Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Хао Хун-Хай, Чжан Да-Цзюнь, Дэн Шу-Фан, Уравнение Кадомцева–Петвиашвили с самосогласованными источниками в неоднородных средах, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 2, 181–199

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6308>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:11:00

© 2009 г. Хао Хун-Хай*, Чжан Да-Цзюнь*, Дэн Шу-Фан†

УРАВНЕНИЕ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ С САМОСОГЛАСОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Выведено неизоспектральное уравнение Кадомцева–Петвиашвили с самосогласованными источниками. N -солитонные решения этого уравнения получены с помощью метода Хироты и техники вронскиана. Рассматриваются односолитонные характеристики, двухсолитонное рассеяние в неоднородных средах и влияние источников.

Ключевые слова: неизоспектральное уравнение Кадомцева–Петвиашвили с самосогласованными источниками, метод Хироты, техника вронскиана, динамические характеристики, солитонный резонанс.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время солитонные уравнения с самосогласованными источниками привлекали значительное внимание [1]–[6]. Эти уравнения демонстрируют более богатые нелинейные динамические характеристики, чем просто солитонные уравнения. Наличие источников может приводить к возникновению уединенных волн, движущихся с непостоянной скоростью, что порождает разнообразные динамики в физических моделях. Модели такого типа описывают взаимодействия между различными уединенными волнами и актуальны в ряде задач гидродинамики, физики твердого тела, физики плазмы и т.д. [2], [4].

Неизоспектральные солитонные уравнения [7]–[11] играют важную роль как в физике, так и в математике. Они связаны с зависящими от времени спектральными параметрами и могут описывать уединенные волны в неоднородных средах. В общем случае для $(1 + 2)$ -мерных интегрируемых систем, когда для спектрального параметра λ выполнено соотношение $\lambda_t = \lambda^j$, $j = 0$ или 1 , соответствующие неизоспектральные уравнения являются математически тривиальными, поскольку существует преобразование между ними и их изоспектральными аналогами; при этом

*Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai, P.R. China.
E-mail: hao_haier@shu.edu.cn, djzhang@staff.shu.edu.cn

†Department of Mathematics, East China University of Science and Technology, Shanghai, P.R. China

для $j > 1$ существование таких преобразований было найдено лишь в работе [12]. Однако для $(1 + 2)$ -мерных систем некоторые неизоспектральные уравнения, связанные с соотношением $\lambda_t = \lambda^2$, можно преобразовать к их изоспектральным аналогам [13]. Неизоспектральные уравнения, как и изоспектральные, можно решать с помощью метода обратной задачи рассеяния, преобразования Дарбу, метода Хироты, техники вронскиана и т.д. (см. [7]–[16]).

Некоторые солитонные уравнения с самосогласованными источниками исследовались недавно с помощью метода Хироты и техники вронскиана [17]–[20]. Некоторые неизоспектральные солитонные уравнения с самосогласованными источниками также допускают билинейную форму и N -солитонные решения в представлении Хироты, а также вронскианный вид [21].

В данной работе мы исследуем неизоспектральное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) с самосогласованными источниками (неизоспектральное уравнение КПСИ). Сначала мы выведем неизоспектральное уравнение КПСИ и получим пару Лакса для него. Далее мы представим набор преобразований зависимых переменных для получения уравнений билинейного вида, что позволяет получить многосолитонные решения с помощью стандартного метода Хироты. Более того, в силу некоторых свойств определителей и тождеств решение в вронскианном виде можно проверить, используя прямую подстановку в билинейные уравнения неизоспектрального уравнения КПСИ. И, наконец, мы обсудим динамику солитонных решений, включая односолитонные характеристики и двухсолитонное рассеяние. Как и в неизоспектральной модели, неизоспектральное уравнение КПСИ может приводить к рассеянию линейных солитонов и к резонансам линейных солитонов в неоднородных средах. Это аналогично тому, что имеет место в изоспектральном случае без источников [22]–[24], однако неизоспектральные эффекты обеспечивают зависимость от времени амплитуд и наклонов линейных солитонов. Более того, наличие источников обеспечивает сдвиги этих линейных солитонов.

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 выведено неизоспектральное уравнение КПСИ и приведена пара Лакса. В разделе 3 неизоспектральное уравнение КПСИ получено в билинейном виде и решено с помощью метода Хироты. В разделе 4 проверяется вронскианное решение. Динамика солитонов с источниками в неоднородных средах обсуждается в разделе 5.

2. НЕИЗОСПЕКТРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КПСИ И ЛАКСОВА ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Рассмотрим линейную задачу

$$\phi_y = A\phi, \quad \phi_t = B\phi, \quad (2.1)$$

где $A = \partial^2 + u$, а B – операторная функция от ∂ и ∂^{-1} ($\partial = \partial/\partial x$ и $\partial\partial^{-1} = \partial^{-1}\partial = 1$). Условие совместности, т.е. уравнение нулевой кривизны, имеет вид

$$A_t - B_y + [A, B] = 0. \quad (2.2)$$

Пусть оператор B имеет вид

$$B = B' + \Delta, \quad (2.3)$$

где

$$B' = b_0 \partial^3 + b_1 \partial^2 + b_2 \partial + b_3, \quad \Delta = \alpha \sum_{j=1}^N \Phi_j \partial^{-1} \Psi_j, \quad (2.4)$$

с граничным условием

$$B|_{u=0} = y \partial^3 + \frac{1}{2} x \partial^2 + \frac{1}{2} \partial, \quad (2.5)$$

а функции $\Phi_j, \Psi_j, j = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \Phi_{j,y} &= \Phi_{j,xx} + u \Phi_j, \\ -\Psi_{j,y} &= \Psi_{j,xx} + u \Psi_j. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя (2.3), перепишем уравнение (2.2) в виде

$$A_t - B'_y + [A, B'] - \Delta_y + [A, \Delta] = 0. \quad (2.7)$$

Для приведенных выше уравнений выражение $A_t - B'_y + [A, B']$ сводится к [19]

$$u_t + \frac{1}{4} y (u_{xxx} + 6u u_x + 3\partial^{-1} u_{yy}) + \partial^{-1} u_y + \frac{1}{2} x u_y, \quad (2.8)$$

если положить

$$\begin{aligned} b_0 &= -y, & b_1 &= -\frac{1}{2} x, & b_2 &= -\left(\frac{3}{2} y u + \frac{1}{2}\right), \\ b_3 &= -\left(\frac{1}{4} \partial^{-1} u + \frac{3}{4} y \partial^{-1} u_y + \frac{3}{4} y u_x + \frac{1}{2} x u\right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

тогда как оставшаяся часть уравнения (2.7) дает

$$\frac{1}{8} \sum_{j=1}^N (\Phi_j \Psi_j)_x, \quad (2.10)$$

где мы положили $\alpha = 1/16$ и использовали условия (2.6). Таким образом, комбинация (2.8) и (2.10) дает следующее неизоспектральное уравнение КПСИ:

$$4u_t + y(u_{xxx} + 6u u_x + 3\partial^{-1} u_{yy}) + 2x u_y + 4\partial^{-1} u_y + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\Phi_j \Psi_j)_x = 0, \quad (2.11)$$

$$\Phi_{j,y} = \Phi_{j,xx} + u \Phi_j, \quad -\Psi_{j,y} = \Psi_{j,xx} + u \Psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Соответствующую пару Лакса можно описать с помощью задачи (2.1), где

$$\begin{aligned} A &= \partial^2 + u, \\ B &= y \partial^3 + \frac{1}{2} x \partial^2 + \left(\frac{3}{2} y u + \frac{1}{2}\right) \partial + \frac{3}{4} y (\partial^{-1} u_y) + \frac{1}{4} (\partial^{-1} u) + \\ &\quad + \frac{3}{4} y u_x + \frac{1}{2} x u - \frac{1}{16} \sum_{j=1}^N \Phi_j \partial^{-1} \Psi_j. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Заметим, что равенства (2.11) можно вывести из спектральной задачи

$$L\phi = \lambda\phi, \quad (2.13)$$

где L – квазидифференциальный оператор

$$L = \partial + u_2\partial^{-1} + u_3\partial^{-2} + \dots + u_j\partial^{-(j-1)} + \dots, \quad (2.14)$$

а спектральный параметр λ подчиняется временной эволюции $\lambda_t \sim \lambda^2$, тогда как в изоспектральном случае $\lambda_t = 0$. Таким образом, равенства (2.11) могут описывать уединенные волны с источниками в неоднородных средах.

