r') = \frac{1}{r'} \int_0^{r'} r \theta(r) dr.$$

Отметим, что $\mathbf{A}_0^V$ на боковой поверхности бесконечной трубки V не обращается в нуль, но на центральной линии трубки $\mathbf{A}_0^V$ обращается в нуль и не имеет особенностей в окрестности этой центральной линии.

Легко получить явную формулу вектор-потенциала $\mathbf{A}$ поля $\mathbf{B}$ во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для вектор-потенциала $\mathbf{A}$ при ограничении на U имеем разложение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \text{grad } \phi_0 + \text{grad } \phi,$$

где ϕ_0 – линейная функция, которая зависит лишь от координаты z , ϕ – произвольная гладкая t -периодическая функция с нулевым средним значением.

Векторное поле $\mathbf{A}_0^V$ на V инвариантно относительно сдвига t и факторизуется до поля $\mathbf{A}_0$ в трубке U , для которого $\text{rot}(\mathbf{A}_0) = \mathbf{B}$. Поэтому предыдущую формулу можно также применить для замкнутой магнитной трубки. При этом потенциал ϕ_0 становится линейной многозначной функцией, а однозначная функция ϕ удовлетворяет уравнению

$$\oint \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{l} = 0$$

при интегрировании по центральной линии $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\nu)$ трубки U , $\nu = z \pmod{z_0}$, $0 \leq \nu \leq z_0$.

3. ОБ УРАВНЕНИЯХ И ИНТЕГРАЛАХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКИ

В МГД-приближении электромагнитное поле в проводящей жидкой движущейся среде определяется системой уравнений [19]:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{B}]}{c} \right), \quad (5)$$

где σ – проводимость среды, $\mathbf{E}$ – электрическое поле, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ – соответственно напряженность магнитного поля и его магнитная индукция, $\mathbf{j}$ – плотность тока, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – скорость движения среды. Уравнение (2) выражает закон Фарадея, уравнение (3) – закон Био–Савара, а уравнение (5) – закон Ома.

Рассмотрим однородную среду с постоянными проводимостью σ и магнитной проницаемостью $\mu \equiv 1$. В этом случае $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ и с учетом уравнений (2), (5) и (3) получаем уравнение индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] - \eta \text{rot rot } \mathbf{B}, \quad (6)$$

где $\eta = c^2/(4\pi\sigma)$ – коэффициент магнитной диффузии.

В случае $\eta = 0$ среда называется *идеальной*, а из уравнения (6) следует “вмороженность” магнитного поля $\mathbf{B}$, т.е. в идеальном случае уравнение (6) эквивалентно уравнению $(\partial/\partial t + \mathcal{L}_{\mathbf{v}})B^{(2)} = 0$ для 2-формы $B^{(2)} = i_{\mathbf{B}}\mu$, ассоциированной с векторным полем $\mathbf{B}$ при помощи выбранной формы объема μ . Для краткости записи положим далее $c = 1$.

Определим калибровочно инвариантные псевдоскалярные величины: интеграл *магнитной спиральности*

$$\chi^{\text{m}} = \int_U \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dx$$

и интеграл *токовой спиральности*

$$\chi^{\text{c}} = \int_U \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{B} \, dx.$$

Последний интеграл можно также записать в силу (3) как

$$\chi^{\text{c}} = 4\pi \int_U \mathbf{B} \cdot \mathbf{j} \, dx.$$

ЛЕММА 1. *Справедливо тождество*

$$\frac{d\chi^{\text{m}}}{dt} = -2\eta\chi^{\text{c}}. \quad (7)$$

В частности, в предположении $\eta = 0$ интеграл χ^{m} сохраняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Закон сохранения χ^{m} в идеальном случае вытекает из формулы (7) при $\eta = 0$. Докажем эту формулу. Переходя к потенциалам в формуле (2), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} - \text{grad } \varphi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (-\mathbf{E} - \text{grad } \varphi) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \\ &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \text{div}(\varphi \mathbf{B}) - \text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{A}] - \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \text{div}(-\varphi \mathbf{B} - [\mathbf{E}, \mathbf{A}]). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d\chi^{\text{m}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_U \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dx = -2 \int_U \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \, dx. \quad (8)$$

