Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, А. М. Халхужаев, О числе собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 2, 263–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6313>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:01:52

© 2009 г.

С. Н. Лакаев*, А. М. Халхужаев†

О ЧИСЛЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Рассматривается двухчастичный дискретный оператор Шредингера, ассоциированный с гамильтонианом системы двух частиц (фермионов), взаимодействующих только на ближайших соседних узлах. Установлены число и местоположение собственных значений этого оператора в зависимости от энергии взаимодействия частиц, квазиимпульса системы и размерности решетки $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$.

Ключевые слова: гамильтониан, двухчастичный дискретный оператор Шредингера, квазиимпульс, существенный спектр, виртуальный уровень, собственные значения, определитель Фредгольма.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы заметно возрос интерес к исследованию операторов Шредингера (гамильтонианов), описывающих поведение решетчатых квантовых частиц [1].

Кинематика квантовых квазичастиц на решетке довольно своеобразна даже в двухчастичном случае. Например, вследствие того что дискретный аналог лапласиана или его обобщения не являются трансляционно-инвариантными, гамильтониан системы не разделяется на две части: относящуюся к движению центра и связанную с внутренними степенями свободы. Это так называемое явление “избытка масс” для решетчатых систем: эффективная масса N -частичного связанного состояния больше, чем сумма эффективных масс квазичастиц, составляющих систему (см., например, [2], [3]).

Двухчастичная проблема на решетке, в отличие от непрерывного случая, когда отделяется движение центра масс, сводится к изучению одночастичной проблемы с помощью преобразования Гельфанда. А именно, гильбертово пространство $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ разлагается в прямой (непрерывный) интеграл фон Неймана, ассоциированный с представлением абелевой (дискретной) группы $\mathbb{Z}^3$, образованной с помощью перестановочных операторов на решетке. Тогда двухчастичный гамильтониан также разлагается в прямой (непрерывный) интеграл фон Неймана.

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: slakaev@mail.ru

†Комплексный научно-исследовательский институт региональных проблем Самаркандского отделения АНРУз, Самарканд, Узбекистан. E-mail: ahmad_x@mail.ru

В отличие от непрерывного случая соответствующие слойные операторы $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, ассоциированные с разложением прямого интеграла, параметрически зависят от квазиимпульса k , который пробегает первую зону Бриллюэна $\mathbb{R}^\nu / (2\pi\mathbb{Z})^\nu$. В результате из-за потери сферической симметричности проблемы спектры семейства $h(k)$ оказываются довольно чувствительными к изменению квазиимпульса k .

В работе [4] для широкого класса двухчастичных операторов Шредингера $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, ассоциированных с гамильтонианом системы двух произвольных частиц, установлен следующий эффект. Если ν -мерный ($\nu \geq 3$) дискретный оператор Шредингера $h(\mathbf{0})$, $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{T}^\nu$, имеет виртуальный уровень или собственное значение на нижнем пороге существенного спектра, то при всех ненулевых значениях квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^\nu$ оператор $h(k)$ имеет собственное значение ниже порога существенного спектра.

Для дискретного оператора Шредингера $h_\mu(k)$, ассоциированного с гамильтонианом системы двух одинаковых частиц (бозонов), взаимодействующих с помощью контактного потенциала притяжения (см. [5]), показано, что он либо имеет единственное собственное значение, либо не имеет собственных значений в зависимости от значений энергии взаимодействия $\mu > 0$ и квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$. В случае двух бозонов, взаимодействующих на ближайших соседних узлах [6], найдено точное число собственных значений соответствующего двухчастичного оператора Шредингера на решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu = 1, 2$.

В настоящей работе рассматривается гамильтониан $\hat{h}_\mu$ системы двух фермионов, движущихся на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$, и взаимодействующих на ближайших соседних узлах. Для ν -мерного ($\nu \geq 1$) дискретного двухчастичного оператора Шредингера $h_\mu(k)$, ассоциированного с гамильтонианом $\hat{h}_\mu$, установлены число и местоположение собственных значений в зависимости от параметров оператора – значений энергии взаимодействия на соседних узлах $\mu > 0$ и полного квазиимпульса системы $k \in \mathbb{T}^\nu$. В частности, показано, что для некоторого $\mu = \mu_0(\nu) > 0$ нижний порог существенного спектра является ν -кратным виртуальным уровнем (при $\nu = 1, 2$) или ν -кратным собственным значением (при $\nu \geq 3$) оператора $h_{\mu_0}(\mathbf{0})$. Следовательно, доказано, что при всех ненулевых значениях $k \in \mathbb{T}^\nu$ оператор $h_{\mu_0}(k)$ имеет ровно ν собственных значений ниже порога существенного спектра.