Отметим также, что имеется преобразование между неизоспектральным уравнением КП и изоспектральным уравнением КП [13]. Это преобразование можно распространить на неизоспектральное уравнение КПСИ (2.11) и изоспектральное уравнение КПСИ [19]

$$\begin{aligned} 4\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + 6\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + 3\partial_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N(\tilde{\Phi}_j\tilde{\Psi}_j)_{\tilde{x}} &= 0, \\ \tilde{\Phi}_{j,\tilde{y}} = \tilde{\Phi}_{j,\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}\tilde{\Phi}_j, \quad -\tilde{\Psi}_{j,\tilde{y}} = \tilde{\Psi}_{j,\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}\tilde{\Psi}_j, \quad j &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.15)$$

с парой Лакса

$$\tilde{\phi}_{\tilde{y}} = (\partial_{\tilde{x}}^2 + \tilde{u})\tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi}_{\tilde{t}} = \tilde{A}\tilde{\phi}, \quad (2.16)$$

где

$$\tilde{A} = \partial_{\tilde{x}}^3 + \frac{3}{2}\tilde{u}\partial_{\tilde{x}} + \frac{3}{4}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \frac{3}{4}(\partial_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{u}_{\tilde{y}}) - \frac{1}{16}\sum_{j=1}^N\tilde{\Phi}_j\partial_{\tilde{x}}^{-1}\tilde{\Psi}_j.$$

Преобразование описывается как

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= xy^{-1/3}, \quad \tilde{y} = 3y^{1/3}, \quad \tilde{u} = y^{2/3}\left(u - \frac{x^2}{18y^2}\right), \\ \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= y^{1/6}\phi(x, y)e^{x^2/12y}, \quad \tilde{\Phi}_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = y^{1/6}\Phi_j(x, y)e^{x^2/12y}, \\ \tilde{\Psi}_j(\tilde{x}, \tilde{y}) &= y^{1/6}\Psi_j(x, y)e^{-x^2/12y}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Это преобразование является калибровочным для уравнений (2.15) и пары Лакса (2.16). Прямая подстановка показывает, что с его помощью можно также построить линейную задачу (2.1) и соответствующую пару Лакса (2.12) для неизоспектрального уравнения КПСИ.

3. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В ФОРМЕ ХИРОТЫ

Введем преобразования зависимых переменных

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad \Phi_j = \frac{g_j}{f}, \quad \Psi_j = \frac{h_j}{f}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

где f, g_j, h_j – функции от x, y и t . Тогда неизоспектральное уравнение КПСИ (2.11) можно преобразовать к билинейному виду:

$$4D_x D_t f \cdot f + y(D_x^4 f \cdot f + 3D_y^2 f \cdot f) + 2xD_x D_y f \cdot f + 4ff_y = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N g_j h_j, \quad (3.2)$$

$$D_y g_j \cdot f = D_x^2 g_j \cdot f, \quad -D_y h_j \cdot f = D_x^2 h_j \cdot f, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где D – хорошо известный билинейный оператор Хироты [25], определяемый как

$$D_t^m D_x^n f \cdot g = (\partial_t - \partial_{t'})^m (\partial_x - \partial_{x'})^n f(t, x) g(t', x')|_{t'=t, x'=x}. \quad (3.3)$$

Чтобы получить N -солитонные решения, разложим функции f, g_j, h_j как

$$\begin{aligned} f(t, x) &= 1 + f^{(2)} \varepsilon^2 + f^{(4)} \varepsilon^4 + \dots + f^{(2j)} \varepsilon^{2j} + \dots, \\ g_j(t, x) &= g_j^{(1)} \varepsilon + g_j^{(3)} \varepsilon^3 + \dots + g_j^{(2j+1)} \varepsilon^{2j+1} + \dots, \\ h_j(t, x) &= h_j^{(1)} \varepsilon + h_j^{(3)} \varepsilon^3 + \dots + h_j^{(2j+1)} \varepsilon^{2j+1} + \dots. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$\begin{aligned} 4f_{xt}^{(2)} + y(f_{xxxx}^{(2)} + 3f_{yy}^{(2)}) + 2xf_{xy}^{(2)} + 2f_y^{(2)} &= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N g_j^{(1)} h_j^{(1)}, \\ 8f_{xt}^{(4)} + 2y(f_{xxxx}^{(4)} + 3f_{yy}^{(4)}) + 4xf_{xy}^{(4)} + 4f_y^{(4)} + \\ &+ [4D_x D_t + y(D_x^4 + 3D_y^2) + 2xD_y^2] f^{(2)} \cdot f^{(2)} + 4f^{(2)} f_y^{(2)} = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N (g_j^{(1)} h_j^{(3)} + g_j^{(3)} h_j^{(1)}), \quad \dots; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$g_{j,y}^{(1)} = g_{j,xx}^{(1)}, \quad g_{j,y}^{(3)} = g_{j,xx}^{(3)} - (D_y - D_x^2) g_j^{(1)} \cdot f^{(2)}, \quad \dots; \quad (3.6)$$

$$-h_{j,y}^{(1)} = h_{j,xx}^{(1)}, \quad -h_{j,y}^{(3)} = h_{j,xx}^{(3)} + (D_y + D_x^2) h_j^{(1)} \cdot f^{(2)}, \quad \dots. \quad (3.7)$$

Для вывода точных решений уравнения (3.2) примем, что $g_j^{(1)}$ и $h_j^{(1)}$ имеют вид

$$g_j^{(1)} = 4\sqrt{2(k_j(t) + q_j(t))} \beta_j(t) e^{\xi_j}, \quad (3.8)$$

$$\xi_j = k_j(t)x + k_j^2(t)y - \int_0^t \beta_j(\tau) d\tau + \xi_j^{(0)}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

и

$$h_j^{(1)} = 4\sqrt{2(k_j(t) + q_j(t))} \beta_j(t) e^{\eta_j}, \quad (3.9)$$

$$\eta_j = q_j(t)x - q_j^2(t)y - \int_0^t \beta_j(\tau) d\tau + \eta_j^{(0)}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где $k_j(t)$ и $q_j(t)$ удовлетворяют условиям

$$2k_{j,t}(t) = -k_j^2(t), \quad 2q_{j,t}(t) = q_j^2(t), \quad (3.10)$$

т.е.

$$k_j(t) = \frac{2}{t - 2c_j}, \quad q_j(t) = -\frac{2}{t + 2d_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.11)$$

$\xi_j^{(0)}$, $\eta_j^{(0)}$, c_j , d_j – вещественные константы, а $\beta_j(t)$ – произвольная непрерывная функция времени.

