Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Комарова, И. С. Кремнев, М. Ю. Налимов, Семейство инстантонов модели Крейчнана с замороженным полем скорости, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 2, 200–213

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 09:06:16

© 2009 г.

М. В. Комарова*, И. С. Кремнев[†],
М. Ю. Налимов*

СЕМЕЙСТВО ИНСТАНТОНОВ МОДЕЛИ КРЕЙЧНАНА С ЗАМОРОЖЕННЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТИ

Найдено семейство инстантонов для модели Крейчнана с замороженным полем скорости. С их помощью исследована асимптотика высоких порядков рядов теории возмущений, построенных для функции отклика. Показано, что, хотя число диаграмм с ростом порядка теории возмущений растет факториально, ряды теории возмущений имеют конечный, а иногда и бесконечный радиус сходимости. Тем самым опровергнуто распространенное утверждение о том, что тип сходимости рядов можно определять, оценивая число диаграмм в высоких порядках теории возмущений.

Ключевые слова: теория возмущений, асимптотика высоких порядков, инстантон, модель Крейчнана, замороженное поле скорости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Применение квантово-полевой теории возмущений приводит, как правило, к медленно сходящимся или даже асимптотическим рядам. В то же время вычисление каждого последующего порядка теории возмущений требует более сложных вычислений. Поэтому для получения численных значений широко используются разнообразные схемы пересуммирования, при выборе которых опираются на информацию о типе сходимости рядов. Эти схемы применяют к очень небольшому отрезку ряда, содержащему два-три, в лучшем случае пять-шесть членов. Так, например, для факториально растущих рядов используют пересуммирование на основе метода Бореля–Лероя [1].

К сожалению, чаще всего при пересуммировании не используются явно параметры асимптотики высоких порядков разложений. Вместо этого вводятся разнообразные подгоночные параметры и погрешность таких схем всегда остается неизвестной. Конечно, в рамках такого подхода нельзя выяснить, насколько хорошо вычисленные точно порядки теории возмущений соответствуют полученной асимптотике.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: komaroval@paloma.spbu.ru, Mikhail.Nalimov@pobox.spbu.ru

[†] Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: ilya.kremnev@gmail.com

Вычисление асимптотики высоких порядков квантово-полевых рядов было впервые предложено в работе [2] и основывается на методе стационарной фазы в функциональном интеграле. При этом должен быть найден инстантон – решение уравнений стационарности. Однако в настоящее время широко распространено утверждение, что для грубой оценки асимптотики высоких порядков достаточно знать лишь количество диаграмм в данном порядке теории возмущений (см., например, [3]).

В динамических полевых моделях, описывающих турбулентные явления, выяснение типа сходимости ряда связано со значительными сложностями. Эти задачи не имеют статического предела, для которого проблема была решена в работах [4], [5]. Как показано в работах [6], [7], если удастся ввести переменные Лагранжа, ситуация несколько упрощается. К таким случаям относится модель турбулентной диффузии Крейчнана. Асимптотика высоких порядков разложений этой модели была вычислена в работе [7]. Оказалось, что ряды имеют конечный радиус сходимости. Спецификой теории возмущений этой модели является то, что из-за дельтаобразного по времени коррелятора скорости многие диаграммы теории возмущений равны нулю, так что количество диаграмм растет степенным образом и действительно определяет в каком-то смысле скорость сходимости ряда.

В настоящей работе мы исследуем асимптотику высоких порядков для модели Крейчнана с замороженным полем скорости, описывающей диффузию жидкости в стационарном случайном поле [3], [8], [9]. Коррелятор поля скорости в этом случае, в отличие от стандартной модели Крейчнана, не зависит от времени, а по координате ведет себя степенным образом, так что число диаграмм теории возмущений растет факториально.

Условием стационарности в данной модели является система нелинейных интегродифференциальных уравнений. Мы покажем, как строить семейство ее решений – семейство инстантонов, и получим в аналитическом виде один из них. Проведенный с помощью полученного решения анализ показывает, что тип сходимости рядов теории возмущений определяется разнообразными факторами: исследуемым объектом, выбранным представлением (координатным или импульсным), видом коррелятора скорости, а не только одним числом диаграмм. Мы обнаружили случаи, когда исследуемые ряды имеют конечный и даже бесконечный радиус сходимости.

Вообще говоря, для исследуемых уравнений стационарности априори неизвестной является не только единственность, но и сам факт существования решения. Нам удалось найти семейство решений данных уравнений с наиболее естественной для данной задачи симметрией, причем каждому представителю семейства решений соответствуют свои граничные условия. На самом деле мы не можем ничего утверждать о возможности существования инстантонов с другой симметрией и об их вкладах в асимптотику высоких порядков. К сожалению, это замечание относится и к инстантонному анализу асимптотик высоких порядков разложений и для всех других моделей, включая “классическую” модель ϕ^4 .

Однако случай, когда коррелятор поля скорости не зависит не только от времени, но и от координаты, оказывается частным точно решаемым случаем рассматриваемой задачи. Мы будем использовать его, чтобы проверить правильность расчетов.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 дано краткое описание модели Крейчнана с замороженным полем скорости, а также приведены корреляторы случайной скорости, которые будут исследоваться далее. В разделе 3 приведено

точное решение для частного случая рассматриваемой модели. В случае, когда коррелятор поля скорости не зависит от координаты, вычислены точно N -й порядок теории возмущений для функции отклика и показано, что соответствующий ряд имеет конечный радиус сходимости. В разделе 4 вводятся переменные Лагранжа и строится действие, для которого в разделе 5 рассматривается метод стационарной фазы. В разделе 6 доказано, что полученная в разделе 5 система уравнений имеет семейство решений – инстантонов. Удастся найти первый интеграл движения и с его помощью получить явное решение, позволяющее вычислить тип сходимости рядов упомянутой модели. Выводы приведены в разделе 7. В приложении А показано как наш метод работает в точно решаемом случае. Некоторые справочные формулы приведены в приложении Б.

