Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Буаррудж, Тернарные инвариантные дифференциальные операторы, действующие на пространстве взвешенных плотностей, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 2, 165–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 11:23:26

© 2009 г.

С. Буаррудж*

ТЕРНАРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПРОСТРАНСТВЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Приведена классификация тернарных дифференциальных операторов на n -мерных многообразиях. Эти операторы действуют на пространствах взвешенных плотностей и инвариантны относительно алгебры Ли векторных полей. При $n = 1$ некоторые из них можно выразить в терминах внешнего дифференциала де Рама, скобки Пуассона, оператора Грозмана и антисимметричных операторов Фейгина–Фукса; четыре (с точностью до дуализаций и перестановок) оператора являются новыми. При $n > 1$ приведен список многомерных конформных трансвекторов, т.е. операторов, действующих на пространстве взвешенных плотностей и инвариантных относительно конформной алгебры Ли $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$, где $p+q = n$. Все эти конформно-инвариантные операторы, за исключением скалярного, не инвариантны относительно всей алгебры Ли векторных полей.

Ключевые слова: инвариантные операторы, трансвекторы, тензор плотностей, конформные структуры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть M^n – многообразие, а $\mathbf{vect}(M)$ – алгебра Ли векторных полей на M с коэффициентами, свойства которых мы укажем позднее (гладкие, полиномиальные и т.д. коэффициенты). Пусть $T(V)$ – $\mathbf{vect}(M)$ -модуль тензорных полей типа V для представления $\rho: GL(n) \rightarrow GL(V)$ (см. работы [1], [2] по поводу точного описания $\mathbf{vect}(M)$ -действия). Положим $\mathbf{vect}(n) := \mathbf{vect}(\mathbb{R}^n)$.

Все законы физики описываются операторами $D: T(V_1) \otimes \cdots \otimes T(V_k) \rightarrow T(W)$, инвариантными относительно действия алгебры $\mathbf{vect}(M)$ или какой-то ее подалгебры; этим и определяется важность таких операторов [3]. Задача классификации инвариантных операторов сформулирована Вебленом в 1928 г. на Международном конгрессе математиков в Болонье [4]. С тех пор были построены обобщения многих

*Department of Mathematical Sciences, U.A.E. University, Al-Ain, U.A.E.
E-mail: bouarroudj.sofiane@uaeu.ac.ae

операторов, известных ранее лишь для частных случаев, а также найдено несколько новых операторов.

В настоящей работе приводится список тернарных $\mathbf{vect}(1)$ -инвариантных дифференциальных операторов, действующих на тензорных полях на $\mathbb{R}$. Ясно, что пространства $T(V)$ на одномерных многообразиях имеют вид $\mathcal{F}_\lambda = \{f dx^\lambda \mid f \in \mathbb{R}[x]\}$, т.е. являются пространствами взвешенных плотностей веса $\lambda \in \mathbb{R}$.

В унарном случае в работах [4]–[6] было независимо и различными методами доказано, что имеется только один инвариантный дифференциальный оператор – *внешний дифференциал*. В частности, при $n = 1$ имеем

$$d: \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1, \quad \varphi \mapsto \varphi' dx.$$

На пространстве функций с компактным носителем или в случае, когда M компактно, имеется также недифференциальный оператор – *интеграл*:

$$\int: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathcal{F}_0, \quad \varphi dx \mapsto \int \varphi dx.$$

Все рассматриваемые ниже функции являются полиномиальными, а операторы – дифференциальными. Как описывать недифференциальные операторы, не ясно, и приведенный Кирилловым пример недифференциального оператора, отличного от интеграла (см. [1], [4]), делает ситуацию лишь более загадочной.

Заметим, что, во-первых, следующий скалярный оператор является инвариантным при любой “арности” k :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{\lambda_k} &\rightarrow \mathcal{F}_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}, \\ \varphi_1(dx)^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_k(dx)^{\lambda_k} &\mapsto \left(\prod \varphi_i \right) (dx)^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

во-вторых, каждый инвариантный дифференциальный оператор имеет постоянные коэффициенты [4]. В бинарном случае классификация (для любого n) была дана Грозманом [7]. В частности, при $n = 1$ имеем следующие операторы.

Операторы первого порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_0 &\rightarrow \mathcal{F}_1, & \varphi \otimes \psi &\mapsto (a\varphi'\psi + b\varphi\psi') dx \quad \text{при любых } a, b \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\mu &\rightarrow \mathcal{F}_{\lambda+\mu+1}, & \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\mu &\mapsto (-\lambda\varphi\psi' + \mu\varphi'\psi)(dx)^{\lambda+\mu+1}. \end{aligned}$$

Заметим, что второй из этих операторов является скобкой Пуассона в координатах x и $p := dx$. Ниже этот оператор будет обозначаться как $\{\varphi(dx)^\lambda, \psi(dx)^\mu\}$.

Операторы второго порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_\mu &\rightarrow \mathcal{F}_{\mu+2}, & \varphi \otimes \psi(dx)^\mu &\mapsto (-\varphi'\psi' + \mu\varphi''\psi)(dx)^{\mu+2}, \\ \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_0 &\rightarrow \mathcal{F}_{\lambda+2}, & \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi &\mapsto (-\lambda\varphi\psi'' + \varphi'\psi')(dx)^{\lambda+2}, \\ \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_{-\lambda-1} &\rightarrow \mathcal{F}_1, & \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^{-\lambda-1} &\mapsto \\ & & &\mapsto (-\lambda\varphi\psi'' - (2\lambda+1)\varphi'\psi' - (\lambda+1)\varphi''\psi) dx. \end{aligned}$$

Операторы третьего порядка:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_0 &\rightarrow \mathcal{F}_3, & \varphi \otimes \psi &\mapsto (\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi') (dx)^3, \\
\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_{-2} &\rightarrow \mathcal{F}_1, & \varphi \otimes \psi (dx)^{-2} &\mapsto (\varphi' \psi'' + 3\varphi'' \psi' + 2\varphi''' \psi) dx, \\
\mathcal{F}_{-2} \otimes \mathcal{F}_0 &\rightarrow \mathcal{F}_1, & \varphi (dx)^{-2} \otimes \psi &\mapsto (\varphi'' \psi' + 3\varphi' \psi'' + 2\varphi \psi''') dx, \\
\text{Gz}: \mathcal{F}_{-2/3} \otimes \mathcal{F}_{-2/3} &\rightarrow \mathcal{F}_{5/3}, & \varphi (dx)^{-2/3} \otimes \psi (dx)^{-2/3} &\mapsto (2\varphi''' \psi + 3\varphi'' \psi' - 3\varphi' \psi'' - 2\varphi \psi''') (dx)^{5/3}.
\end{aligned}$$

Таким образом, при $n = 1$ все инвариантные операторы имеют порядок не выше 3 и выражаются в виде композиции дифференциала де Рама и скобки Пуассона, за исключением *оператора Грозмана* Gz. В работе [8] этот оператор послужил отправной точкой классификации всех антисимметричных k -арных дифференциальных операторов.