2. ГАМИЛЬТониан системы двух фермионов в координатном и импульсном представлениях

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$ – ν -мерная целочисленная решетка, $\ell_2((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, $\ell_2^{\text{as}}((\mathbb{Z}^\nu)^2) \subset \ell_2((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ – подпространство антисимметричных функций. В координатном представлении гамильтониан системы двух фермионов с массой $m = 1$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^{\text{as}}((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ по формуле

$$\hat{h}_\mu = \hat{h}^0 - \mu \hat{v},$$

$$(\hat{h}^0 \hat{\psi})(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sum_{|s|=1} [2\hat{\psi}(x_1, x_2) - \hat{\psi}(x_1 + s, x_2) - \hat{\psi}(x_1, x_2 + s)], \quad \hat{\psi} \in \ell_2^{\text{as}}((\mathbb{Z}^\nu)^2),$$

$$(\hat{v} \hat{\psi})(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2) \hat{\psi}(x_1, x_2), \quad \hat{\psi} \in \ell_2^{\text{as}}((\mathbb{Z}^\nu)^2),$$

где

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } |x| = 1, \\ 0 & \text{при } |x| \neq 1, \end{cases}$$

$|x| = |x^{(1)}| + |x^{(2)}| + \dots + |x^{(\nu)}|$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(\nu)}) \in \mathbb{Z}^\nu$, $\mu > 0$ – энергия взаимодействия двух частиц на ближайших соседних узлах. Отметим, что двух-частичный гамильтониан $\hat{h}_\mu$ является ограниченным самосопряженным оператором в $\ell_2^{\text{as}}((\mathbb{Z}^\nu)^2)$.

Пусть $\mathbb{T}^\nu$ – ν -мерный тор, т.е. куб $(-\pi, \pi]^\nu$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Он рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены так же, как в $\mathbb{R}^\nu$, но по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^\nu$. Пусть $L_2(\mathbb{T}^\nu)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^\nu$, $L_2^o(\mathbb{T}^\nu) \subset L_2(\mathbb{T}^\nu)$ – подпространство нечетных функций.

После преобразования Фурье и выделения полного квазимульса $k \in \mathbb{T}^\nu$ системы (см. [4], [5]) изучение спектральных свойств оператора $\hat{h}_\mu$ сводится к изучению семейства двухчастичных дискретных операторов Шредингера $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, действующих в $L_2^o(\mathbb{T}^\nu)$ по формуле

$$h_\mu(k) = h^0(k) - \mu v.$$

Здесь невозмущенный оператор $h^0(k)$ есть оператор умножения на функцию:

$$(h^0(k)f)(q) = E_k(q)f(q), \quad f \in L_2^o(\mathbb{T}^\nu),$$

где

$$E_k(q) = 2 \sum_{j=1}^{\nu} \left(1 - \cos \frac{k^{(j)}}{2} \cos q^{(j)} \right). \quad (1)$$

Оператор взаимодействия (возмущения) v является оператором ранга $\nu \geq 1$ и действует в гильбертовом пространстве $L_2^o(\mathbb{T}^\nu)$ по формуле

$$(vf)(q) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \sin q^{(i)} \int_{\mathbb{T}^\nu} \sin t^{(i)} f(t) dt.$$

3. СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР И ВИРТУАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Возмущение v оператора $h^0(k)$ является оператором ранга ν . Следовательно, согласно теореме Вейля о сохранении существенного спектра при компактном возмущении (см. [7]) существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$ совпадает со спектром оператора $h^0(k)$. Поскольку $h^0(k)$ есть оператор умножения на функцию $E_k(q)$, имеем

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = [E_{\min}(k), E_{\max}(k)],$$

где

$$E_{\min}(k) = \min_{q \in \mathbb{T}^\nu} E_k(q) = 2 \sum_{j=1}^{\nu} \left(1 - \cos \frac{k^{(j)}}{2} \right) \geq 0,$$

$$E_{\max}(k) = \max_{q \in \mathbb{T}^\nu} E_k(q) = 2 \sum_{j=1}^{\nu} \left(1 + \cos \frac{k^{(j)}}{2} \right) \leq 4\nu.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $k = \tilde{\pi} = (\pi, \pi, \dots, \pi) \in \mathbb{T}^\nu$ существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$ вырождается, т.е. превращается в точку $E_{\min}(\tilde{\pi}) = E_{\max}(\tilde{\pi}) = \{2\nu\}$, поэтому $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k))$ не является абсолютно непрерывным при любом $k \in \mathbb{T}^\nu$.

Для каждого $k \in (-\pi, \pi)^\nu$ и $z \leq E_{\min}(k)$ в $L_2^\circ(\mathbb{T}^\nu)$ определим интегральный оператор Бирмана–Швингера $G_\mu(k, z)$ с ядром

$$G_\mu(k, z; p, q) = \frac{2\mu}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{i=1}^{\nu} \sin p^{(i)} \sin q^{(i)} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 t^{(i)} dt}{E_k(t) - z}.$$