2. МОДЕЛЬ КРЕЙЧНАНА С ЗАМОРОЖЕННЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТИ

Распространение пассивной скалярной примеси в d -мерной вязкой сжимаемой жидкости происходит посредством диффузии и турбулентного перемешивания случайным полем скорости. Описание задачи в рамках модели Крейчнана основывается на стохастическом уравнении

$$(\partial_t + g \nabla_i V_i - \nu \Delta) \varphi(x) = \xi(x), \quad (1)$$

где, как и в работе [10], введена единая пространственно-временная переменная $x \equiv \{t, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$, $\varphi(x)$ – скалярное поле, описывающее примесь, $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ – случайное векторное поле скорости, $\xi(x)$ – случайная сила, ν – вязкость. Также для компактности введены следующие обозначения:

$$\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Delta \equiv \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_i^2}, \quad \nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}.$$

В уравнении (1) и далее подразумевается свертка по повторяющимся векторным индексам. Стандартная теория возмущений приводит к рядам по константе взаимодействия g , свойствами которых мы и интересуемся. Для случайных величин ξ и $\mathbf{V}$ предполагаются гауссовы распределения, коррелятор случайной силы D_ξ произвольный, коррелятор поля скорости, в отличие от стандартной модели Крейчнана, рассматривается не зависящим от времени $\langle \mathbf{V}_i(x) \mathbf{V}_j(x') \rangle = D_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^1$. В импульсном представлении коррелятор имеет степенной вид (см. [8], [9])

$$D_{ij}^F(\mathbf{q}) \equiv \int d^d \mathbf{z} D_{ij}(\mathbf{z}) e^{i\mathbf{qz}} = \lambda_T \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) \frac{1}{q^{2\alpha}} + \lambda_L \frac{q_i q_j}{q^2} \frac{1}{q^{2\alpha}}, \quad (2)$$

а в координатном

$$D_{ij}(\mathbf{z}) = a_1 \frac{\delta_{ij}}{\mathbf{z}^{2\beta}} + a_2 \frac{\mathbf{z}_i \mathbf{z}_j}{\mathbf{z}^{2\beta+2}}, \quad \beta = \frac{d}{2} - \alpha, \quad (3)$$

параметры a_1, a_2 определены в приложении Б.

¹⁾ Данная модель описывает диффузию в случайных средах [8], [9] и имеет непосредственное отношение к проблеме развитой турбулентности (см., например, [11]).

Стохастическое уравнение (1) с помощью формализма Мартина–Сиггиа–Розе (MSR-формализм) [12] стандартным образом преобразуется в квантово-полевую модель с действием вида

$$S^{\text{MSR}} = \int dx dx' \left(\frac{\varphi'(x) D_\xi \varphi'(x')}{2} + \frac{\mathbf{V}_i(\mathbf{x}) D_{ij}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{V}_j(\mathbf{x}')}{2} \right) + \int dx (\varphi'(x) [\partial_t + g \mathbf{V}_i(\mathbf{x}) \nabla_i - \nu \Delta] \varphi(x)). \quad (4)$$

Объектом исследования теперь становятся корреляционные функции. В частности, после стандартных преобразований (см. [10]) функция отклика принимает вид

$$G(x_2 - x_1) = \frac{\int \mathcal{D}\mathbf{V} \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi' \varphi(x_1) \varphi'(x_2) e^{-S^{\text{MSR}}}}{\int \mathcal{D}\mathbf{V} \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi' \exp(-S|_{g=0}^{\text{MSR}})}. \quad (5)$$

Знаменатель этого выражения представляет собой нормировочный множитель, соответствующий свободной ($g = 0$) модели.

Для анализа инфракрасного поведения этой модели используется метод ренормализационной группы и регулярные разложения по $\epsilon = 2 + 2\alpha - d$ [8], [9]. Это приводит к необходимости ренормировки модели при $\epsilon \rightarrow 0$. В настоящей работе мы не рассматриваем инфракрасное поведение модели и механизм ренормировки в высоких порядках теории возмущений (т.е. свойства рядов по параметру ϵ). Мы ограничились изучением исходных рядов по константе связи g , не преобразованных методом ренормгруппы. Это позволяет нам считать параметр регуляризации ϵ отличным от нуля и избежать тем самым взаимного влияния больших параметров N и $1/\epsilon$.

3. ТОЧНО РЕШАЕМЫЙ ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ: ПОЛЕ $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ ПОСТОЯННО

Пространство функций, по которому проводится функциональное интегрирование, определяется типом решаемой задачи. Подробно вопрос о правильном выборе пространства функционального интегрирования для построения теории возмущений рассмотрен в монографии [10]. Обычно в статических задачах интегрирование проводится в пространстве достаточно быстро (экспоненциально) убывающих функций, однако в динамике существуют задачи с другими функциональными пространствами [4].

В частном случае, когда поле скорости рассматриваемой модели принадлежит классу постоянных функций, т.е. не зависит от t и $\mathbf{x}$, задача оказывается точно решаемой. Действительно, функция Грина линейного уравнения диффузии (1) при $g = 0$ хорошо известна,

$$\frac{\Theta(t - t')}{(4\pi\nu(t - t'))^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{4\nu(t - t')}\right),$$

где Θ – функция Хевисайда. Функция Грина для произвольных g получается заменой $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + g\mathbf{V}t$. Поэтому уравнение (1) имеет вид

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\Theta(t - t')}{(4\pi\nu(t - t'))^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + g\mathbf{V}(t - t'))^2}{4\nu(t - t')}\right) \xi(x').$$

Отсюда, после усреднения по всем возможным скоростям с учетом нормировки для функции отклика получаем

$$G(T, \mathbf{x}) = \left\langle \frac{\delta\varphi(\xi(x_2))}{\delta\xi(x_1)} \right\rangle = \frac{\Theta(T)(2\nu T)^{d/2}}{(2\nu T + Dg^2 T^2)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4\nu T + 2Dg^2 T^2}\right), \quad (6)$$

где мы ввели трансляционно-инвариантные переменные $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ и $T \equiv t_2 - t_1$.