Исходя из (3.8) и (3.9) можно получить многосолитонные решения неизоспектрального уравнения КПСИ. При $N = 1$ равенства (3.8) и (3.9) принимают вид

$$g_1^{(1)} = 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} e^{\xi_1}, \quad h_1^{(1)} = 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} e^{\eta_1}. \quad (3.12)$$

Решая (3.5)–(3.7), получаем

$$f^{(2)} = e^{\xi_1 + \eta_1}, \quad f^{(2j)} = 0, \quad j = 2, 3, \dots. \quad (3.13)$$

Тогда односолитонное решение имеет вид

$$\begin{aligned} u &= 2[\ln(1 + e^{\xi_1 + \eta_1})]_{xx}, \\ \Phi_1 &= 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} \frac{e^{\xi_1}}{1 + e^{\xi_1 + \eta_1}}, \\ \Psi_1 &= 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} \frac{e^{\eta_1}}{1 + e^{\xi_1 + \eta_1}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Этот процесс можно продолжить и найти двух-, трехсолитонные решения и т.д. Некоторые формулы приведены в приложении. Вообще говоря, N -солитонное решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\mu=0,1} \exp \left[\sum_{j=1}^N \mu_j (\xi_j + \eta_j) + \sum_{1 \leq j < l}^N \mu_j \mu_l A_{jl} \right], \\ g_m &= 4\sqrt{2(k_m(t) + q_m(t))\beta_m(t)} e^{\xi_m} \sum_{\mu=0,1} \exp \left[\sum_{1 \leq j < m} \mu_j (\xi_j + \eta_j + B_{mj}) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left[\sum_{j>m}^N \mu_j (\xi_j + \eta_j + i\pi + B_{mj}) + \sum_{\substack{1 \leq j < l, \\ j, l \neq m}}^N \mu_j \mu_l A_{jl} \right], \\ h_m &= 4\sqrt{2(k_m(t) + q_m(t))\beta_m(t)} e^{\eta_m} \sum_{\mu=0,1} \exp \left[\sum_{1 \leq j < m} \mu_j (\xi_j + \eta_j + C_{mj}) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left[\sum_{j>m}^N \mu_j (\xi_j + \eta_j + i\pi + C_{mj}) + \sum_{\substack{1 \leq j < l, \\ j, l \neq m}}^N \mu_j \mu_l A_{jl} \right], \quad m = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где ξ_j определены в (3.8), η_j – в (3.9), а $k_j(t)$, $q_j(t)$ – в (3.10),

$$\begin{aligned} e^{A_{jl}} &= \frac{(k_j(t) - k_l(t))(q_j(t) - q_l(t))}{(k_j(t) + q_l(t))(k_l(t) + q_j(t))} = \frac{(c_j - c_l)(d_j - d_l)}{(c_j + d_l)(c_l + d_j)}, \\ e^{B_{mj}} &= \frac{k_m(t) - k_j(t)}{k_m(t) - q_j(t)}, \quad e^{C_{mj}} = \frac{q_m(t) - q_j(t)}{q_m(t) - k_j(t)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Сумма по $\mu = 0, 1$ относится к каждому из $\mu_j = 0, 1$, где $j = 1, 2, \dots, N$.

4. РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ВРОНСКИАНА

Теперь решим неизоспектральное уравнение КПСИ с помощью техники вронскиана. Рассмотрим вронскиан размера $N \times N$ со столбцами $(\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(N)})$, где $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)^T$ и $\phi^{(j)} = \partial^j \phi / \partial x^j$. Для вронскиана здесь и ниже мы принимаем обозначения Ниммо и Фримена [26], а именно

$$W = \begin{vmatrix} \phi_1 & \partial \phi_1 & \dots & \partial^{N-1} \phi_1 \\ \phi_2 & \partial \phi_2 & \dots & \partial^{N-1} \phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N & \partial \phi_N & \dots & \partial^{N-1} \phi_N \end{vmatrix} = |\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(N-1)}| = |\widehat{N-1}|. \quad (4.1)$$

Приведем два предложения для уравнений, связанных с уравнением КП.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [15]. *Вронскиан*

$$f = |\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(N-1)}| = |\widehat{N-1}| \quad (4.2)$$

с элементами ϕ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \phi_{j,y} &= \phi_{j,xx}, \\ \phi_{j,t} &= -y\phi_{j,xxx} - \frac{1}{2}x\phi_{j,xx} + \frac{1}{2}(N-1)\phi_{j,x}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

дает решение билинейного неизоспектрального уравнения КП

$$4D_x D_t f \cdot f + y(D_x^4 f \cdot f + 3D_y^2 f \cdot f) + 2xD_x D_y f \cdot f + 4ff_y = 0. \quad (4.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [19]. *Предположим, что функции f , g_m и h_m имеют вид*

$$\begin{aligned} f &= |\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(N-1)}| = |\widehat{N-1}|, \\ g_m &= 2\sqrt{2(k_m + q_m)\beta_m(t)} e^{\xi_m - \eta_m} |\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(N-2)}, \tau_m|, \\ h_m &= 2\sqrt{2(k_m + q_m)\beta_m(t)} |\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(N-2)}, \tau_m|, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\tau_m = (\delta_{m,1}, \delta_{m,2}, \dots, \delta_{m,N})^T$, k_m и q_m – вещественные константы, и

$$\begin{aligned} \phi_j &= e^{\xi_j} + (-1)^{j-1} e^{-\eta_j}, \\ \psi_j &= \begin{cases} (k_m - k_j)(k_j + q_m)e^{\xi_j} + (-1)^{j-1}(q_m - q_j)(q_j + k_m)e^{-\eta_j}, & j < m, \\ (k_j - k_m)(k_j + q_m)e^{\xi_j} + (-1)^{j-1}(q_j - q_m)(q_j + k_m)e^{-\eta_j}, & j > m, \end{cases} \\ \xi_j &= k_j x + k_j^2 y - 4k_j^3 t - \int_0^t \beta_j(z) dz + \xi_j^{(0)}, \\ \eta_j &= q_j x - q_j^2 y - 4q_j^3 t - \int_0^t \beta_j(z) dz + \eta_j^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Тогда функции (4.5) дают решение билинейного уравнения КПСИ

$$\begin{aligned} (D_t D_x + D_x^4 + 3D_y^2) f \cdot f &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N g_j h_j, \\ D_y g_j \cdot f &= D_x^2 g_j \cdot f, \quad -D_y h_j \cdot f = D_x^2 h_j \cdot f. \end{aligned} \quad (4.7)$$

ТЕОРЕМА. Билинейное неизоспектральное уравнение КПСИ (3.2) допускает вронскианное решение следующего вида:

$$\begin{aligned} f &= |\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(N-1)}| = |\widehat{N-1}|, \\ g_m &= G_m(t) A_m(t) B_m(t) e^{\xi_m - \eta_m} |\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(N-2)}, \tau_m|, \\ h_m &= G_m(t) |\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(N-2)}, \tau_m|, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} G_m(t) &= 4\sqrt{2(k_m(t) + q_m(t))\beta_m(t)}, \\ \phi_j &= e^{\xi_j} A_j(t) + (-1)^{j-1} e^{-\eta_j} B_j(t), \\ \psi_j &= \begin{cases} [k_m(t) - k_j(t)][k_j(t) + q_m(t)]e^{\xi_j} A_j(t) + \\ \quad + (-1)^{j-1} [q_m(t) - q_j(t)][q_j(t) + k_m(t)]e^{-\eta_j} B_j(t), & j < m, \\ [k_j(t) - k_m(t)][k_j(t) + q_m(t)]e^{\xi_j} A_j(t) + \\ \quad + (-1)^{j-1} [q_j(t) - q_m(t)][q_j(t) + k_m(t)]e^{-\eta_j} B_j(t), & j > m, \end{cases} \end{aligned}$$

$$A_{m,t}(t) = \frac{1}{2} (N-1) k_m(t) A_m(t), \quad B_{m,t}(t) = -\frac{1}{2} (N-1) q_m(t) B_m(t), \quad (4.9)$$