Отметим, что для любого $z < E_{\min}(k)$ имеет место равенство

$$G_\mu(k, z) = \mu v^{1/2} r_0(k, z) v^{1/2},$$

где $v^{1/2}$ – положительный корень положительного оператора v , $r_0(k, z)$ – резольвента оператора $h^0(k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\nu = 1$ или $\nu = 2$. Будем говорить, что оператор $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет ν -кратный виртуальный уровень на пороге $E_{\min}(\mathbf{0}) = 0$, $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{T}^\nu$, если число 1 является ν -кратным собственным значением оператора $G_\mu(\mathbf{0}, 0)$ (см. ниже лемму 5).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\nu = 1$ или $\nu = 2$, число 1 является ν -кратным собственным значением оператора $G_\mu(\mathbf{0}, 0)$ и $L^{(\nu)} \subset L_2^\circ(\mathbb{T}^\nu)$ – подпространство, натянутое на соответствующие собственные функции ψ_i , $i = 1, 2, \dots, \nu$. Тогда для каждого $\psi \in L^{(\nu)}$ функция

$$f(q) = \frac{\mu(v^{1/2}\psi)(q)}{E_{\mathbf{0}}(q)} = \frac{\mu}{E_{\mathbf{0}}(q)} \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \sin q^{(i)} \int_{\mathbb{T}^\nu} \sin t^{(i)} \psi(t) dt$$

удовлетворяет уравнению Шредингера $h_\mu(\mathbf{0})f = 0$ и при этом $f \notin L_2^\circ(\mathbb{T}^\nu)$.

4. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Заметим, что функция $E_{\mathbf{0}}(q) = E_{\mathbf{0}}(q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(\nu)})$ имеет невырожденный минимум в нуле и инвариантна относительно перестановки аргументов $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(\nu)}$. Следовательно, интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 q^{(i)}}{E_{\mathbf{0}}(q)} dq$$

существует и не зависит от выбора $i = \overline{1, \nu}$.

Пусть

$$\mu_0 = (2\pi)^\nu \left(\int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 q^{(i)}}{E_0(q)} dq \right)^{-1}, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

Основным результатом работы является следующая теорема, которая устанавливает местоположение, число собственных значений и виртуальных уровней оператора $h_\mu(k)$.

ТЕОРЕМА. 1. Пусть $0 < \mu < \mu_0$. Тогда существует такое разбиение тора $\mathbb{T}^\nu$ на непустые непересекающиеся множества $\{G_\mu^{(l)}\}$, $l = \overline{0, \nu}$, что при $k \in G_\mu^{(l)}$, $l = \overline{1, \nu}$, оператор $h_\mu(k)$ имеет только l положительных собственных значений $z_\mu^{(i)}(k)$, $i = \overline{1, l}$, (с учетом кратности) ниже порога $E_{\min}(k)$, а при $k \in G_\mu^{(0)}$ оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений ниже порога $E_{\min}(k)$ существенного спектра.

2. Пусть $\mu = \mu_0$. При $\nu = 1$ или $\nu = 2$ оператор $h_\mu(0)$ имеет ν -кратный виртуальный уровень на пороге $E_{\min}(0) = 0$. При $\nu \geq 3$ порог $E_{\min}(0) = 0$ является ν -кратным собственным значением оператора $h_\mu(0)$. Для любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{T}^\nu$, $k \neq 0$, оператор $h_\mu(k)$ имеет ровно ν собственных значений $z_\mu^{(i)}(k)$, $i = \overline{1, \nu}$, (с учетом кратности) ниже порога $E_{\min}(k)$ и $z_\mu^{(i)}(k) > 0$, $i = \overline{1, \nu}$.

3. Пусть $\mu > \mu_0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{T}^\nu$ оператор $h_\mu(k)$ имеет ровно ν собственных значений $z_\mu^{(i)}(k)$, $i = \overline{1, \nu}$, ниже порога $E_{\min}(k)$. При $\mu > 4\mu_0$ имеют место неравенства $z_\mu^{(i)}(k) < 0$, $i = \overline{1, \nu}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как возмущенный оператор v положителен, $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений, лежащих правее $E_{\max}(k)$.

5. СВЕДЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НУЛЕЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ФРЕДГОЛЬМА

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Для каждого $k \in \mathbb{T}^\nu$ и $\mu > 0$ определим в $\mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k), E_{\max}(k)]$ функцию

$$\Delta_\mu^{(i)}(k, z) = 1 - \frac{\mu}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 q^{(i)}}{E_k(q) - z} dq, \quad i = \overline{1, \nu}. \quad (2)$$

Обозначим через $\Delta_\mu(k, z)$ определитель Фредгольма оператора $I - G_\mu(k, z)$.