N -й порядок разложения этой функции по $u \equiv g^2$ выражается через гипергеометрическую функцию ${}_1F_1(N + d/2, d/2, -\mathbf{x}^2/(4\nu T))$ (см. приложение Б). Последующее вычисление асимптотического предела при $N \rightarrow \infty$ основано на связи ${}_1F_1$ с функцией Уиттекера, для которой соответствующая асимптотика хорошо известна [13]. Таким образом, точное решение имеет вид

$$G^{[N]}(T, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(t - t')}{\sqrt{\pi}} e^{1-d/2} e^{-\mathbf{x}^2/(8\nu T)} \left(\frac{\mathbf{x}^2}{4\nu T}\right)^{(1-d)/4} \times \\ \times N^{(d-3)/4} \left(-\frac{DT}{2\nu}\right)^N \cos\left(\sqrt{\frac{N\mathbf{x}^2}{\nu T}} + \pi \frac{1-d}{4}\right). \quad (7)$$

Из (7) видно, что члены ряда при больших N сильно осциллируют на фоне степенного роста $N^{(d-3)/4}$, при этом ряды теории возмущений являются сходящимися с конечным радиусом сходимости, равным $2\nu/(DT)$. Число диаграмм обычной теории возмущений, дающих вклад в $G^{[N]}$, возрастает по N факториально. Таким образом, распространенное убеждение, что тип сходимости ряда определяется числом диаграмм (см., например, [3]), неверно.

Интересно, что если мы рассмотрим наш точно решаемый пример в импульсно-частотном представлении, тип сходимости рядов теории возмущений станет принципиально другим. Проще всего убедиться в этом, воспользовавшись MSR-формализмом (4), (5). Разложим выражение для функции отклика в ряд по константе связи:

$$G^{[N]}(x_2 - x_1) = \frac{1}{N!} \int \mathcal{D}\mathbf{V} \mathbf{V}^N e^{-\mathbf{V}_i D_{ij}^{-1} \mathbf{V}_j / 2} \times \\ \times \int \mathcal{D}\varphi' \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \varphi'(x_2) (g\varphi' \nabla \varphi)^N e^{-\varphi' D_\xi \varphi' / 2 - \varphi' (\partial_t - \nu \Delta) \varphi}; \quad (8)$$

для краткости мы опустили нормировку. Интеграл по $\mathbf{V}$ сразу вычисляется, с учетом нормировки он равен $(-D)^{N/2} (N-1)!!$. Интегралы по φ, φ' выражаются через парную функцию отклика в импульсно-частотном представлении при $g = 0$. Таким образом,

$$G^{[N]}(\mathbf{q}, \omega) \sim (-1)^{N/2} (N-1)!! \frac{(\mathbf{q}^2)^{N/2}}{(i\omega + \nu \mathbf{q}^2)^{N+1}},$$

т.е. теперь ряд теории возмущений функции отклика расходится факториально. Легко понять, что зависимость асимптотики от представления объясняется наличием ∇ во взаимодействии.

Итак, тип сходимости ряда определяется не только скоростью роста числа диаграмм теории возмущений, но и существенно зависит от выбранного представления.

Описанный в этом разделе частный случай опровергает подход, при котором тип сходимости ряда определяется числом диаграмм теории возмущений. Тем не менее

нам неизвестны физические приложения, соответствующие такой редуцированной модели. Поэтому в дальнейшем мы займемся исследованием более реалистичной модели (1), (2). Однако, несмотря на свою простоту, этот частный случай хорошо отражает определенные свойства сходимости рядов физически интересной модели Крейчнана с замороженным полем скорости, в которой, как будет показано ниже, радиус сходимости рядов теории возмущений также оказывается конечным на фоне факториального роста числа диаграмм.

4. ПЕРЕМЕННЫЕ ЛАГРАНЖА

В работах [7], [14] обсуждалось, что в рамках MSR-формализма инстантон в модели Крейчнана не существует (по крайней мере, в классе гладких убывающих функций). Поэтому, как и в работах [6], [7], введем лагранжевы переменные, т.е. от скалярных полей φ , φ' перейдем к векторным полям $\mathbf{c}(\tau)$, $\mathbf{c}'(\tau)$, которые играют роль координат и импульсов жидких частиц и зависят только от времени ($0 \leq \tau \leq T$). В этих переменных можно рассматривать различные функции Грина. В настоящей работе мы будем исследовать простейшую из них – функцию отклика, играющую важную роль как в теоретических, так и в экспериментальных исследованиях. Выражения для других функций Грина могут быть исследованы аналогично с помощью приведенного ниже представления.