ξ_j и η_j определяются в (3.8), (3.9); $k_j(t)$ и $q_j(t)$ – в (3.10). Функции $A_m(t)$ и $B_m(t)$ определяются из (4.9):

$$A_m(t) = (t - 2c_m)^{N-1} + A_0, \quad B_m(t) = (t + 2d_m)^{N-1} + B_0 \quad (4.10)$$

с вещественными константами A_0 и B_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что функции ϕ_j удовлетворяют соотношениям

$$\phi_{j,y} = \phi_{j,xx} \quad (4.11)$$

и

$$\phi_{j,t} = -y\phi_{j,xxx} - \frac{1}{2} x\phi_{j,xx} + \frac{1}{2} (N-1)\phi_{j,x} + \beta_j(t)[-A_j(t)e^{\xi_j} + (-1)^{j-1}B_j(t)e^{-\eta_j}]. \quad (4.12)$$

Перепишем первое уравнение в (3.2) в виде

$$8(ff_{xt} - f_x f_t) + y(D_x^4 f \cdot f + 3D_y^2 f \cdot f) + 2x D_x D_y f \cdot f + 4ff_y = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N g_j h_j. \quad (4.13)$$

Уравнение (4.12) можно формально разбить на две части, одна из которых содержит $-y\phi_{j,xxx} - x\phi_{j,xx}/2 + (N-1)\phi_{j,x}/2$, а другая $-\beta_j(t)[-A_j(t)e^{\xi_j} + (-1)^{j-1}B_j(t)e^{-\eta_j}]$. Первая часть, т.е. $\phi_{j,t} = -y\phi_{j,xxx} - x\phi_{j,xx}/2 + (N-1)\phi_{j,x}/2$, вместе с (4.11) является не чем иным, как вронскианными условиями (4.3) для неизоспектрального уравнения КП без источников (см. предложение 1). Это означает, что можно формально рассматривать остальную часть (4.13) после отбрасывания неизоспектральной части, т.е. $8(ff_{xt} - f_x f_t) = -(1/2) \sum_{j=1}^N g_j h_j$ с вронскианными условиями (4.11) и $\phi_{j,t} = \beta_j(t)[-A_j(t)e^{\xi_j} + (-1)^{j-1}B_j(t)e^{-\eta_j}]$. Эту проверку можно выполнить аналогично доказательству предложения 2, данному в работе [19], что завершает доказательство теоремы.

5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

5.1. Односолитонные характеристики. Односолитонное решение (3.14) имеет вид

$$\begin{aligned} u &= 8 \frac{(c_1 + d_1)^2}{(t - 2c_1)^2(t + 2d_1)^2} \operatorname{sch}^2 \frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \\ \Phi_1 &= 4 \sqrt{\frac{2(c_1 + d_1)\beta_1(t)}{(t - 2c_1)(t + 2d_1)}} e^{(\xi_1 - \eta_1)/2} \operatorname{sch} \frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \\ \Psi_1 &= 4 \sqrt{\frac{2(c_1 + d_1)\beta_1(t)}{(t - 2c_1)(t + 2d_1)}} e^{(-\xi_1 + \eta_1)/2} \operatorname{sch} \frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где ξ_1 и η_1 даются равенствами (3.8) и (3.9). Решение (5.1) описывает перемещение солитона с убывающей амплитудой и зависящим от времени верхним следом

$$(k_1(t) + q_1(t))x + (k_1^2(t) - q_1^2(t))y - 2 \int_0^t \beta_1(\tau) d\tau + \xi_1^{(0)} + \eta_1^{(0)} = 0. \quad (5.2)$$

Наклон y по отношению к x составляет

$$S = -\frac{(t - 2c_1)(t + 2d_1)}{4(t - c_1 + d_1)}. \quad (5.3)$$

Для любого фиксированного момента времени t этот верхний след является прямой линией с зависящим от времени наклоном. Таким образом, (5.1) дает линейный солитон с зависящей от времени амплитудой

$$A = \frac{8(c_1 + d_1)^2}{(t - 2c_1)^2(t + 2d_1)^2}. \quad (5.4)$$

При $t = 2c_1$ или $t = -2d_1$ появляются раздутия.

Рис. 1. Форма и движение односолитонного решения неизоспектрального уравнения КПСИ вида (5.1) при $t = 0.5$ и $t = 1$, $c_1 = -1$, $d_1 = 20$, $\beta_1(t) = 0.5(1 - \sin t)$ и $\xi_1^{(0)} = 0$, $\eta_1^{(0)} = 0$.

Наличие источника, роль которого играет $\beta_1(t)$, приводит к изменению скорости, но не формы солитона. На рис. 1 представлены форма и движение одного солитона с зависящими от времени амплитудой и наклоном.

5.2. Двухсолитонное рассеяние. Рассмотрим двухсолитонное решение, приведенное в (П.3). В этом случае

$$u = 2(\ln f)_{xx}, \quad f = 1 + e^{\xi_1 + \eta_1} + e^{\xi_2 + \eta_2} + A_{12}e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2}. \quad (5.5)$$

Сначала перепишем приведенную функцию f в виде

$$\begin{aligned} f &= 1 + e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + A_{12}e^{\zeta_1 + \zeta_2}, \\ \zeta_j &= \xi_j + \eta_j = \chi_j(x + \nu_j y) - 2 \int_0^t \beta_j(\tau) d\tau + \zeta_j^{(0)}, \\ \chi_j &= k_j(t) + q_j(t), \quad \nu_j = k_j(t) - q_j(t), \quad \zeta_j^{(0)} = \xi_j^{(0)} + \eta_j^{(0)}, \quad j = 1, 2, \\ A_{12} &= \frac{(c_1 - c_2)(d_1 - d_2)}{(c_1 + d_2)(c_2 + d_1)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Исследуем поведение двухсолитонного решения при различных значениях A_{12} . Будем предполагать, что

$$\chi_j > 0, \quad \nu_1 - \nu_2 > 0. \quad (5.7)$$

Это достаточно разумно. Например, при $-d_1 < c_1 < c_2 < -d_2$ можно найти

$$t \in (H, -2d_2), \quad H = 2 \frac{c_1 d_1 - c_2 d_2 + \sqrt{(c_1 - c_2)(d_1 - d_2)(c_1 + d_2)(c_2 + d_1)}}{c_2 - c_1 + d_1 - d_2}, \quad (5.8)$$

что гарантирует справедливость неравенств (5.7), и можно доказать, что $H < -2d_2$ при условии $-d_1 < c_1 < c_2 < -d_2$. В других случаях рассмотрение аналогично.

5.2.1. *Классические двухсолитонные решения* ($0 < A_{12} < \infty$, $A_{12} \neq 1$). В этом случае величина

$$\Delta = -\frac{1}{2} \ln A_{12} \quad (5.9)$$

является конечной и ненулевой. Рассмотрим асимптотический вид решения при $y \rightarrow \pm\infty$, когда t остается фиксированным. При условии $0 < A_{12} < \infty$, $A_{12} \neq 1$, получаем

$$\begin{aligned} (c_1 - c_2)(d_1 - d_2) &> 0, & \text{или} & & (c_1 - c_2)(d_1 - d_2) < 0, \\ (c_1 + d_2)(c_2 + d_1) &> 0 & & & (c_1 + d_2)(c_2 + d_1) < 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Условия, которые удовлетворяют (5.10), представлены в табл. 1.