Учитывая уравнения (5) и (3), находим $\mathbf{E}$ по формуле

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v}, \mathbf{B}] + \eta \text{rot } \mathbf{B}.$$

Подставив это выражение в уравнение (8), получаем

$$\frac{d\chi^m}{dt} = 2 \int_U ([\mathbf{v}, \mathbf{B}] - \eta \operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} dx = -2\eta \int_U \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} dx = -2\eta \chi^c.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Выражение для скорости диссипации магнитной спираальности, указанное в лемме 1, хорошо известно (см., например, [1], [4], [14]). Доказательство здесь приводится для удобства читателя. Кроме того, оно потребуется нам при обсуждении в разделе 5 формулы (14) – аналога формулы (7) для крупномасштабного магнитного поля ранней Вселенной, описывающей скорость роста спираальности при учете слабых взаимодействий.

4. ЭВОЛЮЦИЯ МАГНИТНЫХ ТРУБОК ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОЙ ДИФФУЗИИ

Нашей целью в этом разделе является выяснение топологического и физического смысла интеграла токовой спираальности χ^c .

Напомним, что величина скручивания трубки Tw вычисляется по формуле

$$\operatorname{Tw} = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[\mathbf{u}(s), \frac{d\mathbf{u}(s)}{ds} \right] \cdot \mathbf{t}(s) ds,$$

где $\mathbf{t}(s)$ – касательный вектор единичной длины к $C = l$ – центральной линии магнитной трубки U с натуральной параметризацией $\mathbf{a} = \mathbf{a}(s)$; $\mathbf{u}(s)$ – единичный вектор нормали к центральной линии, восстановленный в направлении другой силовой линии C' магнитного поля, располагающейся на коаксиальной магнитной торической поверхности радиуса r , $0 < r < r_0$, в трубке U (т.е. $\mathbf{u}(s)$ – образующая рассматриваемой линейчатой поверхности с направляющей $\mathbf{a}(s)$); силовая линия C' записывается в виде $\mathbf{a}(s) + r\mathbf{u}(s)$.

Напомним также, что величина перекручивания трубки Wr определяется только поведением центральной линии l и задается интегралом:

$$\operatorname{Wr} = \frac{1}{4\pi} \oint_C \oint_C \left[\frac{d\mathbf{a}(s)}{ds}, \frac{d\mathbf{a}(s')}{ds'} \right] \cdot \frac{\mathbf{a}(s) - \mathbf{a}(s')}{|\mathbf{a}(s) - \mathbf{a}(s')|^3} ds ds'.$$

Величина Wr была введена Калугариану [16], [17], а Tw была введена Фуллером [20].

Величины Tw и Wr в отличие от коэффициента зацепления не являются топологически инвариантными, но, как следует из интегральных выражений, при непрерывной деформации трубки они меняются непрерывно.

Спиральность χ^m поля $\mathbf{B}$ в замкнутой трубке U можно представить в виде (см. [4], [14], [15], [21])

$$\chi^m = \operatorname{lk}(C, C') \Phi^2 = (\operatorname{Tw} + \operatorname{Wr}) \Phi^2. \quad (9)$$

Можно сказать, что в МГД формула (9) для магнитной спираальности χ^m является аналогом геометрической формулы Калугариану [16], [17] и, более того, ее также принято называть формулой Калугариану.

Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Для трубки со средним радиусом r_0 нормального сечения справедлива оценка

$$\chi^c \approx \frac{4}{r_0^2} \text{Tw} \Phi^2. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай магнитного поля, имеющего (r, λ, z) -компоненты

$$\mathbf{B}^V = \left(0, \frac{2\pi r}{L} \kappa \theta(r), \theta(r) \right) \quad (11)$$

в бесконечно длинной прямой трубке V радиуса r_0 . В уравнении (11) константа L в дальнейшем будет соответствовать длине трубки, $\theta(r)$ – функция интенсивности поля $\mathbf{B}^V$ внутри трубки (график которой показан на рисунке), $\kappa > 0$ – коэффициент скручивания трубки вокруг центральной оси. В цилиндрической системе координат (r, λ, z) трубка V может быть задана следующими условиями: $0 \leq r < r_0$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Из (11) следует вид компонент поля $\text{rot } \mathbf{B}^V$:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{B}^V)_r &= 0, & (\text{rot } \mathbf{B}^V)_\lambda &= -\theta'(r), \\ (\text{rot } \mathbf{B}^V)_z &= 4 \frac{\pi \kappa}{L} \theta(r) + r \frac{2\pi \kappa}{L} \theta'(r). \end{aligned}$$

Обозначив через S трансверсальное сечение трубки, заданное по формуле $z = z_0$, получаем

$$\int_S \mathbf{B}^V \cdot \text{rot } \mathbf{B}^V r dr d\lambda \approx 4\pi^2 \frac{\kappa}{L} \theta_0^2 r_0^2.$$

Учитывая для потока вектора $\mathbf{B}$ через трансверсальное сечение S трубки U приближенную оценку $\Phi \approx \pi r_0^2 \theta_0$, получаем приближенное равенство

$$\int_S \mathbf{B}^V \cdot \text{rot } \mathbf{B}^V r dr d\lambda \approx \frac{4}{L r_0^2} \kappa \Phi^2.$$

Осталось заметить, что на отрезке трубки длины L значение κ совпадает с интегралом Tw , что доказывает формулу (10) для прямой магнитной трубки.

Рассмотрим теперь общий случай трубки, полученной как образ $\iota(U) \subset \mathbb{R}^3$ стандартной трубки при помощи вложения ι , сохраняющего объем. Обозначим через L длину центральной линии и предположим, что трубка достаточно тонкая (по отношению к кривизне центральной линии).

В соответствии с результатами работы [15] поле $\mathbf{B}$ в трубке U разлагается в сумму $\mathbf{B} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_m$, где $\mathbf{B}_a$ – поле, параллельное касательному вектору к центральной линии трубки, $\mathbf{B}_m$ – поле в плоскости нормального сечения, перпендикулярное такому касательному вектору. Удобно ввести векторное поле ξ вдоль центральной линии, перпендикулярное этой линии, такое, что его производная по направлению касательного вектора к центральной линии равна нулю.

Разрежем трубку на бесконечно большое число Δ цилиндрических участков длины $L_k = L/\Delta$, $k = 1, 2, \dots, \Delta$. В каждом бесконечно тонком цилиндре введем цилиндрическую систему координат, связанную с полем ξ и сделаем предыдущие

вычисления. Поскольку поправка на кривизну и кручение трубки имеют более высокий порядок малости, чем точность вычисления, бесконечно тонкую трубку можно считать плоской. Оценка (10) доказана.

Итак, можно оценить полученный результат с точки зрения МГД следующим образом: формула (10) для токовой спиральности дополняет формулу (7) для магнитной спиральности. Мы видим, в частности, что токовая спиральность не зависит от значения величины Wt и равна нулю при нулевом значении скрученности Tw магнитных силовых линий.

Теперь, используя формулу (7), получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место следующее приближенное равенство:*

$$\frac{d\chi^m}{dt} \approx -\eta\rho Tw \Phi^2, \quad (12)$$

где $\rho = 2/r_0^2$.