Итак, функция отклика модели Крейчнана в лагранжевых переменных имеет вид (подробный вывод см. в [7])

$$G(T, \mathbf{x}) = \Theta(T) \frac{\int_{\mathbf{c}(0)=0}^{\mathbf{c}(T)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{c} \mathcal{D}\mathbf{c}' \mathcal{D}\mathbf{V} e^{S^L}}{(4\pi\nu T)^{d/2} \int_{\mathbf{c}(0)=0}^{\mathbf{c}(T)=0} \mathcal{D}\mathbf{c} \mathcal{D}\mathbf{c}' \mathcal{D}\mathbf{V} e^{S|_{g=0}^L}}, \quad (9)$$

где $T \equiv t - t'$, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$,

$$S^L = \int_0^T d\tau \left(-\nu \mathbf{c}'^2 + i\mathbf{c}' [\partial_\tau \mathbf{c} - g\mathbf{V}(\mathbf{c})] \right) - \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \mathbf{V}_i(\mathbf{x}) D_{ij}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{V}_j(\mathbf{x}'). \quad (10)$$

Опущенные аргументы полей здесь и далее предполагаются равными τ , скалярные произведения перемножаемых векторов подразумеваются, граничные условия на поле $\mathbf{c}'$ при $\tau = 0$ и $\tau = T$ свободные.

Чтобы выделить явно зависимость от переменной $\mathbf{x}$, входящей в граничные условия на поле $\mathbf{c}$, зададим сдвиг поля

$$\mathbf{c}(\tau) = \bar{\mathbf{c}}(\tau) + \mathbf{x} \frac{\tau}{T}.$$

Тогда интегрирование по $\bar{\mathbf{c}}$ будет производиться по линейному функциональному пространству с нулевыми граничными условиями при $\tau = 0$, $\tau = T$. Тем не менее для упрощения записи, там где это возможно, мы будем выражать полученные результаты через исходное поле $\mathbf{c}(\tau)$. После гауссового интегрирования по полю $\mathbf{V}$ действие преобразуется следующим образом:

$$\bar{S}^L(g) = \int_0^T d\tau \left(-\nu \mathbf{c}'^2 + i\mathbf{c}' \partial_\tau \mathbf{c} - \frac{g^2}{2} \int_0^T d\tau' \mathbf{c}'_i(\tau) D_{ij}(\mathbf{c}(\tau) - \mathbf{c}(\tau')) \mathbf{c}'_j(\tau') \right).$$

Полученный естественным образом параметр $g^2 \equiv u$ указывает на то, что разложение ведется по четным степеням g .

5. ИНСТАНТОННЫЙ АНАЛИЗ

Для выделения N -го члена ряда квантово-полевой теории возмущений в работе [2] было предложено пользоваться формулой Коши

$$G(u) = \sum_{N=0}^{\infty} G^{[N]} u^N, \quad G^{[N]} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G(u)}{u^{N+1}} du. \quad (11)$$

Интегрирование ведется по замкнутому контуру в комплексной плоскости, охватывающему точку $u = 0$.

Для вычисления интегралов по $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}$ и u в $G^{[N]}$ применим метод стационарной фазы. Произведем растяжения

$$\{\bar{\mathbf{c}}, \mathbf{c}'\} \rightarrow \{N^{1/2}\bar{\mathbf{c}}, N^{1/2}\mathbf{c}'\}, \quad \mathbf{x} \rightarrow \sqrt{N}\mathbf{x}, \quad u \rightarrow N^\beta u. \quad (12)$$

Учитывая однородность коррелятора скорости по аргументу ($D(\mathbf{z}) \sim |\mathbf{z}|^{-2\beta}$, см. (3)), можно вынести перед действием $\bar{S}^L(g)$ параметр N , что упрощает анализ вклада старших вариаций. Такие же растяжения полей $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ выполняем и в нормировочном множителе, который для краткости обозначаем $\aleph$. В результате получаем

$$G^{[N]}(T, \sqrt{N}\mathbf{x}) = \frac{N^{-N\beta}}{\aleph} \frac{\Theta(T)}{2\pi i} \oint \frac{du}{u} \int_{\mathbf{c}(0)=0}^{\bar{\mathbf{c}}(T)=0} \mathcal{D}\mathbf{c} \mathcal{D}\mathbf{c}' e^{NS}, \quad (13)$$

$$S = \int_0^T d\tau \left(-\nu \mathbf{c}'^2 + i\mathbf{c}' \partial_\tau \mathbf{c} - \frac{u}{2} \mathbf{c}'_i(\tau) \varkappa_i(\mathbf{c}(\tau)) \right) - \ln u, \quad (14)$$

$$\varkappa_i(\mathbf{c}(\tau)) \equiv \int_0^T d\tau' D_{ij}(\mathbf{c}(\tau) - \mathbf{c}(\tau')) \mathbf{c}'_j(\tau'). \quad (15)$$

Основной вклад в (13) при $N \rightarrow \infty$ дает область интегрирования в окрестности инстантона – значений $\bar{\mathbf{c}}_{\text{st}}$, $\mathbf{c}'_{\text{st}}$, u_{st} , реализующих экстремум функционала действия, т.е. решений уравнений стационарности. Естественно искать эти решения, предполагая коллинеарность векторов $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$, $\mathbf{x}$, так как исходно симметрия задачи нарушена именно вектором $\mathbf{x}$. Данное предположение существенно упрощает структуру действия (14) по векторным аргументам, а коррелятор скорости при этом можно положить равным скалярной функции

$$D(\mathbf{x}) = \frac{D_0}{|\mathbf{x}|^{2\beta}}, \quad D_0 = a_1 + a_2, \quad (16)$$

где параметры a_1 и a_2 определены в приложении Б. Тогда для проекций уравнений стационарности на выделенное направление векторов $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ имеем

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{c}'(\tau)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\nu \mathbf{c}'(\tau) + i\partial_\tau \mathbf{c}(\tau) = u \varkappa(\mathbf{c}(\tau)), \quad (17)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{c}(\tau)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -i\partial_\tau \mathbf{c}'(\tau) = u \mathbf{c}'(\tau) \frac{\partial \varkappa(\mathbf{c}(\tau))}{\partial \mathbf{c}}, \quad (18)$$

$$\frac{\delta S}{\delta u} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{2}{\int_0^T d\tau \mathbf{c}'(\tau) \varkappa(\mathbf{c}(\tau))}. \quad (19)$$