Таблица 1

$c_1 > c_2, d_1 > d_2$	$c_1 > c_2, d_1 < d_2$	$c_1 < c_2, d_1 > d_2$	$c_1 < c_2, d_1 < d_2$
$c_1 > c_2 > -d_2 > -d_1$	$c_1 > -d_1 > c_2 > -d_2$	$c_1 < -d_1 < c_2 < -d_2$	$c_1 < c_2 < -d_2 < -d_1$
$c_1 > -d_2 > c_2 > -d_1$	$c_1 > -d_1 > -d_2 > c_2$	$c_1 < -d_1 < -d_2 < c_2$	$c_1 < -d_2 < c_2 < -d_1$
$-d_2 > c_1 > -d_1 > c_2$	$-d_1 > c_1 > c_2 > -d_2$	$-d_1 < c_1 < c_2 < -d_2$	$-d_2 < c_1 < -d_1 < c_2$
$-d_2 > -d_1 > c_1 > c_2$	$-d_1 > c_1 > -d_2 > c_2$	$-d_1 < c_1 < -d_2 < c_2$	$-d_2 < -d_1 < c_1 < c_2$

Сначала выпрямим траектории движения ζ_j -солитона и введем переменную $X = x + \nu_1 y$, тогда в системе координат (X, y) получим

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \chi_1 X - 2 \int_0^t \beta_1(\tau) d\tau + \zeta_1^{(0)}, \\ \zeta_2 &= \chi_2 X + \chi_2(\nu_2 - \nu_1)y - 2 \int_0^t \beta_2(\tau) d\tau + \zeta_2^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Если система координат сопутствует ζ_1 -солитону, т.е. координата X остается неизменной, пределы для ζ_2 равны

$$\zeta_2 \rightarrow \begin{cases} -\infty, & y \rightarrow +\infty, \\ +\infty, & y \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.12)$$

Тогда пределы для u равны

$$u \rightarrow \begin{cases} \frac{\chi_1^2}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{\zeta_1}{2}, & y \rightarrow +\infty, \\ \frac{\chi_1^2}{2} \operatorname{sch}^2 \left(\frac{\zeta_1}{2} - \Delta \right), & y \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.13)$$

Далее, аналогично приведенному выше рассмотрению, вводя переменную $Y = x + \nu_2 y$, легко получаем

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \chi_2 Y - 2 \int_0^t \beta_2(\tau) d\tau + \zeta_2^{(0)}, \\ \zeta_1 &= \chi_1 Y + \chi_1(\nu_1 - \nu_2)y - 2 \int_0^t \beta_1(\tau) d\tau + \zeta_1^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

В системе координат (Y, y) с постоянной координатой Y пределы для ζ_1 равны

$$\zeta_1 \rightarrow \begin{cases} +\infty, & y \rightarrow +\infty, \\ -\infty, & y \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.15)$$

Тогда пределы для u равны

$$u \rightarrow \begin{cases} \frac{\chi_2^2}{2} \operatorname{sch}^2 \left(\frac{\zeta_2}{2} - \Delta \right), & y \rightarrow +\infty, \\ \frac{\chi_2^2}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{\zeta_2}{2}, & y \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.16)$$

Отсюда можно заключить, что двухсолитонное решение имеет четыре ветви, которые смещаются посредством фазового сдвига $2\Delta/\chi_1$ или $2\Delta/\chi_2$. Рис. 2 демонстрирует взаимодействия двух солитонов в два фиксированных момента времени

Рис. 2. Двухсолитонные взаимодействия неизоспектрального уравнения КПСИ вида (П.3) при $t = -0.1$ и $t = 0.5$, $c_1 = -1$, $d_1 = 20$, $c_2 = 1$, $d_2 = -3$, $\beta_1(t) = 0.5e^{-0.5t}$, $\beta_2(t) = -0.5e^{0.5t}$ и $\zeta_1^{(0)} = \zeta_2^{(0)} = 0$.

$t = -0.1$ и $t = 0.5$. Ясно видно смещение после взаимодействия и изменение амплитуд и координат.

5.2.2. *Вырожденный солитон* ($A_{12} = 1$). В данном случае известно, что $A_{12} = 1$ эквивалентно выбору одного из трех вариантов: а) $c_1 = -d_1$, $c_2 \neq -d_2$; б) $c_2 = -d_2$, $c_1 \neq -d_1$; в) $c_1 = -d_1$, $c_2 = -d_2$. При $c_1 = -d_1$, $c_2 \neq -d_2$

$$f = (1 + e^{\zeta_1^{(0)}})(1 + e^{\zeta_2}), \quad u = 8 \frac{(1 + e^{\zeta_1^{(0)}})(c_2 + d_2)^2}{(t - 2c_2)^2(t + 2d_2)^2} \operatorname{sch}^2 \frac{\zeta_2}{2}. \quad (5.17)$$

При $c_2 = -d_2$, $c_1 \neq -d_1$

$$f = (1 + e^{\zeta_2^{(0)}})(1 + e^{\zeta_1}), \quad u = 8 \frac{(1 + e^{\zeta_2^{(0)}})(c_1 + d_1)^2}{(t - 2c_1)^2(t + 2d_1)^2} \operatorname{sch}^2 \frac{\zeta_1}{2}. \quad (5.18)$$

При $c_1 = -d_1$, $c_2 = -d_2$

$$f = 1 + e^{\zeta_1^{(0)}} + e^{\zeta_2^{(0)}} + e^{\zeta_1^{(0)} + \zeta_2^{(0)}}, \quad u = 0. \quad (5.19)$$

Рис. 3. Форма вырожденного двухсолитонного решения ($c_1 = -d_1$) вида (5.18) в фиксированный момент времени $t = 1.2$, $c_1 = -d_1 = 1$, $c_2 = 2$, $d_2 = 2$, $\beta_1(t) = 0.5e^{-0.5t}$, $\beta_2(t) = -0.5e^{0.5t}$ и $\zeta_1^{(0)} = \zeta_2^{(0)} = 0$.

Равенства (5.17) и (5.18) показывают, что двухсолитонное решение вырождается в односолитонное. Рис. 3 демонстрирует этот явление.

5.2.3. *Двухсолитонные резонансы* ($A_{12} = 0$, $A_{12} \rightarrow +\infty$). В случае $A_{12} = 0$ должны быть выполнены условия, приведенные в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2

$c_1 = c_2 \neq -d_1 \neq -d_2$	$-c_1 \neq -c_2 \neq d_1 = d_2$	$c_1 = c_2 \neq -d_1 = -d_2$
$c_1 = c_2 > -d_1 > -d_2$	$-c_1 > -c_2 > d_1 = d_2$	$-d_1 = -d_2 > c_1 = c_2$
$-d_1 > -d_2 > c_1 = c_2$	$-c_1 > d_1 = d_2 > -c_2$	$c_1 = c_2 > -d_1 = -d_2$
$-d_1 > c_1 = c_2 > -d_2$	$d_1 = d_2 > -c_1 > -c_2$	
$c_1 = c_2 > -d_2 > -d_1$	$-c_2 > -c_1 > d_1 = d_2$	
$-d_2 > -d_1 > c_1 = c_2$	$-c_2 > d_1 = d_2 > -c_1$	
$-d_2 > c_1 = c_2 > -d_1$	$d_1 = d_2 > -c_2 > -c_1$	

При этих условиях первое равенство в (5.6) сводится к виду

$$f = 1 + e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2}. \quad (5.20)$$