ЛЕММА 1. Верно следующее равенство:

$$\Delta_\mu(k, z) = \prod_{i=1}^{\nu} \Delta_\mu^{(i)}(k, z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $G_\mu(k, z)$ отображает все пространство $L_2^2(\mathbb{T}^\nu)$ в подпространство $L^{(\nu)}$, натянутое на функции $\sin p^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, \nu$. Пространство $L^{(\nu)}$ является инвариантным относительно оператора $G_\mu(k, z)$. Если учесть, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^\nu} \sin t^{(i)} \sin t^{(j)} dt &= 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, \nu}, \\ \int_{\mathbb{T}^\nu} \sin^2 s^{(i)} ds &= \frac{(2\pi)^\nu}{2}, \quad i = \overline{1, \nu}, \end{aligned}$$

то из определения оператора $G_\mu(k, z)$ следует, что сужение $G_\mu(k, z)|_{L^{(\nu)}}$ оператора $G_\mu(k, z)$ на $L^{(\nu)}$ представляется в виде матрицы

$$G_\mu(k, z)|_{L^{(\nu)}} = (a_\mu^{ij}(k, z))_{i,j=1}^\nu,$$

где $a_\mu^{ij}(k, z) = 0$ при $i \neq j$ и

$$a_\mu^{ii}(k, z) = \frac{\mu}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 t^{(i)} dt}{E_k(t) - z}.$$

Отсюда вытекает доказываемое равенство для определителя оператора $I|_{L^{(\nu)}} - G_{\mu\lambda}(z)|_{L^{(\nu)}}$, где $I|_{L^{(\nu)}}$ – единичный оператор в $L^{(\nu)}$.

Следующая лемма вытекает из принципа Бирмана–Швингера и теоремы Фредгольма.

ЛЕММА 2. *Для любого $k \in \mathbb{T}^\nu$ и $\mu > 0$ точка $z \in \mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k), E_{\min}(k)]$ является собственным значением оператора $h_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда*

$$\Delta_\mu(k, z) = 0.$$

ЛЕММА 3. *Для любого $k \in \mathbb{T}^\nu$ функция $\Delta_\mu^{(i)}(k, \cdot)$ является монотонно убывающей на интервале $(-\infty, E_{\min}(k))$ и $\Delta_\mu^{(i)}(k, z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow -\infty$, $i = \overline{1, \nu}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом $k \in \mathbb{T}^\nu$ функция $\Delta_\mu^{(i)}(k, z)$, $i = \overline{1, \nu}$, является аналитической функцией от z в $\mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k), E_{\min}(k)]$ и ее производная по z является отрицательной, т.е.

$$\frac{\partial \Delta_\mu^{(i)}(k, z)}{\partial z} = -\frac{\mu}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 q^{(i)}}{(E_k(q) - z)^2} dq < 0, \quad z \in (-\infty, E_{\min}(k)).$$

Следовательно, для каждого $k \in \mathbb{T}^\nu$ функция $\Delta_\mu^{(i)}(k, \cdot)$, $i = \overline{1, \nu}$, является монотонно убывающей на интервале $(-\infty, E_{\min}(k))$. Очевидно, что $\Delta_\mu^{(i)}(k, z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow -\infty$.

Из леммы 3 следует, что существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{z \rightarrow E_{\min}(k) - 0} \Delta_\mu^{(i)}(k, z) = \Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k)) = 1 - \frac{\mu}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 p^{(i)}}{E_k(p) - E_{\min}(k)} dp, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

Пусть $\Pi = \{k = (k^{(1)}, k^{(1)}, \dots, k^{(\nu)}) \in \mathbb{T}^\nu: k^{(j)} = \pi \text{ для некоторого } j = 1, 2, \dots, \nu\}$ – граница куба $(-\pi, \pi]^\nu$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для любого $k \in \mathbb{T}^\nu \setminus \Pi$ функция $E_k(p)$ имеет единственный невырожденный минимум в нуле, и по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем $\Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k)) < \infty$, $k \in \mathbb{T}^\nu \setminus \Pi$, $i = \overline{1, \nu}$.

При $k \in \Pi$ может выполняться и равенство

$$\lim_{z \rightarrow E_{\min}(k) - 0} \Delta_\mu^{(i)}(k, z) = \Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k)) = -\infty, \quad i = \overline{1, \nu},$$

в зависимости от размерности $\nu \geq 1$.

ЛЕММА 4. 1. Функция $\Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k))$, $i = \overline{1, \nu}$, четна по каждой переменной $k^{(j)} \in (-\pi, \pi)$ и монотонно убывает по $k^{(j)} \in [0, \pi]$, $j = \overline{1, \nu}$.

2. Функция $\Delta_\mu^{(i)}(k, z)$, $i = \overline{1, \nu}$, четна по каждой переменной $k^{(j)} \in \mathbb{T}^1$ и при каждом фиксированном $z \leq 0$ монотонно возрастает по $k^{(j)} \in [0, \pi]$, $j = \overline{1, \nu}$. При этом имеют место равенства

$$\begin{aligned} \max_{k \in \mathbb{T}^\nu} \Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k)) &= \min_{k \in \mathbb{T}^\nu} \Delta_\mu^{(i)}(k, 0) = \Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0), \\ \max_{k \in \mathbb{T}^\nu} \Delta_\mu^{(i)}(k, 0) &= 1 - \frac{\mu}{4\nu}, \quad i = \overline{1, \nu}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пользуясь выражением (1), представим функцию $\Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k))$ в виде

$$\Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k)) = 1 - \frac{\mu}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 p^{(i)} dp}{2 \sum_{j=1}^\nu \cos(k^{(j)}/2) (1 - \cos p^{(j)})}. \quad (3)$$

Из (3) непосредственно вытекает доказательство утверждения 1 леммы.