Если система (17)–(19) интегродифференциальных уравнений имеет решение – инстантон $c_{\text{st}}, c'_{\text{st}}, u_{\text{st}}$, причем поля $c_{\text{st}}, c'_{\text{st}}$ принадлежат такому функциональному пространству, что функционал действия на них не обращается в бесконечность, то асимптотика корреляционной функции может быть записана в виде

$$G^{(N)}(T, \sqrt{N}x) \sim N^{-N\beta} e^{NS(c_{\text{st}}, c'_{\text{st}}, u_{\text{st}})} \Phi(\Delta), \quad (20)$$

где $\Phi(\Delta)$ – результат функционального интегрирования по флуктуациям в окрестности инстантона

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\text{st}} + \delta\mathbf{c}, \quad \mathbf{c}' = \mathbf{c}'_{\text{st}} + \delta\mathbf{c}', \quad u = u_{\text{st}} + \delta u$$

с учетом нормировочного множителя $\aleph$. В результате обычного для инстантонного анализа растяжения флуктуаций $\delta c, \delta c', \delta u$ в $N^{-1/2}$ раз расчет главного порядка по N для Φ сводится к вычислению гауссова интеграла. Кроме того, эти растяжения позволяют явно выделить зависимость этого объекта от N . Она сводится к конечной степени N^w , где параметр w можно определить, вычислив так называемые нулевые моды оператора второй вариации действия на инстантоне.

Отметим, что погрешность выражения, полученного в результате инстантонного подхода, определяется лишь отброшенными старшими вариациями действия на инстантоне (негауссовостью флуктуаций). В случае такого растяжения флуктуаций каждая последующая вариация по сравнению с предыдущей содержит дополнительный множитель $1/\sqrt{N}$, т.е. соответствующие вклады можно не учитывать при $N \rightarrow \infty$.

Из выражения (20) при $\beta > 0$ вытекает сходимость рядов, однако принципиальным остается вопрос: существуют ли вообще решения интегродифференциальной системы (17)–(19) в нужном классе функций? В следующем разделе мы получим такое решение.

6. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЯВНЫЙ ВИД ИНСТАНТОНА

Покажем, что для системы (17)–(19) удастся получить первый интеграл движения.

Воспользовавшись очевидным соотношением

$$\partial_\tau \kappa(c(\tau)) = \frac{\partial \kappa}{\partial c} \partial_\tau c,$$

из уравнений (17), (18) найдем связь c и c' : продифференцируем (17) по τ , а равенство (18) умножим на $\partial_\tau c$. Исключив $\partial_\tau \kappa(c(\tau))$ из этих двух уравнений, получаем дифференциальное уравнение

$$-2\nu \partial_\tau c'(\tau) + i \partial_\tau^2 c(\tau) + i \frac{\partial_\tau c'(\tau) \partial_\tau c(\tau)}{c'(\tau)} = 0.$$

Решение этого линейного по $\partial_\tau c(\tau)$ уравнения имеет вид

$$-\nu c'^2 + i c' \partial_\tau c = i F, \quad (21)$$

где F – интеграл движения. Тем самым вместо системы интегродифференциальных уравнений (17)–(19) можно рассматривать лишь одно интегродифференциальное уравнение, дополненное алгебраическим соотношением (21) и уравнением (19).

Из (19) и (21) очевидно, что первые три слагаемых действия (14) в точке стационарности равны $iFT + 1$. К сожалению, вычисление u_{st} и соответствующего вклада последнего слагаемого (14) при произвольном F возможно лишь численными методами. Хотя принципиальных сложностей при этом не возникает, в настоящей работе мы хотели бы ограничиться лишь аналитическими результатами.

Разным значениям F в (21) соответствуют различные граничные условия на поле $\mathbf{c}$ (различные $\mathbf{x}$). Оказывается возможным решить обратную задачу. Зафиксируем интеграл движения $F = 0$ и построим частное решение, соответствующее ему. Исследуем, к какому классу функций оно принадлежит и каким граничным условиям соответствует.

Для рассматриваемого частного решения из (21) следует соотношение

$$\mathbf{c}'(\tau) = \frac{i\partial_\tau \mathbf{c}(\tau)}{\nu}. \quad (22)$$

Подстановка этого соотношения в (17) дает

$$-\frac{i}{\nu} \frac{\partial c(\tau)}{\partial \tau} = u \int d\tau' D(c(\tau) - c(\tau')) \frac{i}{\nu} \frac{\partial c(\tau')}{\partial \tau'} = \frac{iu}{\nu} \int_0^{|\mathbf{x}|} dy D(c - y). \quad (23)$$

Тогда для поля c_{st} в квадратурах имеем

$$\int_0^c \frac{dy}{\int_0^{|\mathbf{x}|} dz D(z - y)} = -\frac{u_{st}\tau}{\nu}, \quad c \equiv c_{st}(\tau). \quad (24)$$

Величину u_{st} можно найти, подставив соотношение (22) в (19) с учетом явного вида для $\mathcal{H}$ и D . Снова переходя от интегрирования по $\tau \in [0, T]$ к интегрированию по $c \in [0, |\mathbf{x}|]$, получаем

$$u_{st} = -\frac{2\nu^2(1 - \beta)(2\beta - 1)}{D_0|\mathbf{x}|^{2-2\beta}}. \quad (25)$$

Для краткости мы не рассматриваем проблемы регуляризации и ренормировки теории, так как принципиальных сложностей на этом этапе не возникает. Полученное нами решение (24) записано в квадратурах для произвольного коррелятора скорости и справедливо при любой регуляризации. В настоящей работе рассматривается степенное поведение коррелятора D , что подразумевает аналитическую регуляризацию выражения (24) (напомним, что регуляризация в данной модели как раз и определяется выбором явного вида коррелятора (2)).