Мы покажем, что при $n > 1$ не существует $\mathbf{vect}(n)$ -инвариантных операторов, действующих на пространстве взвешенных плотностей, кроме скалярного оператора (1.1). Можно, однако, интересоваться инвариантностью относительно некоторой подалгебры в $\mathbf{vect}(n)$. Наибольший интерес представляют максимальные простые подалгебры. При $n = 1$ имеется единственная максимальная простая подалгебра $\mathfrak{sl}(2) \simeq \mathfrak{o}(1, 2)$. Инвариантные относительно нее операторы уже классифицированы: в унарном случае это *операторы Бола* [9], в бинарном случае – *трансвекторы Гордона* [10] (см. [11]–[17] по поводу их применения; об инвариантных операторах в тернарном случае см. [18]).

При $n > 1$ можно рассмотреть многомерные аналоги трансвекторов, инвариантных относительно различных максимальных простых конечномерных подалгебр в $\mathbf{vect}(n)$, например относительно $\mathfrak{sl}(n+1)$ или $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$, где $n = p+q$ (ср. с работой [19]). Активно изучались $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ -инвариантные операторы, иногда называемые конформно-инвариантными. В унарном случае все конформно-инвариантные операторы даются степенями лапласиана [20]–[22]

$$\Delta_g^k: \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda+2k/n},$$

где Δ_g – лапласиан, связанный с псевдоримановой метрикой g сигнатуры (p, q) . В работе [23] проведена классификация $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ -инвариантных бинарных операторов и доказано, что для почти всех значений весов пространство конформно-инвариантных операторов одномерно.

Заметим, что $\mathbf{vect}(1) \simeq \mathfrak{k}(1)$, поэтому естественно также расширить поиск трансвекторов “в контактном направлении”, подобно работе [24], где были классифицированы билинейные дифференциальные операторы, действующие на пространстве взвешенных плотностей и инвариантные относительно симплектической алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2n+2) \subset \mathfrak{k}(2n+1)$, самой естественной из максимальных простых подалгебр Ли.

Основные результаты. Приведена классификация всех $\mathbf{vect}(n)$ -инвариантных тернарных дифференциальных операторов, действующих на пространстве взвешенных плотностей. Некоторые из этих инвариантных операторов выражаются в терминах унарных и бинарных, некоторые обобщают антисимметричные инвариантные операторы Фейгина–Фукса; четыре (с точностью до дуализации и перестано-

вок) инвариантных оператора являются новыми. Также приведена классификация всех конформно-инвариантных тернарных дифференциальных операторов, действующих на пространстве взвешенных плотностей. Прямые вычисления и повторяющиеся рассуждения опущены.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА $\mathbb{R}$ ИЛИ S^1

2.1. Антисимметричные инвариантные операторы Фейгина–Фукса. В работе [8] приведена классификация всех антисимметричных k -арных инвариантных дифференциальных операторов на пространстве взвешенных плотностей. Напомним, что список тернарных операторов из этой работы таков:

$$\begin{aligned}\Delta_{\lambda,3}: \wedge^3 \mathcal{F}_\lambda &\rightarrow \mathcal{F}_{3\lambda+3}, & d \circ \Delta_{-1,3}: \wedge^3 \mathcal{F}_{-1} &\rightarrow \mathcal{F}_1, \\ \Upsilon: \wedge^3 \mathcal{F}_{-5/4} &\rightarrow \mathcal{F}_{9/4}, & \Delta_{1,3} \circ (d \otimes d \otimes d): \wedge^3 \mathcal{F}_0 &\rightarrow \mathcal{F}_6, \\ \Theta_\pm: \wedge^3 \mathcal{F}_\lambda &\rightarrow \mathcal{F}_{3\lambda+5} \quad \text{при} \quad \lambda = -\frac{9 \pm \sqrt{21}}{12},\end{aligned}$$

где операторы $\Delta_{\lambda,3}$, Υ , $\Theta_\pm$ соответственно определяются следующими выражениями: $(\varphi, \psi, \chi)(dx)^\lambda \mapsto$

$$\begin{aligned}&\mapsto \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ \varphi' & \psi' & \chi' \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' \end{vmatrix} (dx)^{3\lambda+3}, \\ &\mapsto \left(\begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ \varphi^{(5)} & \psi^{(5)} & \chi^{(5)} \end{vmatrix} + \frac{5}{2} \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ \varphi^{(4)} & \psi^{(4)} & \chi^{(4)} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \varphi' & \psi' & \chi' \\ \varphi^{(3)} & \psi^{(3)} & \chi^{(3)} \end{vmatrix} \right) (dx)^{9/4}, \\ &\mapsto \left(\begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ \varphi^{(4)} & \psi^{(4)} & \chi^{(4)} \end{vmatrix} + 2(\mp\sqrt{21} - 4) \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ \varphi^{(3)} & \psi^{(3)} & \chi^{(3)} \end{vmatrix} \right) (dx)^{3\lambda+5},\end{aligned}$$

где во второй строке $\lambda = -5/4$.

2.2. Список $\text{vect}(1)$ -инвариантных тернарных инвариантных дифференциальных операторов. Напомним, что с любым оператором $A: \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\gamma \otimes \mathcal{F}_\tau \rightarrow \mathcal{F}_\mu$ можно связать следующие объекты.

Во-первых, три дуализации ($i = 1, 2, 3$) [1], [4], [25]

$$A^{*i}: \mathcal{F}_\alpha \otimes \mathcal{F}_\beta \otimes \mathcal{F}_\nu \rightarrow \mathcal{F}_\delta,$$

где $(\alpha, \beta, \nu, \delta) = (1 - \mu, \gamma, \tau, 1 - \lambda)$ для $i = 1$, или $(\alpha, \beta, \nu, \delta) = (\lambda, 1 - \mu, \tau, 1 - \gamma)$ для $i = 2$, или $(\alpha, \beta, \nu, \delta) = (\lambda, \gamma, 1 - \mu, 1 - \tau)$ для $i = 3$. Эти дуализации существуют в силу определения, согласно которому $(\mathcal{F}_\alpha)^* := \mathcal{F}_{1-\alpha}$. Предположив, что одно из этих пространств состоит из функций с компактным носителем (это позволяет интегрировать), мы можем утверждать, что это определение правильное, чем более естественное с первого взгляда $(\mathcal{F}_\alpha)^* = \mathcal{F}_{-\alpha}$.

Во-вторых, перестановки

$$A^\sigma: \mathcal{F}_\alpha \otimes \mathcal{F}_\beta \otimes \mathcal{F}_\nu \rightarrow \mathcal{F}_\mu, \quad A^\sigma(a, b, c) = A(\sigma^{-1}(a, b, c)),$$

где $(\alpha, \beta, \nu) = \sigma(\lambda, \gamma, \tau)$ для любого $\sigma \in S_3$.