2. Функция $E(k; q) := E_k(q)$ является четной по каждой переменной $k^{(j)} \in \mathbb{T}^1$, $j = \overline{1, \nu}$, и, следовательно, функция $\Delta_\mu^{(i)}(k, z)$, $i = \overline{1, \nu}$, является четной по каждой переменной $k^{(j)} \in \mathbb{T}^1$, $j = \overline{1, \nu}$.

В силу (2) получаем

$$\frac{\partial \Delta_\mu^{(i)}(k, z)}{\partial k^{(j)}} = \frac{\mu \sin(k^{(j)}/2)}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 q^{(i)} \cos q^{(j)} dq}{(E_k(q) - z)^2}. \quad (4)$$

Пусть $i \neq j$. Выражение $B = E_k(q) + 2 \cos(k^{(j)}/2) \cos q^{(j)} - z > 0$ не зависит от компоненты $q^{(j)}$ вектора $q \in \mathbb{T}^\nu$. Представим интеграл в правой части равенства (4) в виде

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 q^{(i)} \cos q^{(j)} dq}{(E_k(q) - z)^2} &= \int_{\mathbb{T}^{\nu-1}} \left(\int_{-\pi}^\pi \frac{\cos q^{(j)} dq^{(j)}}{(B - 2 \cos(k^{(j)}/2) \cos q^{(j)})^2} \right) \times \\ &\quad \times \sin^2 q^{(i)} dq^{(1)} \dots dq^{(j-1)} dq^{(j+1)} \dots dq^{(\nu)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Внутренний интеграл в правой части равенства (5) представим как сумму двух интегралов по отрезкам $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$. Делая замену переменного $q^{(j)} = t^{(j)} - \pi$ в первом интеграле, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos q^{(j)} dq^{(j)}}{(B - 2 \cos(k^{(j)}/2) \cos q^{(j)})^2} &= \\ &= \int_0^\pi \frac{8B \cos(k^{(j)}/2) \cos^2 t^{(j)} dt^{(j)}}{(B + 2 \cos(k^{(j)}/2) \cos t^{(j)})^2 (B - 2 \cos(k^{(j)}/2) \cos t^{(j)})^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из неотрицательности подынтегральной функции при $k^{(j)} \in [0, \pi)$ вытекает, что выражение в правой части равенства (6) положительное. Учитывая соотношения (4)–(6), получаем

$$\frac{\partial \Delta_\mu^{(i)}(k, z)}{\partial k^{(j)}} > 0, \quad i, j = \overline{1, \nu}, \quad i \neq j.$$

Аналогичным рассуждением можно убедиться, что это неравенство верно и при $i = j$. Таким образом, функция $\Delta_\mu^{(i)}(k, z)$, $i = \overline{1, \nu}$, строго возрастает по каждому аргументу $k^{(j)} \in [0, \pi]$, поэтому

$$\min_{k \in \mathbb{T}^\nu} \Delta_\mu^{(i)}(k, 0) = \Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0), \quad i = \overline{1, \nu}.$$

После элементарных вычислений получаем

$$\max_{k \in \mathbb{T}^\nu} \Delta_\mu^{(i)}(k, 0) = 1 - \frac{\mu}{4\nu}, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

ЛЕММА 5. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) при $\nu = 1$ или $\nu = 2$ число $z = 0$ является ν -кратным виртуальным уровнем (и соответственно ν -кратным собственным значением при $\nu \geq 3$) оператора $h_\mu(\mathbf{0})$;
- б) $\Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0$ для всех $i = \overline{1, \nu}$;
- в) $\Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0$ для некоторого $i = \overline{1, \nu}$;
- г) $\mu = \mu_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ г) $\Rightarrow$ а).

Пусть $\nu = 1$ или $\nu = 2$. Согласно определению число 1 является ν -кратным собственным значением оператора $G_\mu(\mathbf{0}, 0)$, т.е. уравнения

$$G_\mu(\mathbf{0}, 0)\psi_i = \psi_i, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad (7)$$

имеют ненулевые ортогональные решения $\psi_i \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$, $i = \overline{1, \nu}$.

Учитывая равенства $\int_{\mathbb{T}^\nu} \sin t^{(j)} dt = 0$, $j = \overline{1, \nu}$, получаем систему уравнений, эквивалентную (7):

$$\psi_i(q) = \frac{2\mu c_i}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{j=1}^{\nu} \sin q^{(j)} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 t^{(j)} dt}{E_0(t)}, \quad (8)$$

где

$$c_i = \int_{\mathbb{T}^\nu} \sin t^{(i)} \psi_i(t) dt, \quad i = \overline{1, \nu}. \quad (9)$$

Подставляя правую часть равенства (8) в (9), получаем равенства $c_i \Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0$, $i = \overline{1, \nu}$, откуда вытекает утверждение б) леммы.