Вместо того чтобы определять величину F по переменной $\mathbf{x}$, мы поступили наоборот: положили $F = 0$. Посмотрим теперь, какому значению $\mathbf{x}$ соответствует найденное нами частное решение; обозначим это значение $\mathbf{x}_0$. Положим в равенстве (24) $\tau = T$, $\mathbf{c}(T) = \mathbf{x}_0$ и, учитывая явный вид коррелятора D , вычислим соответствующие интегралы. Получаем

$$\mathbf{x}_0^{2\beta} = \frac{u_{st}TD_0}{\nu(2\beta - 1)R(\beta)}, \quad R(\beta) = \int_0^1 \frac{dh}{(1 - h)^{1-2\beta} + h^{1-2\beta}}. \quad (26)$$

С учетом (25) соотношение (26) можно записать в виде

$$\mathbf{x}_0^2 = \frac{2(\beta - 1)}{R(\beta)} \nu T, \quad u_{st} = \left(\frac{2(\beta - 1)}{R(\beta)} \nu T \right)^\beta \frac{\nu(2\beta - 1)R(\beta)}{TD_0}. \quad (27)$$

Итак, на построенном инстантоне действие может быть легко вычислено, и в соответствии с (20) асимптотика величины $G^{[N]}(\sqrt{N} \mathbf{x}_0)$ определена равенством

$$G^{[N]}(T, \sqrt{N} \mathbf{x}_0) \sim N^{N\beta} N^w \frac{e^N}{u_{st}^N}. \quad (28)$$

Как уже было отмечено, явное определение численного значения u_{st} нам удалось провести лишь для некоторого специального значения $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, т.е. лишь на гиперповерхности, на которой выполняется первое из соотношений (27) и где обращается в нуль найденный интеграл движения. Другим значениям $\mathbf{x}$ соответствуют другие значения F и, следовательно, другие значения радиуса сходимости u_{st} , для которых мы не можем представить явного выражения и которые могут быть найдены лишь численно. Тем не менее до тех пор пока остается справедливым соотношение (12) (т.е. пока переменная x будет порядка $\sqrt{N}$), выражение вида (28) (разумеется, с другими u_{st} и показателем экспоненты) описывает поведение коэффициентов разложения функции отклика при больших N , а именно наличие конечного радиуса сходимости соответствующих рядов.

Например, при малых, но отличных от нуля значениях F можно строить теорию возмущений по F , тем самым получая с необходимой точностью инстантон для значений $\mathbf{x}$, лежащих в окрестности $\mathbf{x}_0$. Действительно, первая итерация (21) по F дает

$$c' = \frac{i\partial_\tau c}{\nu} - \frac{F}{\partial_\tau c},$$

причем в правой части равенства в знаменателе в качестве $\partial_\tau c$ достаточно использовать найденное ранее решение при $F = 0$. Подстановка первой итерации в (17) дает

$$-i\partial_\tau c - \frac{2\nu F}{\partial_\tau c^{(0)}} = \frac{i\nu}{\nu} \int_0^x dy D(c - y) - F u^{(0)} \int_0^{x^{(0)}} \frac{D(c^{(0)} - y) dy}{(\partial_\tau c^{(0)})^2},$$

здесь индексом (0) отмечены переменные, для которых следует подставлять значение на предыдущем (нулевом) шаге итерации. Это дифференциальное уравнение, как и уравнение (23), с разделяющимися переменными, его решение в квадратурах отличается от выражения (24) наличием в правой части множителя вида $(1 + kF)$, где коэффициент k выражается лишь через переменные нулевой итерации. Это позволяет вычислять $\mathbf{x}$ в виде ряда по F , а также определять с необходимой точностью величину u_{st} – радиус сходимости корреляционной функции (28), который будет отличаться от (25) наличием дополнительного множителя – степенного ряда по F .

В инстантонном анализе обычной является ситуация, когда асимптотика высоких порядков корреляционной функции существенно неравномерна по аргументу [15]. Аналогичная ситуация наблюдается и в нашем случае. Функция отклика $G(t, \mathbf{x})$

имеет существенно неравномерную асимптотику разложений рядов, поскольку из-за проведенного в (12) растяжения переменной $\mathbf{x}$ мы определили лишь асимптотику при больших N величины $G^{[N]}(\sqrt{N}\mathbf{x})$ (28). Иными словами, выражение (28) означает, что величина $G^{[N]}(t, y_0)|_{y_0 \equiv \sqrt{N}x_0}$ является функцией от $y_0/\sqrt{N}$, t и N . Поэтому полученная асимптотика может оказаться неприменимой в области очень больших или очень малых y_0 , где, вообще говоря, требуются специальные исследования.

Поэтому обсуждать сходимость рядов теории возмущений удобнее для числовых объектов или интегральных характеристик, в которых не проявляется указанная выше неравномерность. Примером такого объекта является функция

$$\mathcal{G}(T, \gamma) = \int d\mathbf{x} G(T, \mathbf{x}) e^{-\gamma \mathbf{x}^2}.$$

Это производящий функционал четных моментов функции отклика. Наличие в $\mathcal{G}$ дополнительного интеграла по $\mathbf{x}$ и упомянутое растяжение переменной $\mathbf{x}$ в $\sqrt{N}$ раз позволяют включить величину $\mathbf{x}$ в рассмотрение в рамках метода стационарной фазы. При этом уже не требуется растягивать переменную γ для выделения общего N в действии, это достигается растяжением $\mathbf{x}$. Однако в дополнение к системе (17)–(19) следует рассматривать уравнение стационарности

$$\frac{\delta(S - \gamma \mathbf{x}^2)}{\delta|\mathbf{x}|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^T d\tau \left(\frac{ic'(\tau)}{T} - \frac{uc'(\tau)}{2} \frac{\partial \kappa(c(\tau))}{\partial |\mathbf{x}|} \right) = 2\gamma|\mathbf{x}|. \quad (29)$$