2.2.1. *Порядки 1 и 2.* Всюду в дальнейшем все ϵ_j – константы, $j = 1, 2, 3$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Каждый инвариантный дифференциальный оператор порядка 1 с точностью до перестановок и дуализаций кратен одному из следующих операторов: при $(\lambda, \gamma, \tau) = (0, 0, 0)$ – оператору*

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto (\epsilon_1 \cdot d\varphi \cdot \psi \cdot \chi + \epsilon_2 \cdot \varphi \cdot d\psi \cdot \chi + \epsilon_3 \cdot \varphi \cdot \psi \cdot d\chi)(dx)^{\lambda+\gamma+\tau+1},$$

при $\lambda \neq 0$ – оператору

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & (\epsilon_1 \{\varphi(dx)^\lambda, \psi(dx)^\gamma\} \chi(dx)^\tau + \\ & + \epsilon_2 \{\varphi(dx)^\lambda, \chi(dx)^\tau\} \psi(dx)^\gamma)(dx)^{\lambda+\gamma+\tau+1}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Каждый инвариантный дифференциальный оператор порядка 2 с точностью до перестановок и дуализаций кратен одному из следующих операторов: при $(\gamma, \lambda) = (0, 0)$ – оператору*

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & \epsilon_1 \{\varphi, d\psi\} \chi(dx)^\tau + \\ & + \epsilon_2 \{\chi(dx)^\tau, d\varphi\} \psi + \epsilon_3 \{d\psi, \chi(dx)^\tau\} \varphi, \end{aligned}$$

в остальных случаях – оператору

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & \epsilon_1 \{ \{ \varphi(dx)^\lambda, \psi(dx)^\gamma \}, \chi(dx)^\tau \} + \\ & + \epsilon_2 \{ \{ \varphi(dx)^\lambda, \chi(dx)^\tau \}, \psi(dx)^\gamma \}. \end{aligned}$$

2.2.2. *Порядок 3.* Следующие тернарные $\mathbf{vect}(1)$ -инвариантные дифференциальные операторы являются новыми, новыми являются и их дуализации и перестановки (здесь $\mu = \lambda + \gamma + \tau + 3$):

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda, \gamma, \tau; 3}: \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\gamma \otimes \mathcal{F}_\tau & \rightarrow \mathcal{F}_\mu, \\ \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & \sum_{i+j+l=3} \alpha_{i,j,l} \varphi^{(i)} \psi^{(j)} \chi^{(l)}(dx)^\mu, \end{aligned}$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{3,0,0} &= \gamma\tau(\tau - \gamma)(1 + \gamma + \tau), \\ \alpha_{2,0,1} &= -\gamma(1 + \gamma + \tau)(\gamma + 2\lambda + (3\gamma + 3\lambda + 4)\tau + 2), \\ \alpha_{1,0,2} &= \gamma(1 + \gamma + \lambda)(\gamma + 2\tau + \lambda(3\gamma + 3\tau + 4) + 2), \\ \alpha_{0,0,3} &= \gamma\lambda(\lambda - \gamma)(1 + \gamma + \lambda), \\ \alpha_{2,1,0} &= \tau(1 + \gamma + \tau)(2\lambda + \tau + \gamma(3\lambda + 3\tau + 4) + 2), \\ \alpha_{1,1,1} &= (\lambda - \gamma)(\gamma - \tau)(\lambda - \tau), \\ \alpha_{0,1,2} &= -\lambda(1 + \gamma + \lambda)(\lambda + 2\tau + \gamma(3\lambda + 3\tau + 4) + 2), \\ \alpha_{1,2,0} &= -\tau(1 + \lambda + \tau)(2\gamma + \tau + \lambda(3\gamma + 3\tau + 4) + 2), \\ \alpha_{0,2,1} &= \lambda(1 + \lambda + \tau)(2\gamma + \lambda + (3\gamma + 3\lambda + 4)\tau + 2), \\ \alpha_{0,3,0} &= \lambda\tau(\tau - \lambda)(1 + \lambda + \tau). \end{aligned}$$

Следующее предложение показывает, что оператор $\Delta_{\lambda,\gamma,\tau;3}$ обобщает оператор Фейгина–Фукса $\Delta_{\lambda,3}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если $\lambda = \gamma = \tau$, то

$$\Delta_{\lambda,\gamma,\tau;3} = -\lambda(1+2\lambda)^2(2+3\lambda)\Delta_{\lambda,3};$$

если $1 + \lambda + \gamma = 0$, то

$$\Delta_{\lambda,\gamma,\tau;3} = (\tau - \lambda)(1 + \lambda + \tau)\{d\{\cdot, \cdot\}, \cdot\}.$$

Дуализации и перестановки приводят к (новым) аналогам этого равенства.

ТЕОРЕМА 2.3. Каждый тернарный инвариантный дифференциальный оператор порядка 3 с точностью до перестановок и дуализаций кратен одному из следующих операторов: при $(\gamma, \lambda, \tau) = (0, 0, 0)$ – оператору

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & \epsilon_1\{d\varphi, d\psi\}\chi + \epsilon_2\{d\chi, d\varphi\}\psi + \\ & + \epsilon_3\{d\psi, d\chi\}\varphi + \epsilon_4 d\varphi \otimes d\psi \otimes d\chi, \end{aligned}$$

при $\lambda = 0$ и $\gamma^2 + \tau^2 \neq 0$ – оператору

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & \epsilon_1\{\{d\varphi, \psi(dx)^\gamma\}, \chi(dx)^\tau\} + \\ & + \epsilon_2\{\{d\varphi, \chi(dx)^\tau\}, \psi(dx)^\gamma\}, \end{aligned}$$

при $(\gamma, \lambda, \tau) = (-2/3, -2/3, -2/3)$ – оператору

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & \epsilon_1 \text{Gz}(\varphi(dx)^{-2/3}, \psi(dx)^{-2/3})\chi(dx)^{-2/3} + \\ & + \epsilon_2 \text{Gz}(\chi(dx)^{-2/3}, \varphi(dx)^{-2/3})\psi(dx)^{-2/3} + \\ & + \epsilon_3 \text{Gz}(\psi(dx)^{-2/3}, \chi(dx)^{-2/3})\varphi(dx)^{-2/3}, \end{aligned}$$

при $(\gamma, \lambda, \tau) = (-1/2, -1/2, -1/2)$ – оператору

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & \epsilon_1\{d\{\varphi(dx)^{-1/2}, \psi(dx)^{-1/2}\}, \chi(dx)^{-1/2}\} + \\ & + \epsilon_2\{d\{\chi(dx)^{-1/2}, \varphi(dx)^{-1/2}\}, \psi(dx)^{-1/2}\} + \\ & + \epsilon_3\{d\{\psi(dx)^{-1/2}, \chi(dx)^{-1/2}\}, \varphi(dx)^{-1/2}\}, \end{aligned}$$

при $1 + \lambda + \tau = 0$ и $\gamma = \lambda \neq \tau$ – оператору

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & \epsilon_1\{d\{\varphi(dx)^\lambda, \chi(dx)^\tau\}, \psi(dx)^\gamma\} + \\ & + \epsilon_2\{d\{\psi(dx)^\gamma, \chi(dx)^\tau\}, \varphi(dx)^\lambda\}, \end{aligned}$$

в остальных случаях – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Delta_{\lambda,\gamma,\tau;3}(\varphi(dx)^\lambda, \psi(dx)^\gamma, \chi(dx)^\tau).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\mathbf{vect}(1)$ -инвариантность дифференциального оператора

$$A = \sum_{i+j+l=3} \alpha_{i,j,l} \varphi^{(i)} \psi^{(j)} \chi^{(l)} (dx)^\mu$$

эквивалентна инвариантности по отношению ровно к двум полям, порождающим $\mathbf{vect}(1)$, а именно d/dx и $x^3 \cdot d/dx$, и эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j,l} \left(\lambda \binom{i}{r-1} + \binom{i}{r} \right) + \alpha_{i-r+1,j+r-1,l} \left(\gamma \binom{j+r-1}{r-1} + \binom{j+r-1}{r} \right) + \\ + \alpha_{i-r+1,j,l+r-1} \left(\tau \binom{l+r-1}{r-1} + \binom{l+r-1}{r} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $i+j+l=3$, $r=2,3$.