С физической точки зрения равенство (12) означает, что в присутствии магнитной диффузии ($\eta \neq 0$) магнитные трубки раскручиваются относительно центральной оси (магнитная спиральность χ^m убывает), причем скорость раскручивания магнитной трубки, определяемая значением правой части равенства (12), пропорциональна среднему значению скручивания, которое определяется левой частью равенства. Перемещение трубки без раскручивания происходит в идеальном случае (т.е. при $\eta = 0$), при этом разложение в сумму $\chi^m = (Wt + Tw)\Phi^2$ для трубки сохраняется. Как следует из формулы (12), при ненулевом значении магнитной диффузии η магнитная трубка раскручивается за счет изменения первого слагаемого Wt , которое не компенсируется изменением второго слагаемого Tw . Скорость раскручивания трубки прямо пропорциональна коэффициенту магнитной диффузии и значению интеграла Tw , который является мерой скручивания магнитной трубки.

5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Этот раздел посвящен приложению наших оценок к геометрическому объяснению роста напряженности крупномасштабного магнитного поля в ранней Вселенной (на лептонной стадии).

Напомним, что в недавней работе Семикоза и Соколова [18] в рамках Стандартной модели с нейтрино и антинейтрино предложен бесстолкновительный механизм продуцирования магнитной спиральности через коллективное взаимодействие нейтрино и горячей электрон-позитронной плазмы. В такой модели имеет место обобщенное уравнение индукции (см., например, [22]), описывающее эволюцию среднего магнитного поля с α -эффектом,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] + \alpha \text{rot } \mathbf{B} - \eta \text{rot rot } \mathbf{B}.$$

Это уравнение получается, как и уравнение (6), из (2) и (3), но в выражении для напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ кроме слагаемых, входящих в уравнение (5), дополнительно учтен вклад слабых взаимодействий $\mathbf{E}_{\text{weak}} = -\alpha \mathbf{B}$ (см. [23]), т.е.

$$\mathbf{E} = 4\pi\eta\mathbf{j} - [\mathbf{v}, \mathbf{B}] - \alpha\mathbf{B}. \quad (13)$$

В этом варианте обобщения стандартной МГД для скорости роста магнитной спиральности в [18] получен следующий аналог формулы (7):

$$\frac{d}{dt} \chi^m = -2\eta \chi^c + 2\alpha \int_U \mathbf{B}^2 dx. \quad (14)$$

Поясним, что при учете слабых взаимодействий, предложенном в выражении (13), формулу (14) можно вывести тем же стандартным способом, что и формулу (7) (а именно, изложенным в доказательстве леммы 1). При этом масштаб рассматриваемого поля сравним с горизонтом (но меньше его), и магнитные силовые линии замкнуты в области интегрирования U .

Основные результаты работы [18] сводятся к следующему. В горячей плазме ранней Вселенной, когда коэффициент α достаточно велик, магнитная спиральность принимает существенные значения (см. оценку (9) в [18]). Этот факт может объяснить формирование (прото)галактических структур в однородной и изотропной Вселенной на лептонной стадии. При остывании плазмы величина $\alpha \rightarrow 0$, продупцирование магнитной спиральности становится невозможным и фаза первичного формирования галактик и скоплений галактик должна перейти в следующую фазу их развития.

Формулу (14) можно дополнить следующей:

$$\frac{d}{dt} \int_U \mathbf{B}^2 dx = 2 \int_U \mathbf{B} \cdot \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] dx - 2\eta \int_U (\text{rot } \mathbf{B})^2 dx + 2\alpha \chi^c. \quad (15)$$

В справедливости (15) легко убедиться непосредственно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B}^2 dx &= 2 \int \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dx = 2 \int \mathbf{B} \cdot (-\text{rot } \mathbf{E}) dx = \\ &= 2 \int \mathbf{B} \cdot (-\eta \text{rot rot } \mathbf{B} + \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] + \alpha \text{rot } \mathbf{B}) dx = \\ &= -2\eta \int \mathbf{B} \cdot (\text{rot rot } \mathbf{B}) dx + 2 \int \mathbf{B} \cdot \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] dx + 2\alpha \int \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{B} dx = \\ &= 2 \int \mathbf{B} \cdot \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] dx - 2\eta \int (\text{rot } \mathbf{B})^2 dx + 2\alpha \chi^c. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что в предположении $\alpha \gg \eta$ (выполняющемся на рассматриваемой стадии развития Вселенной) второе слагаемое в формуле (15) становится пренебрежимо малым по сравнению с третьим. Третье слагаемое показывает, что энергия