Пусть $\nu \geq 3$ и число $z = 0$ является ν -кратным собственным значением оператора $h_\mu(\mathbf{0})$. Тогда $f \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$ из подпространства собственных функций, соответствующих ν -кратному собственному значению $z = 0$, имеет вид

$$f(q) = \sum_{i=1}^{\nu} c_i \varphi_i(q), \quad (10)$$

где

$$c_i = \frac{\mu}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \sin t^{(i)} f(t) dt, \quad \varphi_i(q) = \frac{\sin q^{(i)}}{E_0(q)}, \quad i = \overline{1, \nu}. \quad (11)$$

Поскольку функция $E_0(q) = E_0(q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(\nu)})$ четна по каждой переменной $q^{(i)} \in \mathbb{T}^1$, имеет невырожденный минимум в нуле и $\sin q^{(i)} \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$, то $\varphi_i(q) \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$, $i = \overline{1, \nu}$, при $\nu \geq 3$ и

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad \int_{\mathbb{T}^\nu} \sin t^{(j)} \varphi_i(t) dt = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, \nu}. \quad (12)$$

Подставляя (10) в первое равенство (11) и учитывая (12), получаем

$$c_i \Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0, \quad i = \overline{1, \nu}. \quad (13)$$

По условию $h_\mu(\mathbf{0})$ имеет ν -кратное собственное значение $z = 0$, и, следовательно, система уравнений (13) имеет ν нетривиальных решений тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0$ при всех $i = \overline{1, \nu}$.

Если равенство $\Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0$ выполняется при всех $i = \overline{1, \nu}$, то $\Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0$ и для некоторого $i = \overline{1, \nu}$. Поскольку функция $E_0(q) = E_0(q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(\nu)})$ инвариантна относительно перестановки аргументов $q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(\nu)}$, верно и обратное утверждение.

Поэтому если $\Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0$ для некоторого $i = \overline{1, \nu}$, то из (2) и определения числа μ_0 получаем, что $\mu = \mu_0$.

Пусть $\mu = \mu_0$ и $\nu = 1$ или $\nu = 2$. Тогда ортогональные функции $\psi_i(q) = c_i \sin q^{(i)} \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$, $i = \overline{1, \nu}$, удовлетворяют системе уравнений $G_{\mu_0}(\mathbf{0}, 0)\psi_i = \psi_i$, $i = \overline{1, \nu}$, т.е. число $z = 0$ является ν -кратным виртуальным уровнем оператора $h_{\mu_0}(\mathbf{0})$.

Если $\nu \geq 3$, то элементы ортогональной системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^\nu$, определенные в (11), принадлежат $L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$, $i = \overline{1, \nu}$, и удовлетворяют системе уравнений $h_{\mu_0}(\mathbf{0})\varphi_i = 0$, $i = \overline{1, \nu}$. Действительно, в силу (13) получаем

$$h_{\mu_0}(\mathbf{0})\varphi_i(p) = \sin p^{(i)} - \frac{\mu}{(2\pi)^\nu} \sin p^{(i)} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 t^{(i)} dt}{E_0(t)} = \sin p^{(i)} \Delta_{\mu_0}^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

Лемма доказана.

Для любого $k \in \mathbb{T}^\nu \setminus \Pi$ положим

$$D^{(i)}(k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(\nu)}) = \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2 p^{(i)} dp}{2 \sum_{j=1}^\nu \cos(k^{(j)}/2) (1 - \cos p^{(j)})}, \quad i = \overline{1, \nu}. \quad (14)$$

ЛЕММА 6. Функция $D^{(i)}(k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(\nu)})$ симметрична относительно перестановки любых пар переменных $k^{(j_1)}, k^{(j_2)}$, $j_1, j_2 \in \{1, 2, \dots, \nu\} \setminus \{i\}$. Кроме того, выполняется равенство

$$D^{(i)}(k^{(1)}, \dots, k^{(i)}, \dots, k^{(j)}, \dots, k^{(\nu)}) = D^{(j)}(k^{(1)}, \dots, k^{(j)}, \dots, k^{(i)}, \dots, k^{(\nu)}) \quad (15)$$

для любых $i < j$, $i, j = \overline{1, \nu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$\sum_{j=1}^\nu \cos \frac{k^{(j)}}{2} (1 - \cos p^{(j)})$$

симметричная относительно перестановки любых пар переменных $(k^{(j_1)}, p^{(j_1)})$ и $(k^{(j_2)}, p^{(j_2)})$, $j_1, j_2 \in \{1, 2, \dots, \nu\}$. Отсюда и из определения функции $D^{(i)}(k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(\nu)})$ вытекает первое утверждение леммы.

Заменяя переменные интегрирования $p^{(j)}$ на $p^{(i)}$ и $p^{(i)}$ на $p^{(j)}$ в правой части (14), получаем равенство (15).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Поскольку функция $D^{(i)}(k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(\nu)})$, $i = \overline{1, \nu}$, четна по каждой переменной $k^{(j)} \in (-\pi, \pi)$, $j = \overline{1, \nu}$, достаточно рассмотреть случай $k^{(j)} \in [0, \pi)$.