Асимптотический анализ в данном случае подобен тому, который применялся в п. 5.2.1. Предположим, что $c_1 = c_2$, $d_1 \neq d_2$, а также что $\chi_j > 0$, $\nu_1 - \nu_2 > 0$. В системе координат $(X = x + \nu_1 y, y)$, если координата X остается постоянной, пределы равны

$$u \rightarrow \begin{cases} 0, & y \rightarrow -\infty, \\ \frac{\chi_1^2}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{\zeta_1}{2}, & y \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (5.21)$$

В системе координат $(Y = x + \nu_2 y, y)$, если координата Y остается постоянной, пределы равны

$$u \rightarrow \begin{cases} \frac{\chi_2^2}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{\zeta_2}{2}, & y \rightarrow -\infty, \\ 0, & y \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (5.22)$$

В системе координат $(Z = x - (q_1(t) + q_2(t))y, y)$, если координата Z остается постоянной, пределы равны

$$u \rightarrow \begin{cases} 0, & y \rightarrow -\infty, \\ \frac{(\chi_1 - \chi_2)^2}{2} \operatorname{sch}^2 \left(\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} \right), & y \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (5.23)$$

Такое интересное асимптотическое поведение приводит к так называемым *резонансам линейных солитонов*, изображенным на рис. 4а, где решение имеет три ветви, причем каждая из них односолитонная. Это резонансное свойство впервые исследовалось для изоспектрального уравнения КП в работе [22], а также подробнее в работе [23]. В нашем же случае амплитуды и наклоны этих трех ветвей изменяются с течением времени, причем зависимость от времени обусловлена влиянием неоднородностей среды.

Рис. 4. Изображение двухсолитонных резонансов, заданных в (5.20), при $t = 0$, $\beta_1(t) = 0.5e^{-0.5t}$, $\beta_2(t) = -0.5e^{0.5t}$, $x \in [-40, 40]$, $y \in [-20, 20]$, $\zeta_1^{(0)} = \zeta_2^{(0)} = 0$: $c_1 = c_2 = 2$, $d_1 = -1$, $d_2 = 1$ (а); $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $d_1 = d_2 = 2$ (б). Высота показана затемнением.

Аналогично при $c_1 \neq c_2$ и $d_1 = d_2$ в системе координат $(X = x + \nu_1 y, y)$, сопутствующей ζ_1 -солитону, имеем

$$u \rightarrow \begin{cases} \frac{\chi_1^2}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{\zeta_1}{2}, & y \rightarrow -\infty, \\ 0, & y \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (5.24)$$

в системе координат $(Y = x + \nu_2 y, y)$, сопутствующей ζ_2 -солитону, имеем

$$u \rightarrow \begin{cases} 0, & y \rightarrow -\infty, \\ \frac{\chi_2^2}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{\zeta_2}{2}, & y \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (5.25)$$

в системе координат $(Z = x - (q_1(t) + q_2(t))y, y)$, сопутствующей $(\zeta_1 - \zeta_2)$ -солитону, имеем

$$u \rightarrow \begin{cases} \frac{(\chi_1 - \chi_2)^2}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}, & y \rightarrow -\infty, \\ 0, & y \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (5.26)$$

Соответствующее поведение изображено на рис. 4б.

Наконец, рассмотрим специальный случай, когда учитывается влияние источников. Рассмотрим двухсолитонные взаимодействия при $c_1 = c_2$ и $d_1 = d_2$, но при $\beta_1(t) \neq \beta_2(t)$. Будем называть два возникающих здесь солитона $\tilde{\zeta}_1$ -солитоном и $\tilde{\zeta}_2$ -солитоном. В этом случае два солитона почти одинаковы, различны лишь функции $\beta_j(t)$, $j = 1, 2$. Поскольку в рамках приведенного выше асимптотического анализа при фиксированном времени нельзя увидеть эффектов, обусловленных функциями $\beta_j(t)$, ниже для изучения влияния источника мы фиксируем y и рассматриваем асимптотическое поведение при $t \rightarrow \pm\infty$.

Предположим, что функции $\{\beta_j(t)\}_{j=1,2}$ удовлетворяют условиям

$$\int_0^t (\beta_1(\tau) - \beta_2(\tau)) d\tau \rightarrow \begin{cases} +\infty, & t \rightarrow +\infty, \\ -\infty, & t \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.27)$$

Рассмотрим систему координат, сопутствующую $\tilde{\zeta}_1$ -солитону,

$$\left(X = \tilde{\zeta}_1 = \tilde{\chi}_1(x + \tilde{\nu}_1 y) - 2 \int_0^t \beta_1(\tau) d\tau + \tilde{\zeta}_1^{(0)}, t \right), \quad (5.28)$$

где координата X остается постоянной, но в силу (5.27) имеем

$$\tilde{\zeta}_2 = X + 2 \int_0^t (\beta_1(\tau) - \beta_2(\tau)) d\tau - \tilde{\zeta}_1^{(0)} + \tilde{\zeta}_2^{(0)} \rightarrow \begin{cases} +\infty, & t \rightarrow +\infty, \\ -\infty, & t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Тогда получаем

$$u \rightarrow \begin{cases} 0, & t \rightarrow +\infty, \\ \frac{\tilde{\chi}_1^2}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{\tilde{\zeta}_1}{2}, & t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Аналогично в системе

$$\left(Y = \tilde{\zeta}_2 = \tilde{\chi}_2(x + \tilde{\nu}_2 y) - 2 \int_0^t \beta_2(\tau) d\tau + \tilde{\zeta}_2^{(0)}, t \right), \quad (5.29)$$

которая сопутствует $\tilde{\zeta}_2$ -солитону, имеем

$$u \rightarrow \begin{cases} \frac{\tilde{\chi}_2^2}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{\tilde{\zeta}_2}{2}, & t \rightarrow +\infty, \\ 0, & t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Таким образом, можно заключить, что для конечных состояний двух солитонов, возникающих в специальных случаях, при условии (5.27) остаются только две ветви. Рис. 5в позволяет ясно увидеть, что после взаимодействия только две ветви остаются в системе (x, t) с постоянным y , где не наблюдается нормального рассеяния $\tilde{\zeta}_1$ - и $\tilde{\zeta}_2$ -солитонов. Такое интересное поведение $(1+1)$ -мерной системы с источниками было впервые описано в работе [21], это подобно духовым солитонам взаимодействующего уравнения Кортевега–де Фриза [24], [27].

Рис. 5. Двухсолитонный резонанс ($c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$) неизоспектрального уравнения КПСИ: изображение $\tilde{\zeta}_1$ -солитона, заданного в (5.1), $y = 0$, $c_1 = 1$, $d_1 = 2$, $\beta_1(t) = 0.5e^{-0.5t}$ и $\tilde{\zeta}_1^{(0)} = 0$ (а); изображение $\tilde{\zeta}_2$ -солитона, заданного в (5.1), $y = 0$, $c_2 = 1$, $d_2 = 2$, $\beta_2(t) = -0.5e^{0.5t}$ и $\tilde{\zeta}_2^{(0)} = 0$ (б); изображение солитона, заданного в (5.20), $y = 0$, $c_1 = c_2 = 1$, $d_1 = d_2 = 2$, $\beta_1(t) = 0.5e^{-0.5t}$, $\beta_2(t) = -0.5e^{0.5t}$ и $\tilde{\zeta}_1^{(0)} = \tilde{\zeta}_2^{(0)} = 0$ (в). Высота показана затемнением; $x \in [-40, 40]$, $t \in [-8, 8]$.