Подстановка в уравнение (29) частного решения (22), учет явного вида κ (15) и четности коррелятора D приводят (29) к виду

$$-\frac{uD_0}{\nu^2(2\beta - 1)|\mathbf{x}|^{2\beta - 1}} = 2\gamma|\mathbf{x}|. \quad (30)$$

Из равенств (26) и (30) очевидно, что, выбирая

$$\gamma = \gamma_0 \equiv -\frac{R(\beta)}{2\nu T},$$

можно удовлетворить обоим этим уравнениям. Тем самым мы показали, что полученное нами частное решение при $F = 0$ является инстантоном, позволяющим определить тип сходимости рядов теории возмущений для функции $\mathcal{G}(T, \gamma)$ в точке $\gamma = \gamma_0$.

Подставляя $\mathbf{x}_0$ из (26) в (25), окончательно получаем

$$\mathcal{G}^{[N]}(T, \gamma_0(T)) \sim \frac{\Theta(T)}{\aleph(T)} \left[-\frac{2\nu^2\gamma_0(2\beta - 1)}{D_0} \right]^{N+1} \left[\frac{1 - \beta}{\gamma_0} \right]^{(N+1)\beta}. \quad (31)$$

В формуле (31) мы не учитывали множитель N^w , определив лишь величину радиуса сходимости рассматриваемого ряда. Параметр w определяет тип особенности ряда на границе круга сходимости и может быть найден из гауссового интегрирования по флуктуациям в окрестности инстантона.

7. ВЫВОДЫ

Мы рассмотрели асимптотики высоких порядков модели Крейчнана с замороженным полем скорости, построили семейство инстантонов в этой модели и нашли один из них в явном виде. Мы убедились, что соответствующие ряды теории возмущений имеют конечный радиус сходимости, который в отдельных случаях становится бесконечным.

Свойства сходимости рядов данной модели могут быть использованы при их пересуммировании для улучшения численных значений, получаемых с помощью теории возмущений.

Кроме того, мы опровергли широко распространенное убеждение, что ряды оказываются асимптотическими, если число диаграмм в высоких порядках теории возмущений растет факториально, и показали, что тип сходимости зависит от выбранного представления и поведения коррелятора.

Точно решаемый частный случай иллюстрирует наши расчеты и подтверждает наши результаты.

Как уже упоминалось, в настоящей работе мы не обсуждали регуляризацию и ренормировку теории. Асимптотики высоких порядков констант ренормировки рассматриваемой модели предполагается обсудить в следующей статье.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Иллюстрация метода в точно решаемом случае

Точно решаемый случай $D = D_0 = \text{const}$ соответствует $\beta = 0$ (см. (3)). При этом результат (31) дает для производящего функционала $\mathcal{G}$ такой же радиус сходимости ряда $2\nu/(DT)$, как и точное решение (7) для функции отклика.

Однако в разделе 6 мы ограничились явным вычислением только одного решения из семейства инстантонов, соответствующего лишь фиксированному значению $\mathbf{x}_0^2$ и построили на основании этого свою схему. В точно решаемом случае мы вычислим все семейство явно и убедимся, что проведенные растяжения полей в (12) полностью отражают поведение всего семейства по параметру N . Также мы учтем вклад гауссова интегрирования по флуктуациям в окрестности инстантона, при этом найдем не только радиус сходимости, но и тип особенности на границе круга сходимости. Ответ, который мы получим в этом приложении, будет совпадать как с точным ответом (7), так и с формулой для радиуса сходимости, полученной в разделе 6 для случая $\beta = 0$. Тем самым мы еще раз убедимся, что инстантонный анализ для рядов функции $\mathcal{G}$ не отличается принципиально от анализа рядов функции отклика.

Найдем зависимость переменных от N явно, не предполагая растяжений (12). Проекция вариационного уравнения по полю $\mathbf{s}$ на выделенное направление при этом имеет тот же вид, что и (18), и при $D = D_0$ и $\varkappa(\mathbf{c}) = \text{const}$. Это уравнение сразу приводит к независящему от времени полю $\mathbf{c}'$. Вариации по $\mathbf{c}'$ снова дают уравнение (17), из которого теперь следует, что поле $\mathbf{c}$ также не зависит от времени и

$$\bar{\mathbf{c}} \equiv 0, \quad \mathbf{c}' = \frac{i\mathbf{x}}{2\nu T + u D_0 T^2}. \quad (32)$$

Вариационное уравнение по u (ср. с (19)) теперь имеет вид

$$\frac{\delta S}{\delta u} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{2N}{D_0 c'^2 T^2}. \quad (33)$$

Совместное решение (32) и (33) дает

$$c'_{\text{st}} = \pm \sqrt{\frac{N}{\nu T}} + \frac{i|\mathbf{x}|}{4\nu T} + O(N^{-1/2}), \quad (34)$$

$$u_{\text{st}} = -\frac{2\nu}{DT} \pm \frac{i|\mathbf{x}|\sqrt{\nu T}}{DT^2} \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{|\mathbf{x}|^2}{4DT^2} \frac{1}{N} + O(N^{-3/2}), \quad (35)$$

т.е. две точки стационарности. Подставляя полученные значения в действие (14) (без растяжений переменных по N), получаем, что в точке стационарности в главном порядке по N оно имеет вид

$$S_0^{(\pm)} = -N \ln \left[-\frac{2\nu}{DT} \right] \pm i\mathbf{x} \sqrt{\frac{N}{\nu T}}.$$