ЛЕММА 7. Пусть $\nu = 2$. Если $k^{(1)} > k^{(2)}$, $k^{(1)}, k^{(2)} \in [0, \pi)$, то имеет место неравенство $D^{(1)}(k^{(1)}, k^{(2)}) > D^{(1)}(k^{(2)}, k^{(1)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подынтегральная функция разностной функции $D^{(1)}(k^{(1)}, k^{(2)}) - D^{(1)}(k^{(2)}, k^{(1)})$ является четной функцией своих аргументов, поэтому имеет место равенство

$$D^{(1)}(k^{(1)}, k^{(2)}) - D^{(1)}(k^{(2)}, k^{(1)}) = 4 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{(\sin^2 p^{(1)} - \sin^2 p^{(2)}) dp^{(1)} dp^{(2)}}{2 \sum_{j=1}^2 \cos(k^{(j)}/2)(1 - \cos p^{(j)})}. \quad (16)$$

Рассмотрим отображения $\varphi_i: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, $i = \overline{1, 2}$, определенные по формулам $\varphi_1(x, y) = (y, x)$, $\varphi_2(x, y) = (\pi - x, \pi - y)$, и пусть $\varphi_3 = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= \{x \in [0, \pi/2), y \in [0, \pi/2): x < y\}, \\ W^{(2)} &= \{x \in [\pi/2, \pi), y \in [0, \pi/2): x > \pi - y\}, \\ W_0^{(1)} &= \{x \in [0, \pi/2), y \in [0, \pi/2): x = y\}, \\ W_0^{(2)} &= \{x \in [\pi/2, \pi), y \in [0, \pi/2): x = \pi - y\}. \end{aligned}$$

Тогда верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in [0, \pi)^2: \sin^2 x < \sin^2 y\} &= W^{(1)} \cup W^{(2)} \cup \varphi_2(W^{(1)}) \cup \varphi_2(W^{(2)}), \\ \{(x, y) \in [0, \pi)^2: \sin^2 x = \sin^2 y\} &= W_0^{(1)} \cup W_0^{(2)} \cup \varphi_2(W_0^{(1)}) \cup \varphi_2(W_0^{(2)}), \\ \{(x, y) \in [0, \pi)^2: \sin^2 x > \sin^2 y\} &= \varphi_1(W^{(1)}) \cup \varphi_1(W^{(2)}) \cup \varphi_3(W^{(1)}) \cup \varphi_3(W^{(2)}). \end{aligned}$$

Меры множеств $W_0^{(i)}$, $i = \overline{1, 2}$, равны нулю, поэтому после вычислений правая часть равенства (16) принимает вид

$$\begin{aligned} D^{(1)}(k^{(1)}, k^{(2)}) - D^{(1)}(k^{(2)}, k^{(1)}) &= 16 \sum_{j=1}^2 \cos \frac{k^{(j)}}{2} \left(\cos^2 \frac{k^{(2)}}{2} - \cos^2 \frac{k^{(1)}}{2} \right) \times \\ &\times \sum_{i=1}^2 \iint_{W^{(i)}} \frac{(\cos^2 p^{(2)} - \cos^2 p^{(1)})^2 dp^{(1)} dp^{(2)}}{(\sum_{j=1}^2 \cos(k^{(j)}/2)(1 - \cos p^{(j)}))^2 (\sum_{j=1}^2 \cos(k^{(j)}/2)(1 + \cos p^{(j)}))^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подынтегральная функция правой части равенства (17) является неотрицательной. Отсюда и из монотонности функции $\cos x$ на $[0, \pi/2)$ вытекает, что $D^{(1)}(k^{(1)}, k^{(2)}) - D^{(1)}(k^{(2)}, k^{(1)}) > 0$ при $k^{(1)} > k^{(2)}$.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для любого $i = \overline{1, \nu}$ положим

$$F_\mu^{(i)} = \{k \in \mathbb{T}^\nu : \Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k)) < 0\}.$$

ЛЕММА 8. При $k \in F_\mu^{(i)}$ оператор $h_\mu(k)$ имеет собственное значение ниже порога $E_{\min}(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \in F_\mu^{(i)}$. В силу леммы 3 для каждого $k \in \mathbb{T}^\nu$ функция $\Delta_\mu^{(i)}(k, \cdot)$ является монотонно убывающей на интервале $(-\infty, E_{\min}(k))$. Отсюда и из непрерывности $\Delta_\mu^{(i)}(k, \cdot)$ на $(-\infty, E_{\min}(k))$ следует, что для каждого $k \in F_\mu^{(i)}$ существует единственное $z_\mu^{(i)}(k) \in (-\infty, E_{\min}(k))$ такое, что $\Delta_\mu^{(i)}(k, z_\mu^{(i)}(k)) = 0$, $i = \overline{1, \nu}$. Из лемм 1 и 2 получаем, что число $z_\mu^{(i)}(k)$ является собственным значением оператора $h_\mu(k)$.