План действий таков: найдем все решения системы (2.1) со всеми возможными значениями параметров λ , γ и τ . Пусть пространство решений m -мерно. Попытаемся построить m линейно независимых операторов, выражающихся в терминах дифференциала де Рама, скобки Пуассона, оператора Грозмана или антисимметричных операторов Фейгина–Фукса: это возможно только для специальных значений λ , γ и τ . Если это невозможно (мы проверяем все возможные комбинации внешнего дифференциала и билинейных операторов), или если пространство, порожденное такими операторами, имеет размерность меньше m , то найденный оператор A является новым. Возможны следующие значения λ , γ , τ .

1. Случай $\lambda = \gamma = \tau = 0$. В этом случае приведенная выше система допускает следующие решения:

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0,3} = \alpha_{3,0,0} = \alpha_{0,3,0} = 0, \quad \alpha_{0,2,1} = -\alpha_{0,1,2}, \\ \alpha_{2,0,1} = -\alpha_{1,0,2}, \quad \alpha_{2,1,0} = -\alpha_{1,2,0}. \end{aligned}$$

При этом мы хотим получить семейство операторов, зависящее от $\alpha_{1,2,0}$, $\alpha_{1,0,2}$, $\alpha_{1,1,1}$ и $\alpha_{0,1,2}$. С другой стороны, следующие операторы инвариантны и не могут быть кратными друг другу:

$$\{d\varphi, d\psi\}\chi, \quad \{d\chi, d\varphi\}\psi, \quad \{d\psi, d\chi\}\varphi, \quad d\varphi \otimes d\psi \otimes d\chi. \quad (2.2)$$

Поэтому A является линейной комбинацией этих инвариантных операторов.

2. Случай $\lambda = \gamma = 0$ и $\tau \neq 0$ (случаи $\lambda = \tau = 0$, $\gamma \neq 0$ и $\gamma = \tau = 0$, $\lambda \neq 0$ получаются перестановками; случай $\tau = -2$ следует отбросить, поскольку он дуален случаю 1). Опуская подробности, заметим, что система (2.1) имеет решения, зависящие от двух параметров. Это означает, что A есть линейная комбинация инвариантных операторов $\{d\varphi, \chi(dx)^\tau\} d\psi$ и $\{d\psi, \chi(dx)^\tau\} d\varphi$.

3. Случай $\lambda = 0$ и $\gamma, \tau \neq 0$ аналогичен случаю 2.

4. Случай $\lambda, \gamma, \tau \neq 0$ также аналогичен случаю 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Читатель, возможно, недоумевает, почему в нашем списке не появились операторы $\Delta_{\lambda,3}$ при $\lambda = -1/2, -2/3, 0$. Но в нашей классификации некоторые операторы обобщают операторы $\Delta_{\lambda,3}$ для специальных значений ϵ_j . Например, $\Delta_{-2/3,3}(\varphi, \psi, \chi)$ совпадает с оператором $\epsilon_1 \text{Gz}(\varphi, \psi)\chi + \epsilon_2 \text{Gz}(\chi, \varphi)\psi + \epsilon_3 \text{Gz}(\psi, \chi)\varphi$ при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$.

2.2.3. *Порядок 4.* Следующий тернарный инвариантный дифференциальный оператор является новым, новыми являются его дуализации и перестановки (здесь $\mu = \tau + 5/2$ и $\tau \neq -3/4$):

$$\Xi: \mathcal{F}_{-\tau-3/2} \otimes \mathcal{F}_\tau \otimes \mathcal{F}_\tau \rightarrow \mathcal{F}_\mu, \\ \varphi(dx)^{-\tau-3/2} \otimes \psi(dx)^\tau \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \sum_{i+j+l=4} \alpha_{i,j,l} \varphi^{(i)} \psi^{(j)} \chi^{(l)}(dx)^\mu,$$

где коэффициенты равны

$$\begin{aligned} \alpha_{4,0,0} &= 0, & \alpha_{3,0,1} &= \frac{8}{3} \tau(2+3\tau), & \alpha_{2,0,2} &= 4\tau(2+3\tau), \\ \alpha_{1,0,3} &= \frac{2}{3} \tau(13+12\tau), & \alpha_{0,0,4} &= \tau(3+2\tau), & \alpha_{3,1,0} &= -\frac{8}{3} \tau(2+3\tau), \\ \alpha_{2,1,1} &= 0, & \alpha_{1,1,2} &= -10(1+\tau), & \alpha_{0,1,3} &= -\frac{5}{3} (3+2\tau), \\ \alpha_{2,2,0} &= -4\tau(2+3\tau), & \alpha_{1,2,1} &= 10(1+\tau), & \alpha_{0,2,2} &= 0, \\ \alpha_{1,3,0} &= -\frac{2}{3} \tau(13+12\tau), & \alpha_{0,3,1} &= \frac{5}{3} (3+2\tau), & \alpha_{0,4,0} &= -\tau(3+2\tau). \end{aligned}$$

При $\tau = -3/4$ имеется двухпараметрическое семейство инвариантных операторов, задающееся следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \alpha_{4,0,0} &= t, & \alpha_{3,0,1} &= \frac{4}{9} (s+5t), & \alpha_{2,0,2} &= \frac{2}{3} s, \\ \alpha_{1,0,3} &= -\frac{4}{9} (4s+5t), & \alpha_{0,0,4} &= -s-t, & \alpha_{3,1,0} &= \frac{4}{9} (4t-s), \\ \alpha_{2,1,1} &= \frac{20}{9} t, & \alpha_{1,1,2} &= -\frac{10}{9} (s+t), & \alpha_{0,1,3} &= -\frac{4}{9} (5s+4t), \\ \alpha_{2,2,0} &= -\frac{2}{3} (s+t), & \alpha_{1,2,1} &= \frac{20}{9} s, & \alpha_{0,2,2} &= \frac{2}{3} t, \\ \alpha_{1,3,0} &= \frac{4}{9} (4s-t), & \alpha_{0,3,1} &= \frac{4}{9} (5s+t), & \alpha_{0,4,0} &= s. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.4. *Каждый инвариантный дифференциальный оператор порядка 4 с точностью до перестановок и дуализаций является кратным следующим операторам: при $(\gamma, \lambda) = (0, 0)$ – оператору*

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \epsilon_1 \{ \{ d\varphi, d\psi \}, \chi(dx)^\tau \} + \epsilon_2 \{ \{ \chi(dx)^\tau, d\varphi \}, d\psi \},$$