В случае $A_{12} \rightarrow +\infty$ введем преобразование $e^{\zeta_2} = A_{12}^{-1} e^{\zeta_2}$, тогда двухсолитонные резонансы можно рассматривать точно так же, как случай $A_{12} = 0$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены N -солитонные решения неизоспектрального уравнения КПСИ с помощью метода Хироты и техники вронскиана. Также исследованы неизоспектральная динамика и эффекты источников для неизоспектрального уравнения КПСИ. Рассмотрены односолитонные характеристики и двухсолитонные взаимодействия. Наше исследование показывает, что наличие источников может приводить к зависящему от времени фазовому сдвигу для каждого линейного солитона, но не может изменить форму солитона. Более того, некоторые специальные источники также могут приводить к возникновению духовых солитонов при фиксированном y .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Двухсолитонное и трехсолитонное решения неизоспектрального уравнения КПСИ

Если $N=2$, то двухсолитонное решение можно получить в виде (3.8), (3.9), где $j = 1, 2$. Из (3.5)–(3.7) получаем

$$\begin{aligned}
 f^{(2)} &= e^{\xi_1 + \eta_1} + e^{\xi_2 + \eta_2}, \\
 g_1^{(3)} &= 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} \frac{k_2(t) - k_1(t)}{k_1(t) + q_2(t)} e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_2 + i\pi}, \\
 g_2^{(3)} &= 4\sqrt{2(k_2(t) + q_2(t))\beta_2(t)} \frac{k_2(t) - k_1(t)}{k_2(t) + q_1(t)} e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1^{(3)} &= 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} \frac{q_2(t) - q_1(t)}{k_2(t) + q_1(t)} e^{\xi_2 + \eta_1 + \eta_2 + i\pi}, \\
h_2^{(3)} &= 4\sqrt{2(k_2(t) + q_2(t))\beta_2(t)} \frac{q_2(t) - q_1(t)}{k_1(t) + q_2(t)} e^{\xi_1 + \eta_1 + \eta_2}, \\
f^{(4)} &= e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + A_{12}}
\end{aligned} \tag{П.1}$$

и

$$e^{A_{12}} = \frac{(k_1(t) - k_2(t))(q_2(t) - q_1(t))}{(k_1(t) + q_2(t))(k_2(t) + q_1(t))}. \tag{П.2}$$

Таким образом, двухсолитонное решение имеет вид

$$\begin{aligned}
u &= 2[\ln(1 + e^{\xi_1 + \eta_1} + e^{\xi_2 + \eta_2} + e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + A_{12}})]_{xx}, \\
\Phi_1 &= 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} \frac{e^{\xi_1} + \frac{k_2(t) - k_1(t)}{k_1(t) + q_2(t)} e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_2 + i\pi}}{1 + e^{\xi_1 + \eta_1} + e^{\xi_2 + \eta_2} + e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + A_{12}}}, \\
\Phi_2 &= 4\sqrt{2(k_2(t) + q_2(t))\beta_2(t)} \frac{e^{\xi_2} + \frac{k_2(t) - k_1(t)}{k_2(t) + q_1(t)} e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_1}}{1 + e^{\xi_1 + \eta_1} + e^{\xi_2 + \eta_2} + e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + A_{12}}}, \\
\Psi_1 &= 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} \frac{e^{\eta_1} + \frac{q_2(t) - q_1(t)}{q_1(t) + k_2(t)} e^{\xi_2 + \eta_1 + \eta_2 + i\pi}}{1 + e^{\xi_1 + \eta_1} + e^{\xi_2 + \eta_2} + e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + A_{12}}}, \\
\Psi_2 &= 4\sqrt{2(k_2(t) + q_2(t))\beta_2(t)} \frac{e^{\eta_2} + \frac{q_2(t) - q_1(t)}{q_2(t) + k_1(t)} e^{\xi_1 + \eta_1 + \eta_2}}{1 + e^{\xi_1 + \eta_1} + e^{\xi_2 + \eta_2} + e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + A_{12}}}.
\end{aligned} \tag{П.3}$$

Более того, согласно (3.11) мы знаем, что коэффициент (П.2) не зависит от t .

Если положить $N = 3$, то трехсолитонное решение будет получено с помощью процедуры, похожей на продемонстрированную в односолитонном и двухсолитонном случаях. Будем по-прежнему исходить из выражений (3.8) и (3.9), где $j = 1, 2, 3$. Трехсолитонное решение можно получить как

$$f^{(2)} = e^{\xi_1 + \eta_1} + e^{\xi_2 + \eta_2} + e^{\xi_3 + \eta_3}, \tag{П.4}$$

и

$$\begin{aligned}
g_1^{(3)} &= 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} \left[\frac{k_2(t) - k_1(t)}{k_1(t) + q_2(t)} e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_2 + i\pi} + \frac{k_3(t) - k_1(t)}{k_1(t) + q_3(t)} e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_3 + i\pi} \right], \\
g_2^{(3)} &= 4\sqrt{2(k_2(t) + q_2(t))\beta_2(t)} \left[\frac{k_2(t) - k_1(t)}{k_2(t) + q_1(t)} e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_1} + \frac{k_2(t) - k_3(t)}{k_2(t) + q_3(t)} e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_3} \right], \\
g_3^{(3)} &= 4\sqrt{2(k_3(t) + q_3(t))\beta_3(t)} \left[\frac{k_3(t) - k_1(t)}{k_3(t) + q_1(t)} e^{\xi_1 + \xi_3 + \eta_1 + i\pi} + \frac{k_3(t) - k_2(t)}{k_3(t) + q_2(t)} e^{\xi_2 + \xi_3 + \eta_2 + i\pi} \right];
\end{aligned} \tag{П.5}$$

$$\begin{aligned}
h_1^{(3)} &= 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} \left[\frac{q_2(t) - q_1(t)}{k_2(t) + q_1(t)} e^{\xi_2 + \eta_1 + \eta_2 + i\pi} + \frac{q_3(t) - q_1(t)}{k_3(t) + q_1(t)} e^{\xi_3 + \eta_1 + \eta_3 + i\pi} \right], \\
h_2^{(3)} &= 4\sqrt{2(k_2(t) + q_2(t))\beta_2(t)} \left[\frac{q_2(t) - q_1(t)}{k_1(t) + q_2(t)} e^{\xi_1 + \eta_1 + \eta_2} + \frac{q_2(t) - q_3(t)}{k_3(t) + q_2(t)} e^{\xi_3 + \eta_2 + \eta_3} \right], \\
h_3^{(3)} &= 4\sqrt{2(k_3(t) + q_3(t))\beta_3(t)} \left[\frac{q_3(t) - q_1(t)}{k_1(t) + q_3(t)} e^{\xi_1 + \eta_1 + \eta_3 + i\pi} + \frac{q_3(t) - q_2(t)}{k_2(t) + q_3(t)} e^{\xi_2 + \eta_2 + \eta_3 + i\pi} \right];
\end{aligned} \tag{П.6}$$

$$\begin{aligned}
f^{(4)} = & \frac{(k_1(t) - k_2(t))(q_1(t) - q_2(t))}{(k_1(t) + q_2(t))(k_2(t) + q_1(t))} e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2} + \\
& + \frac{(k_1(t) - k_3(t))(q_1(t) - q_3(t))}{(k_1(t) + q_3(t))(k_3(t) + q_1(t))} e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_3 + \eta_3} + \\
& + \frac{(k_2(t) - k_3(t))(q_2(t) - q_3(t))}{(k_2(t) + q_3(t))(k_3(t) + q_2(t))} e^{\xi_2 + \eta_2 + \xi_3 + \eta_3},
\end{aligned} \tag{II.7}$$