Инстантонный анализ для функции отклика дает

$$G^{[N]} \sim \Theta(T) \int d\delta u \int \mathcal{D}\delta\mathbf{c} \mathcal{D}\delta\mathbf{c}' (e^{S_0^{(+)}+S_2^{(+)}} + e^{S_0^{(-)}+S_2^{(-)}}),$$

где $\delta\mathbf{c}$, $\delta\mathbf{c}'$, δg – флуктуации полей в окрестности инстантона, $S_2^{(\pm)}$ – вторая вариация действия S в соответствующих точках стационарности:

$$\begin{aligned} S_2 = & \int_0^T d\tau (-\nu \delta\mathbf{c}'^2(\tau) + i\delta\mathbf{c}'_i(\tau) \partial_\tau \delta\mathbf{c}_i(\tau) - \delta u \delta\mathbf{c}'_i(\tau) c'_i|_{\mathbf{c}'=\mathbf{c}'_{\text{st}}} D_0 T) + \\ & + \frac{N}{u_{\text{st}}^2} \delta u^2 - u_{\text{st}} D_0 \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T d\tau d\tau' \delta\mathbf{c}'_i(\tau) \delta\mathbf{c}'_i(\tau'). \end{aligned}$$

Заметим, что во все слагаемые, кроме третьего, дают вклад как продольные, так и поперечные по отношению к вектору $\mathbf{x}$ вариации полей. В третьем же слагаемом имеется лишь продольный вклад, поскольку поле $\delta\mathbf{c}'$ свернуто с полем $\mathbf{c}'_{\text{st}} \parallel \mathbf{x}$.

Таким образом, после растяжения δu в $\sqrt{N}$ раз и вычисления гауссова интеграла по δu (при этом возникает множитель $1/\sqrt{N}$) вклады продольных и поперечных компонент поля оказываются разными. Поэтому при вычислении гауссова интеграла от $d-1$ поперечных компонент с учетом нормировки получаем вклад

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\delta\mathbf{c} \mathcal{D}\delta\mathbf{c}' \exp \left(-\nu \delta\mathbf{c}'^2 + i\delta\mathbf{c}' \partial_\tau \delta\mathbf{c} - \frac{u_{\text{st}} D_0 \delta\mathbf{c}' \delta\mathbf{c}'}{2} \right) \sim \\ & \sim \left[\frac{1}{4\pi T (\nu + u_{\text{st}} D_0 T/2)} \right]^{(d-1)/2} \sim (e^{\mp i\pi} N)^{(d-1)/4}. \end{aligned}$$

Зависимость от N появляется из-за того, что в силу (35) величина $(\nu + u_{\text{st}} D_0 T/2)$ мала. Аналогичный же вклад для продольных вариаций оказывается порядка $O(1)$.

Окончательно, инстантонный анализ для $G^{[N]}$ дает

$$G^{[N]} \sim \Theta(T) \left(-\frac{DT}{2\nu} \right)^N N^{(d-3)/4} \cos \left(\sqrt{\frac{N\mathbf{x}^2}{\nu T}} + \pi \frac{1-d}{4} \right),$$

что в старшем порядке по N ведет себя при больших N так же, как (7).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Параметры коррелятора скорости имеют следующие значения:

$$a_1 = \frac{\Gamma(\beta)}{2^{2\alpha+1}\pi^{d/2}\Gamma(\alpha+1)}(\lambda_T(2\alpha-1) + \lambda_L),$$

$$a_2 = (\lambda_T - \lambda_L)\frac{\Gamma(\beta+1)}{2^{2\alpha}\pi^{d/2}\Gamma(\alpha+1)},$$

где λ_T и λ_L – продольная и поперечная константы связи.

$G^{[N]}$ в точно решаемом случае имеет вид

$$G^{[N]} = \frac{(-1)^N \Theta(T) \Gamma(d/2 + N)}{\Gamma(d/2) N!} {}_1F_1\left(\frac{d}{2} + N, \frac{d}{2}, -\frac{\mathbf{x}^2}{4\nu T}\right).$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-17524).

Список литературы

- [1] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Internat. Ser. Monogr. Phys., **77**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1989.
- [2] Л. Н. Липатов, *ЖЭТФ*, **72**:2 (1977), 411–427.
- [3] S. A. Orszag, V. Yakhot, *J. Sci. Comput.*, **14**:2 (1999), 147–195.
- [4] J. Honkonen, M. V. Komarova, M. Yu. Nalimov, *Nucl. Phys. B*, **707**:3 (2005), 493–508.
- [5] J. Honkonen, M. V. Komarova, M. Yu. Nalimov, *Nucl. Phys. B*, **714**:3 (2005), 292–306.
- [6] M. Chertkov, *Phys. Rev. E*, **55**:3 (1997), 2722–2735.
- [7] A. Yu. Andreanov, M. V. Komarova, M. Yu. Nalimov, *J. Phys. A*, **39**:25 (2006), 7801–7813.
- [8] J. Konkonen, E. Karjalainen, *J. Phys. A*, **21**:22 (1988), 4217–4234.
- [9] J. Honkonen, E. Karjalainen, *Phys. Lett. A*, **129**:5–6 (1988), 333–338.
- [10] А. Н. Васильев, *Квантовополовая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, ПИЯФ, СПб., 1998.
- [11] J. P. Bouchaud, A. Georges, *Phys. Rep.*, **195**:4–5 (1990), 127–293.
- [12] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, *Phys. Rev. A*, **8**:1 (1973), 423–437.
- [13] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1963.
- [14] E. Balkovsky, V. Lebedev, *Phys. Rev. B*, **58**:5 (1998), 5776–5795.
- [15] М. В. Комарова, М. Ю. Налимов, *ТМФ*, **129**:3 (2001), 387–402.

Поступила в редакцию 17.01.2008,
после доработки 6.06.2008