при $(\lambda, \gamma, \tau) = (-2, 0, -2)$ – оператору

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \epsilon_1 \{ d \{ d\psi, \varphi(dx)^{-2} \}, \chi(dx)^{-2} \} + \\ + \epsilon_2 \{ d \{ d\psi, \chi(dx)^{-2} \}, \varphi(dx)^{-2} \}, \end{aligned}$$

при $\gamma = 0, \lambda, \tau \neq 0$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Delta_{\lambda, \gamma, \tau; 3}(\varphi(dx)^\lambda, d\psi, \chi(dx)^\tau),$$

при $(\lambda, \gamma) = (-2/3, -2/3)$ и $\tau \neq -1$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \{\text{Gz}(\varphi(dx)^{-2/3}, \psi(dx)^{-2/3}), \chi(dx)^\tau\},$$

при $(\lambda, \gamma, \tau) = (-1, -2/3, -2/3)$ – оператору

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & \epsilon_1 \text{Gz}(\{\varphi(dx)^{-1}, \psi(dx)^{-2/3}\}, \chi(dx)^{-2/3}) + \\ & + \epsilon_2 \text{Gz}(\{\varphi(dx)^{-1}, \chi(dx)^{-2/3}\}, \psi(dx)^{-2/3}), \end{aligned}$$

при $(\lambda, \gamma, \tau) = (-3/2, -\tau, \tau)$ и $\tau \neq -3/2, -2/3, 0, -3/4$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Xi(\varphi(dx)^\lambda, \psi(dx)^\gamma, \chi(dx)^\tau),$$

при $(\lambda, \gamma, \tau) = (-3/4, -3/4, -3/4)$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Xi_{s,t}(\varphi(dx)^\lambda, \psi(dx)^\gamma, \chi(dx)^\tau).$$

2.2.4. Порядок 5. Следующий тернарный инвариантный дифференциальный оператор порядка 5 является новым, новыми являются его дуализации и перестановки (за исключением тех случаев, когда они совпадают):

$$\begin{aligned} \Gamma: \mathcal{F}_{-2/3} \otimes \mathcal{F}_{-2/3} \otimes \mathcal{F}_{-4/3} &\rightarrow \mathcal{F}_{7/3}, \quad \varphi(dx)^{-2/3} \otimes \psi(dx)^{-2/3} \otimes \chi(dx)^{-4/3} \mapsto \\ &\mapsto \sum_{i+j+l=5} \alpha_{i,j,l} \varphi^{(i)} \psi^{(j)} \chi^{(l)}(dx)^{7/3}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где константы равны

$$\begin{aligned} \alpha_{5,0,0} &= -\frac{2}{5}, & \alpha_{4,0,1} &= -\frac{17}{10}, & \alpha_{3,0,2} &= -\frac{5}{2}, & \alpha_{2,0,3} &= -1, & \alpha_{1,0,4} &= 1, \\ \alpha_{0,0,5} &= \frac{2}{5}, & \alpha_{4,1,0} &= -\frac{3}{5}, & \alpha_{3,1,1} &= -\frac{9}{4}, & \alpha_{2,1,2} &= -\frac{9}{4}, & \alpha_{1,1,3} &= \frac{3}{2}, \\ \alpha_{0,1,4} &= 1, & \alpha_{3,2,0} &= 3, & \alpha_{2,2,1} &= \frac{9}{2}, & \alpha_{1,2,2} &= -\frac{9}{4}, & \alpha_{0,2,3} &= -1, \\ \alpha_{2,3,0} &= 3, & \alpha_{1,3,1} &= -\frac{9}{4}, & \alpha_{0,3,2} &= -\frac{5}{2}, & \alpha_{1,4,0} &= -\frac{3}{5}, & \alpha_{0,4,1} &= -\frac{17}{10}, \\ \alpha_{0,5,0} &= -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.5. Каждый инвариантный дифференциальный оператор порядка 5 с точностью до перестановок и дуализаций является кратным следующим операторам: при $(\lambda, \gamma, \tau) = (0, 0, 0)$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \epsilon_1 \{\{d\varphi, d\psi\}, d\chi\} + \epsilon_2 \{\{d\chi, d\varphi\}, d\psi\},$$

при $(\lambda, \gamma, \tau) = (0, 0, -2)$ – оператору

$$\begin{aligned} \varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto & \epsilon_1 \{d\{d\varphi, \chi(dx)^{-2}\}, d\psi\} + \\ & + \epsilon_2 \{d\{d\psi, \chi(dx)^{-2}\}, d\varphi\}, \end{aligned}$$

при $(\lambda, \gamma) = (0, 0)$ и $\tau \neq -4, -2, 0$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Delta_{\lambda, \gamma, \tau; 3}(d\varphi, d\psi, \chi(dx)^\tau),$$

при $(\lambda, \gamma, \tau) = (-2/3, -2/3, 0)$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \{Gz(\varphi(dx)^{-2/3}, \psi(dx)^{-2/3}), d\chi\},$$

при $(\lambda, \gamma, \tau) = (-5/2, 0, 1)$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Xi(\varphi(dx)^{-5/2}, d\psi, \chi dx),$$

при $(\lambda, \gamma, \tau) = (-2/3, -2/3, -4/3)$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Gamma(\varphi(dx)^\lambda, \psi(dx)^\gamma, \chi(dx)^\tau),$$

при $\lambda = \gamma = \tau = -(9 \pm \sqrt{21})/12$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Theta_\pm(\varphi(dx)^\lambda, \psi(dx)^\gamma, \chi(dx)^\tau).$$

2.2.5. Порядок 6.

ТЕОРЕМА 2.6. *Каждый инвариантный дифференциальный оператор порядка 6 является с точностью до перестановок и дуализаций кратным следующим операторам: при $(\lambda, \gamma, \tau) = (0, 0, -2)$ – оператору*

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Delta_{1,3}(d\varphi, d\psi, d\chi),$$

при $(\lambda, \gamma, \tau) = (0, 0, -5/2)$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Xi(d\varphi, d\psi, \chi(dx)^{-5/2}),$$

при $(\lambda, \gamma, \tau) = (-5/4, -5/4, -5/4)$ – оператору

$$\varphi(dx)^\lambda \otimes \psi(dx)^\gamma \otimes \chi(dx)^\tau \mapsto \Upsilon(\varphi(dx)^{-5/4}, \psi(dx)^{-5/4}, \chi(dx)^{-5/4}).$$

2.2.6. Порядок больше 6.

ТЕОРЕМА 2.7. *Не существует тернарных $\text{vect}(1)$ -инвариантных дифференциальных операторов порядка больше 6.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы можно проверить прямым вычислением для операторов порядка $k = 7$. Чтобы доказать результат для любого порядка $k > 7$, будем действовать следующим образом.