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{B}^2 dx$$

магнитного поля $\mathbf{B}$ увеличивается в правозакрученных трубках пропорционально скручиванию магнитной трубки (в силу формулы (10)). При наличии достаточно большого числа правозакрученных трубок наблюдается рост космологического магнитного поля. Очевидно, это увеличивает второе слагаемое правой части формулы (15) и является дополнительным фактором увеличения магнитной спиральности в рассматриваемый период.

Благодарности. Авторы благодарят И. С. Красильщика, Д. Д. Соколова и В. Б. Семикоза за обсуждения. Работа П. М. Ахметьева частично поддержана РФФИ (грант № 08-01-00663) и фондом INTAS (грант № 05-1000008-7805).

Список литературы

- [1] H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.
- [2] Э. Прист, Т. Форбс, *Магнитное пересоединение. Магнитогидродинамическая теория и приложения*, Физматлит, М., 2005.
- [3] В. И. Арнольд, “Асимптотический инвариант Хопфа и его приложения”, *Материалы Всесоюзной школы по дифференциальным уравнениям с бесконечным числом независимых переменных и по динамическим системам с бесконечным числом степеней свободы* (Дилижан, 21 мая – 3 июня 1973 г.), АН Арм. ССР, Ереван, 1974, 229–256; *Избранное*–60, Фазис, М., 1997, 215–236.
- [4] В. И. Арнольд, Б. А. Хесин, *Топологические методы в магнитной гидродинамике*, МЦНМО, М., 2007.
- [5] C. F. Gauss, *Werke*. B. V, Springer, Göttingen, 1867.
- [6] M. Epple, *Math. Intelligencer*, **20**:1 (1998), 45–52.
- [7] D. DeTurck, H. Gluck, *The Gauss linking integral on the 3-sphere and in hyperbolic 3-space*, [arXiv: math/0406276v1](https://arxiv.org/abs/math/0406276v1).
- [8] W. Thomson, *Trans. R. Soc. Edin.*, **XXV** (1869), 217–260; W. Thomson, “Maximum and minimum energy in vortex motion”, *Mathematical and Physical Papers*. V. IV. *Hydrodynamics and General Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1910, 172–183.
- [9] L. Woltjer, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **44**:6 (1958), 489–491.
- [10] W. M. Elsasser, *Rev. Modern Phys.*, **28**:2 (1956), 135–163.
- [11] J. J. Moreau, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **252** (1961), 2810–2812.
- [12] H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.*, **35** (1969), 117–129.
- [13] H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.*, **106** (1981), 27–47.
- [14] M. A. Berger, G. B. Field, *J. Fluid Mech.*, **147** (1984), 133–148.
- [15] H. K. Moffatt, R. L. Ricca, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **439**:1906 (1992), 411–429.
- [16] G. Călugărianu, *Rev. Math. Pures Appl.*, **4** (1959), 5–20.
- [17] G. Călugărianu, *Czechoslovak Math. J.*, **11(86)** (1961), 588–625.
- [18] V. B. Semikoz, D. D. Sokoloff, *Astron. Astrophys.*, **433**:3 (2005), L53–L56.
- [19] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
- [20] F. B. Fuller, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **68**:4 (1971), 815–819.
- [21] M. R. Dennis, J. H. Hannay, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **461**:2062 (2005), 3245–3254.
- [22] А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, А. М. Шукуров, *Магнитные поля галактик*, Наука, М., 1988.
- [23] V. B. Semikoz, *Lepton MHD and magnetic field generation in SM*, [arXiv: hep-ph/0403096](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0403096).

Поступила в редакцию 10.10.2007,
после доработки 8.05.2008