$$\begin{aligned}
g_1^{(5)} = & 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} \times \\
& \times \frac{(k_2(t) - k_1(t))(k_3(t) - k_1(t))(k_2(t) - k_3(t))(q_2(t) - q_3(t))}{(k_1(t) + q_2(t))(k_1(t) + q_3(t))(k_2(t) + q_3(t))(k_3(t) + q_2(t))} \times \\
& \times e^{\xi_1 + \xi_2 + \eta_2 + \xi_3 + \eta_3 + 2i\pi}, \\
g_2^{(5)} = & 4\sqrt{2(k_2(t) + q_2(t))\beta_2(t)} \times \\
& \times \frac{(k_2(t) - k_1(t))(k_1(t) - k_3(t))(k_2(t) - k_3(t))(q_1(t) - q_3(t))}{(k_2(t) + q_1(t))(k_2(t) + q_3(t))(k_1(t) + q_3(t))(k_3(t) + q_1(t))} \times \\
& \times e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \xi_3 + \eta_3},
\end{aligned} \tag{II.8}$$

$$\begin{aligned}
g_3^{(5)} = & 4\sqrt{2(k_3(t) + q_3(t))\beta_3(t)} \times \\
& \times \frac{(k_3(t) - k_1(t))(k_3(t) - k_2(t))(k_1(t) - k_2(t))(q_1(t) - q_2(t))}{(k_3(t) + q_1(t))(k_3(t) + q_2(t))(k_1(t) + q_2(t))(k_2(t) + q_1(t))} \times \\
& \times e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + \xi_3 + 2i\pi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1^{(5)} = & 4\sqrt{2(k_1(t) + q_1(t))\beta_1(t)} \times \\
& \times \frac{(q_1(t) - q_2(t))(q_1(t) - q_3(t))(q_2(t) - q_3(t))(k_2(t) - k_3(t))}{(q_1(t) + k_2(t))(q_1(t) + k_3(t))(q_2(t) + k_3(t))(q_3(t) + k_2(t))} \times \\
& \times e^{\eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + \xi_3 + \eta_3 + 2i\pi}, \\
h_2^{(5)} = & 4\sqrt{2(k_2(t) + q_2(t))\beta_2(t)} \times \\
& \times \frac{(q_2(t) - q_1(t))(q_1(t) - q_3(t))(q_2(t) - q_3(t))(k_1(t) - k_3(t))}{(q_2(t) + k_1(t))(q_2(t) + k_3(t))(q_1(t) + k_3(t))(q_3(t) + k_1(t))} \times \\
& \times e^{\xi_1 + \eta_1 + \eta_2 + \xi_3 + \eta_3},
\end{aligned} \tag{II.9}$$

$$\begin{aligned}
h_3^{(5)} = & 4\sqrt{2(k_3(t) + q_3(t))\beta_3(t)} \times \\
& \times \frac{(q_3(t) - q_1(t))(q_3(t) - q_2(t))(q_1(t) - q_2(t))(k_1(t) - k_2(t))}{(q_3(t) + k_1(t))(q_3(t) + k_2(t))(q_1(t) + k_2(t))(q_2(t) + k_1(t))} \times \\
& \times e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + \eta_3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(6)} = & [k_1(t) - k_2(t))(k_1(t) - k_3(t))(k_2(t) - k_3(t))(q_1(t) - q_2(t)) \times \\
& \times (q_1(t) - q_3(t))(q_2(t) - q_3(t))][k_1(t) + q_2(t))(k_1(t) + q_3(t)) \times \\
& \times (k_2(t) + q_1(t))(k_2(t) + q_3(t))(k_3(t) + q_1(t))(k_3(t) + q_2(t))]^{-1} \times \\
& \times e^{\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2 + \xi_3 + \eta_3}.
\end{aligned} \tag{II.10}$$

Кроме того, с помощью (3.11) можно показать, что коэффициент (П.10) также не зависит от t . Этот результат является весьма специальным для неизоспектрального уравнения КП.

Благодарности. Авторы глубоко благодарны рецензентам за указание на работу [13] и преобразования (2.17). Работа поддержана Natural Science Foundation of Ghina (гранты № 10371070, 10671121) и Special Funds for Major Specialities of Shanghai Educational Committee.

Список литературы

- [1] V. K. Mel'nikov, *Phys. Lett. A*, **133**:9 (1988), 493–496.
- [2] V. K. Mel'nikov, *Comm. Math. Phys.*, **126**:1 (1989), 201–215.
- [3] V. K. Mel'nikov, *Inverse Problems*, **8**:1 (1992), 133–147.
- [4] J. Leon, A. Latifi, *J. Phys. A*, **23**:8 (1990), 1385–1403.
- [5] Y. B. Zeng, W. X. Ma, R. L. Lin, *J. Math. Phys.*, **41**:8 (2000), 5453–5489.
- [6] Y. B. Zeng, W. X. Ma, Y. J. Shao, *J. Math. Phys.*, **42**:5 (2001), 2113–2128.
- [7] H. H. Chen, C. S. Liu, *Phys. Rev. Lett.*, **37**:11 (1976), 693–697.
- [8] R. Hirota, J. Satsuma, *J. Phys. Soc. Japan*, **41**:6 (1976), 2141–2142.
- [9] F. Calogero, A. Degasperis, *Comm. Math. Phys.*, **63**:2 (1978), 155–176.
- [10] M. R. Gupta, *Phys. Lett. A*, **72**:6 (1979), 420–422.
- [11] M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa, *J. Phys. Soc. Japan*, **46**:6 (1979), 1965–1966.
- [12] С. П. Бурцев, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *ТМФ*, **70**:3 (1987), 323–341.
- [13] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [14] T.-K. Ning, D.-J. Zhang, D.-Y. Chen, S.-F. Deng, *Chaos Solitons Fractals*, **25**:3 (2005), 611–620.
- [15] S.-F. Deng, D.-J. Zhang, D.-Y. Chen, *J. Phys. Soc. Japan*, **74**:9 (2005), 2383–2385.
- [16] S.-F. Deng, Z.-Y. Qin, *Phys. Lett. A*, **357**:6 (2006), 467–474.
- [17] D.-J. Zhang, *J. Phys. Soc. Japan*, **71**:11 (2002), 2649–2656.
- [18] D.-J. Zhang, *Chaos Solitons Fractals*, **18**:1 (2003), 31–43.
- [19] S.-F. Deng, D.-Y. Chen, D.-J. Zhang, *J. Phys. Soc. Japan*, **72**:9 (2003), 2184–2192.
- [20] X.-B. Hu, H.-Y. Wang, *Inverse Problems*, **22**:5 (2006), 1903–1920.
- [21] D.-J. Zhang, J.-B. Bi, H.-H. Hao, *J. Phys. A*, **39**:47 (2006), 14627–14648.
- [22] J. W. Miles, *J. Fluid Mech.*, **79**:1 (1977), 171–179.
- [23] K. Ohkuma, M. Wadati, *J. Phys. Soc. Japan*, **52**:3 (1983), 749–760.
- [24] J. Hietarinta, “Scattering of solitons and dromions”, *Scattering: Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*, V. 2, eds. R. Pike, P. Sabatier, Academic Press, London, 2002, 1773–1791.
- [25] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge Tracts in Math., **155**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [26] N. C. Freeman, J. J. C. Nimmo, *Phys. Lett. A*, **95**:1 (1983), 1–3.
- [27] R. Hirota, J. Satsuma, *Phys. Lett. A*, **85**:8–9 (1981), 407–408.

Поступила в редакцию 17.01.2008,
после доработки 10.03.2008