Шаг 1. Случай $\lambda\gamma\tau \neq 0$. В этом случае инвариантность относительно векторного поля $x^{k+1} \cdot d/dx$, где k – порядок оператора, эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j,l} \left(\lambda \binom{i}{r-1} + \binom{i}{r} \right) + \alpha_{i-r+1,j+r-1,l} \left(\gamma \binom{j+r-1}{r-1} + \binom{j+r-1}{r} \right) + \\ + \alpha_{i-r+1,j,l+r-1} \left(\tau \binom{l+r-1}{r-1} + \binom{l+r-1}{r} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $i + j + l = k$ и $r = 2, \dots, k + 1$. Сначала докажем, что для решений системы (2.4) имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} a_{k,0,0} &= a_{0,k,0} = a_{0,0,k} = a_{k-1,i,j} = a_{i,k-1,j} = \\ &= a_{i,j,k-1} = a_{k-2,i,j} = a_{i,k-2,j} = a_{i,j,k-2} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для этого рассмотрим подсистему системы (2.4), коэффициенты которой такие же, как в (2.5) при $r = k + 1, k, k - 1$ и $r = 3, 2$. Тогда получим линейную систему с матрицей размера 23×18 (данная матрица слишком громоздка, чтобы здесь ее приводить). При $\lambda\gamma\tau \neq 0$ эта матрица имеет ранг 18, а потому все решения нулевые, как в (2.5).

Пусть

$$\alpha_{k-t,i,t-i} = \alpha_{i,k-t,t-i} = \alpha_{i,t-i,k-t} = 0 \quad \text{при всех } t, i = 0, \dots, n.$$

Проведем индукцию по n с целью доказать, что оставшиеся коэффициенты равны нулю.

При $r = k - n$ возьмем $i = k - n - 1$ и любое $j = s \neq 0, n + 1$ в системе (2.4). Получим

$$\lambda\alpha_{k-n-1,s,n+1-s} + \left(\gamma \binom{s+k-n-1}{k-n-1} + \binom{s+k-n-1}{k-n} \right) \alpha_{0,k-n-1+s,n+1-s} = 0.$$

Предположение индукции означает, что $\alpha_{0,k-n-1+s,n+1-s} = 0$, поэтому

$$\alpha_{k-n-1,s,n+1-s} = 0 \quad \text{при всех } s \neq 0, n + 1. \quad (2.6)$$

Аналогично можно доказать, что $\alpha_{s,k-n-1,n+1-s} = \alpha_{s,n+1-s,k-n-1} = 0$ при всех $s \neq 0, n + 1$.

При $r = 3$ возьмем $i = 2$ и $j = n - 1$ в системе (2.4). Получим

$$\begin{aligned} &\left(\gamma \binom{n+1}{2} + (n+1) \right) \alpha_{0,n+1,k-n-1} = 0, \\ &\left(\gamma \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} \right) \alpha_{k-n-1,n+1,0} = 0, \\ &\left(\lambda \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} \right) \alpha_{n+1,0,k-n-1} = 0, \\ &\left(\lambda \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} \right) \alpha_{n+1,k-n-1,0} = 0, \\ &\left(\tau \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} \right) \alpha_{0,k-n-1,n+1} = 0, \\ &\left(\tau \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} \right) \alpha_{k-n-1,0,n+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При $r = 2$ возьмем $i = 1$ и $j = n$ в системе (2.4). Получим

$$\begin{aligned} \left(\gamma(n+1) + \binom{n+1}{2}\right) \alpha_{0,n+1,k-n-1} &= 0, & \left(\gamma(n+1) + \binom{n+1}{2}\right) \alpha_{k-n-1,n+1,0} &= 0, \\ \left(\lambda(n+1) + \binom{n+1}{2}\right) \alpha_{n+1,0,k-n-1} &= 0, & \left(\lambda(n+1) + \binom{n+1}{2}\right) \alpha_{n+1,k-n-1,0} &= 0, \\ \left(\tau(n+1) + \binom{n+1}{2}\right) \alpha_{0,k-n-1,n+1} &= 0, & \left(\tau(n+1) + \binom{n+1}{2}\right) \alpha_{k-n-1,0,n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из уравнений (2.7) и (2.8) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_{k-n-1,0,n+1} &= \alpha_{k-n-1,n+1,0} = \alpha_{0,k-n-1,n+1} = \\ &= \alpha_{n+1,k-n-1,0} = \alpha_{0,n+1,k-n-1} = \alpha_{n+1,0,k-n-1} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из вида уравнений (2.6) и (2.9) следует, что утверждение индукции верно при $n+1$, откуда и получаем искомый результат.

Шаг 2. Случай $\lambda\gamma\tau = 0$. Мы приведем здесь доказательство только в случае, когда $\tau = 0$ и $\lambda\gamma \neq 0$. Тогда оператор $A(\cdot, \cdot, 1)$ превращается в $\mathbf{vect}(1)$ -инвариантный бинарный оператор, поскольку $\tau = 0$. Из классификации Грозмана следует, что $A(\cdot, \cdot, 1)$ – нулевой оператор, поскольку $k > 7$. Поэтому $\alpha_{i,k-i,0} = 0$ при $i = 0, \dots, k$. Таким образом, $A = B(\cdot, \cdot, d)$, где B – оператор порядка $k-1$, определенный на $\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\gamma \otimes \mathcal{F}_1$. При этом $\mathbf{vect}(1)$ -инвариантность оператора A автоматически влечет $\mathbf{vect}(1)$ -инвариантность оператора B . В силу шага 1 оператор B должен быть нулевым, как и A .

3. ТЕРНАРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА МНОГОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Теперь рассмотрим $M = \mathbb{R}^n$. Пусть g обозначает обычную псевдориманову метрику на $\mathbb{R}^n$ сигнатуры (p, q) , где $p+q = n$. Конформные преобразования порождаются векторными полями¹⁾

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}, & X_{ij} &= x_i \frac{\partial}{\partial x^j} - x_j \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ X_0 &= x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, & \overline{X}_i &= x_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - 2x_i x^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $(x^1, \dots, x^n)$ – координаты на $\mathbb{R}^n$ и $x_i = g_i^j x^j$. Ниже предполагается, что конформная алгебра Ли $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ реализована операторами (3.1). Очевидно, что алгебра Ли, порожденная векторными полями X_{ij} , изоморфна $\mathfrak{o}(p, q)$. Поэтому имеем вложение алгебр Ли

$$\mathfrak{o}(p, q) \subset \mathfrak{o}(p+1, q+1) \subset \mathbf{vect}(n).$$

Сначала мы проведем классификацию всех тернарных $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ -инвариантных дифференциальных операторов, а затем используем результат для классификации $\mathbf{vect}(1)$ -инвариантных операторов.

¹⁾Мы используем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Индексы поднимаются и опускаются метрикой g .

3.1. Конформно-инвариантные операторы. Приведенный ниже метод принадлежит Овсиенко и Реду [23]. отождествим тернарные дифференциальные операторы с их символами. Это отождествление позволяет изучать подалгебру $\mathfrak{o}(p, q)$ -инвариантных многочленов

$$I := \mathbb{C}[x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n]^{\mathfrak{o}(p, q)},$$

воспользовавшись теорией инвариантов Вейля [26]. Получаем, что у алгебры I следующие образующие:

$$\begin{aligned} R_{xx} &= x^i x_j, & R_{x\xi} &= x^i \xi_i, & R_{x\eta} &= x^i \eta_i, & R_{x\zeta} &= x^i \zeta_i, & R_{\xi\xi} &= \xi^i \xi_j, \\ R_{\xi\eta} &= \xi^i \eta_i, & R_{\xi\zeta} &= \xi^i \zeta_i, & R_{\eta\eta} &= \eta^i \eta_i, & R_{\eta\zeta} &= \eta^i \zeta_i, & R_{\zeta\zeta} &= \zeta^i \zeta_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из X_i -инвариантности следует, что $\partial P / \partial x^i = 0$ для каждого многочлена P . Поэтому генераторы из списка (3.2), которые содержат x , следует отбросить. Таким образом, любой $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ -инвариантный дифференциальный оператор должен иметь вид

$$B = \sum_{a,b,c,d,e,f \geq 0} \alpha_{abcdef} R^{a,b,c,d,e,f}, \quad (3.3)$$

где $R^{a,b,c,d,e,f} = R_{\xi\xi}^a R_{\xi\eta}^b R_{\xi\zeta}^c R_{\eta\eta}^d R_{\eta\zeta}^e R_{\zeta\zeta}^f$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для почти всех λ, γ и τ существуют $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ -инвариантные операторы*

$$B_{2k} = \sum_{a+b+c+d+e+f=k} \alpha_{abcdef} R^{a,b,c,d,e,f} : \mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\gamma \otimes \mathcal{F}_\tau \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda+\gamma+\tau+2k/n}, \quad (3.4)$$

где $k = 0, 1, \dots$, а константы выражаются по индукции в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} & 2(a+1)(2(a+1) + n(2\lambda - 1))\alpha_{a+1,b,c,d,e,f} - \\ & - (b+2)(b+1)\alpha_{a,b+2,c,d-1,e,f} - 2(b+1)(c+1)\alpha_{a,b+1,c+1,d,e-1,f} + \\ & + 2(b+1)(b+e+2d+n\gamma)\alpha_{a,b+1,c,d,e,f} - (c+2)(c+1)\alpha_{a,b,c+2,d,e,f-1} + \\ & + 2(c+1)(c+e+2f+n\tau)\alpha_{a,b,c+1,d,e,f} = 0, \\ & 2(d+1)(2(d+1) + n(2\gamma - 1))\alpha_{a,b,c,d+1,e,f} - \\ & - (b+2)(b+1)\alpha_{a-1,b+2,c,d,e,f} - 2(b+1)(e+1)\alpha_{a,b+1,c-1,d,e+1,f} + \\ & + 2(b+1)(b+c+2a+n\lambda)\alpha_{a,b+1,c,d,e,f} - (e+2)(e+1)\alpha_{a,b,c,d,e+2,f-1} + \\ & + 2(e+1)(c+e+2f+n\tau)\alpha_{a,b,c,d,e+1,f} = 0, \\ & 2(f+1)(2(f+1) + n(2\tau - 1))\alpha_{a,b,c,d,e,f+1} - \\ & - (e+2)(e+1)\alpha_{a,b,c,d-1,e+2,f} - 2(e+1)(c+1)\alpha_{a,b-1,c+1,d,e+1,f} + \\ & + 2(e+1)(b+e+2d+n\gamma)\alpha_{a,b,c,d,e+1,f} - (c+2)(c+1)\alpha_{a-1,b,c+2,d,e,f} + \\ & + 2(c+1)(c+b+2a+n\lambda)\alpha_{a,b,c+1,d,e,f} = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ПРИМЕР. При $k = 1$ имеем (здесь s, t и u – параметры)

$$\begin{aligned} B_2 = & n(\gamma s + \tau t)(2 + n(2\gamma - 1))(2 + n(2\tau - 1))R_{\xi\xi} + \\ & + n(\lambda s + \tau u)(2 + n(2\lambda - 1))(2 + n(2\tau - 1))R_{\eta\eta} + \\ & + n(\gamma u + \lambda t)(2 + n(2\lambda - 1))(2 + n(2\gamma - 1))R_{\zeta\zeta} - \\ & - (2 + n(2\lambda - 1))(2 + n(2\gamma - 1))(2 + n(2\tau - 1))(sR_{\xi\eta} + tR_{\xi\zeta} + uR_{\eta\zeta}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из X_0 -инвариантности следует, что (здесь L_X – производная Ли вдоль поля X)

$$L_{X_0}B = \sum_{a,b,c,d,e,f \geq 0} (n(\mu - \lambda - \gamma - \tau) - 2(a + b + c + d + e + f))c_{a,b,c,d,e,f}R^{a,b,c,d,e,f} = 0.$$

Поэтому $n(\mu - \lambda - \gamma - \tau) - 2(a + b + c + d + e + f) = 0$. Таким образом, оператор B_{2k} является однородным (все его компоненты имеют одну и ту же степень). Для получения индукционных формул нам требуется следующее предложение (см., например, [27]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Действие оператора $\overline{X_i}$ имеет вид

$$L_{\overline{X_i}}^{\lambda,\gamma,\tau;\mu} = L_{X_i}^{\mu-\lambda-\gamma-\tau} - \xi_i T_\xi - \eta_i T_\eta - \zeta_i T_\zeta + 2((E_\xi + n\lambda)\partial_{\xi^i} + (E_\eta + n\gamma)\partial_{\eta^i} + (E_\zeta + n\tau)\partial_{\zeta^i}),$$

de

$$\begin{aligned} L_{X_i}^{\mu-\lambda-\gamma-\tau} = & x_j x^j \partial_i - 2x_i x^j \partial_j - 2n(\mu - \lambda - \gamma - \tau)x_i - \\ & - 2((\xi_i x_j - \xi_j x_i)\partial_{\xi_j} + (\eta_i x_j - \eta_j x_i)\partial_{\eta_j} + (\zeta_i x_j - \zeta_j x_i)\partial_{\zeta_j}) + \\ & + 2(\xi_j x^j \partial_{\xi^i} + \eta_j x^j \partial_{\eta^i} + \zeta_j x^j \partial_{\zeta^i}), \end{aligned}$$

$T_\xi = \partial_{\xi^j} \partial_{\xi_j}$ – след, а $E_\xi = \xi_j \partial_{\xi_j}$ – оператор Эйлера.

Из предложения 3.1 следует, что

$$\begin{aligned} L_X^{\lambda,\gamma,\tau;\mu} R^{a,b,c,d,e,f} = & 2(2k - n(\mu - \lambda - \gamma - \tau))R^{a,b,c,d,e,f}x_i + \\ & + (2a(2a + n(2\lambda - 1))R^{a-1,b,c,d,e,f} - b(b-1)R^{a,b-2,c,d+1,e,f} - \\ & - 2bcR^{a,b-1,c-1,d,e+1,f} + 2b(b-1+e+2d+n\gamma)R^{a,b-1,c,d,e,f} - \\ & - c(c-1)R^{a,b,c-2,d,e,f+1} + 2c(c-1+e+2f+n\tau)R^{a,b,c-1,d,e,f})\xi_i + \\ & + (2d(2d + n(2\gamma - 1))R^{a,b,c,d-1,e,f} - b(b-1)R^{a+1,b-2,c,d,e,f} - \\ & - 2beR^{a,b-1,c+1,d,e-1,f} + 2b(b-1+c+2a+n\lambda)R^{a,b-1,c,d,e,f} - \\ & - e(e-1)R^{a,b,c,d,e-2,f+1} + 2e(e-1+c+2f+n\tau)R^{a,b,c,d,e-1,f})\eta_i + \\ & + (2f(2f + n(2\tau - 1))R^{a,b,c,d,e,f-1} - e(e-1)R^{a,b,c,d+1,e-2,f} - \\ & - 2ecR^{a,b+1,c-1,d,e-1,f} + 2e(e-1+b+2d+n\gamma)R^{a,b,c,d,e-1,f} - \\ & - c(c-1)R^{a+1,b,c-2,d,e,f} + 2c(c-1+b+2a+n\lambda)R^{a,b,c-1,d,e,f})\zeta_i. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Действуя теперь с помощью $L_X^{\lambda,\gamma,\tau;\mu}$ на B_{2k} , после перегруппировки слагаемых получаем рекуррентную систему линейных уравнений (3.5). Операторы B_{2k} зависят от некоторых параметров и могут обращаться в нуль при некоторых специальных значениях λ, γ и τ .

3.2. $\mathbf{vect}(n)$ -инвариантные дифференциальные операторы. Поскольку каждый $\mathbf{vect}(n)$ -инвариантный оператор является также $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ -инвариантным, достаточно проверить, являются ли $\mathbf{vect}(n)$ -инвариантными конформно-инвариантные операторы, перечисленные в теореме 3.1.

ТЕОРЕМА 3.2. *Единственный $\mathbf{vect}(n)$ -инвариантный тернарный дифференциальный оператор является оператором умножения:*

$$\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{F}_\gamma \otimes \mathcal{F}_\tau \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda+\gamma+\tau}, \quad \varphi|\mathrm{vol}|^\lambda \otimes \psi|\mathrm{vol}|^\gamma \otimes \chi|\mathrm{vol}|^\tau \mapsto \varphi \cdot \psi \cdot \chi|\mathrm{vol}|^{\lambda+\gamma+\tau}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое вычисление показывает, что действие посредством $X \in \mathbf{vect}(n)$ имеет вид (ср. с действием из предложения 3.1)

$$L_X^{\lambda, \gamma, \tau; \mu} = (\mu - \lambda - \gamma - \tau) \mathrm{Div}(X) - (\partial_j X^m \xi_m \partial_{\xi_j} + \partial_j X^m \eta_m \partial_{\eta_j} + \partial_j X^m \zeta_m \partial_{\zeta_j}) + \\ + (\text{производные более высоких порядков } \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} X).$$

Поскольку каждый $\mathbf{vect}(n)$ -инвариантный оператор является $\mathfrak{o}(p+1, q+1)$ -инвариантным, имеем (см. (3.4))

$$L_X^{\lambda, \gamma, \tau}(B_{2k}) = \sum_{a+b+c+d+e+f=k} (\mu - \lambda - \gamma - \tau) \alpha_{a,b,c,d,e,f} \mathrm{Div}(X) R^{a,b,c,d,e,f} + (\text{другие члены}).$$

Таким образом, $(\mu - \lambda - \gamma - \tau) \alpha_{a,b,c,d,e,f} = 0$. Поскольку $\mu - \lambda - \gamma - \tau = 2k/n$, получаем, что либо $k = 0$, либо $\alpha_{a,b,c,d,e,f} = 0$. Следовательно, если B_{2k} не является скалярным оператором (1.1), то он должен быть нулевым оператором.

Благодарности. Я благодарен Д. Лейтесу и В. Овсиенко за их интерес к настоящей работе и помощь.

Список литературы

- [1] P. Grozman, D. Leites, I. Shchepochkina, “Invariant operators on supermanifolds and standard models”, *Multiple Facets of Quantization and Supersymmetry*, eds. M. Olshanetsky, A. Vainshtein, World Scientific, Singapore, 2002, 508–555.
- [2] S. Hansoul, P. Lecomte, *Internat. Math. Res. Notices*, 2005, № 16, 981–1003.
- [3] I. Kolář, P. Michor, J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer, Berlin, 1993.
- [4] А. А. Кириллов, “Инвариантные операторы над геометрическими величинами”, *Современные проблемы математики. Новейшие достижения*, Итоги науки и техники, **16**, ВИНТИ, М., 1980, 3–29.
- [5] А. Н. Рудаков, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1974, № 4, 835–866.
- [6] C. L. Terng, *Amer. J. Math.*, **100**:4 (1978), 775–828.
- [7] П. Грозман, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:2 (1980), 58–59; [arXiv:math/0509562](https://arxiv.org/abs/math/0509562).
- [8] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:2 (1982), 47–63.
- [9] G. Bol, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **16**:3–4 (1949), 1–28.
- [10] P. Gordan, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, Teubner, Leipzig, 1887.
- [11] S. Bouarroudj, V. Ovsienko, *Internat. Math. Res. Notices*, **1998**:1 (1998), 25–39.
- [12] H. Cohen, *Math. Ann.*, **217**:3 (1977), 271–285.
- [13] P. Cohen, Yu. Manin, D. Zagier, “Automorphic pseudodifferential operators”, *Algebraic Aspects of Integrable Systems*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **26**, eds. A. S. Fokas, I. M. Gelfand, Birkhäuser, Boston, MA, 1997, 17–47.

- [14] P. Olver, A. Jan Sanders, *Adv. Appl. Math.*, **25**:3 (2000), 252–283.
- [15] R. A. Rankin, *J. Indian Math. Soc.*, **20** (1956), 103–116.
- [16] D. Zagier, *Proc. Indian. Acad. Sci. Math. Sci.*, **104**:1 (1994), 57–75.
- [17] В. Овсиенко, С. Табачников, *Проективная дифференциальная геометрия. Старое и новое: от производной Шварца до когомологий групп диффеоморфизмов*, МЦНМО, М., 2008.
- [18] S. Bouarroudj, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **2**:1 (2005), 23–40.
- [19] F. Boniver, P. Mathonet, *J. Math. Phys.*, **42**:2 (2001), 582–589.
- [20] M. G. Eastwood, J. W. Rice, *Comm. Math. Phys.*, **109**:2 (1987), 207–228.
- [21] A. R. Gover, K. Hirachi, *J. Amer. Math. Soc.*, **17**:2 (2004), 389–405.
- [22] H. P. Jakobsen, M. Vergne, *J. Func. Anal.*, **24**:1 (1977), 52–106.
- [23] V. Ovsienko, P. Redou, *Lett. Math. Phys.*, **63**:1 (2003), 19–28.
- [24] P. Mathonet, *Lett. Math. Phys.*, **48**:3 (1999), 251–261.
- [25] S. Bouarroudj, *J. Geom. Phys.*, **57**:6 (2007), 1441–1456.
- [26] Г. Вейль, *Классические группы, их инварианты и представления*, ИЛ, М., 1947.
- [27] C. Duval, P. Lecomte, V. Ovsienko, *Ann. Inst. Fourier*, **49**:6 (1999), 1999–2029.

Поступила в редакцию 22.05.2008