Множества $G_\mu^{(l)}$, $l = \overline{0, \nu}$, построим следующим образом:

$$\begin{aligned} G_\mu^{(l)} &= \bigcup_{\{j_1, j_2, \dots, j_\nu\} = \{1, 2, \dots, \nu\}} F_\mu^{(j_1)} \cap F_\mu^{(j_2)} \cap \dots \\ &\quad \dots \cap F_\mu^{(j_l)} \cap (\mathbb{T}^\nu \setminus (F_\mu^{(j_{l+1})} \cup \dots \cup F_\mu^{(j_\nu)})), \quad (18) \\ G_\mu^{(0)} &= \mathbb{T}^\nu \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\nu} G_\mu^{(i)} \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 9. Пусть $0 < \mu < \mu_0$. Тогда множества $G_\mu^{(l)}$, $l = \overline{0, \nu}$, являются непустыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что множество $G_\mu^{(0)}$ содержит точку $k = \mathbf{0} \in \mathbb{T}^\nu$. Для этого нужно показать, что $\mathbf{0} \notin G_\mu^{(i)}$, $i = \overline{1, \nu}$. Действительно, учитывая равенство $E_{\min}(\mathbf{0}) = 0$, согласно определению числа μ_0 для любых $0 < \mu < \mu_0$ и $l = \overline{1, \nu}$ получим, что имеет место неравенство $\Delta_\mu^{(l)}(\mathbf{0}, 0) = 1 - \mu/\mu_0 > 0$. Отсюда вытекает, что $k = \mathbf{0} \in G_\mu^{(0)}$.

Докажем, что множества

$$\begin{aligned} E_\mu^{(l)} &= \{k \in \mathbb{T}^\nu : \Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k)) < 0 \quad \text{для} \quad i = \overline{1, l} \quad \text{и} \\ &\quad \Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k)) \geq 0 \quad \text{для} \quad i = \overline{l+1, \nu}\} \end{aligned}$$

непусты. Тогда множества $G_\mu^{(l)}$, $l = \overline{1, \nu}$, также будут непусты.

Пусть $\mathbb{T}_{(l)}^\nu = \{k = (k^{(1)}, \dots, k^{(\nu)}) \in \mathbb{T}^\nu : k^{(1)} = \dots = k^{(l)}; k^{(l+1)} = \dots = k^{(\nu)}\}$.

Тогда для каждого $k \in \mathbb{T}_{(l)}^\nu \setminus \Pi$ функция $\Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k))$ принимает вид

$$\Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k)) = 1 - \frac{\mu}{(2\pi)^\nu} D^{(i)}\left(\underbrace{k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}}_l, \underbrace{k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}}_{\nu-l}\right), \quad i = \overline{1, \nu}.$$

Согласно лемме 6 имеем

$$\begin{aligned}
 D^{(1)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}) &= \\
 &= D^{(2)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}) = \dots \\
 &\dots = D^{(l)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}), \\
 D^{(l+1)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}) &= \\
 &= D^{(l+2)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}) = \dots \\
 &\dots = D^{(\nu)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}).
 \end{aligned}$$

Теперь покажем, что если $k^{(l)} > k^{(l+1)}$, то имеет место неравенство $D^{(l)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}) > D^{(l+1)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)})$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}
 &D^{(l)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}) - \\
 &\quad - D^{(l+1)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}) = \\
 &= \int_{\mathbb{T}^{\nu-2}} \left(\int_{\mathbb{T}^2} \frac{(\sin^2 q^{(l)} - \sin^2 q^{(l+1)}) dq^{(l)} dq^{(l+1)}}{A(k, q) - 2 \cos\left(\frac{k^{(l)}}{2}\right) \cos q^{(l)} - 2 \cos\left(\frac{k^{(l+1)}}{2}\right) \cos q^{(l+1)}} \right) dq^{(1)} \dots dq^{(l-1)} \times \\
 &\quad \times dq^{(l+2)} \dots dq^{(\nu)}, \tag{19}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A(k, q) &= 2 \cos \frac{k^{(l)}}{2} \sum_{\alpha=1}^{l-1} (1 - \cos q^{(\alpha)}) + 2 \cos \frac{k^{(l+1)}}{2} \sum_{\alpha=l+2}^{\nu} (1 - \cos q^{(\alpha)}) + \\
 &\quad + 2 \cos \frac{k^{(l)}}{2} + 2 \cos \frac{k^{(l+1)}}{2} > 0.
 \end{aligned}$$

Действуя так же, как при доказательстве леммы 7, можно показать, что значение внутреннего интеграла в правой части равенства (19) положительно. Отсюда получаем, что $D^{(l)}(k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}) - D^{(l+1)}(k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)}) > 0$ при $k^{(l)} > k^{(l+1)}$.

Пусть $k \in \mathbb{T}_{(l)}^{\nu} \setminus \Pi$ и $k^{(l)} > k^{(l+1)}$. Из полученных для функций $D^{(l)}(k^{(l)}, k^{(l)}, \dots, k^{(l)}, k^{(l+1)}, \dots, k^{(l+1)})$ соотношений получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\mu}^{(1)}(k, E_{\min}(k)) &= \Delta_{\mu}^{(2)}(k, E_{\min}(k)) = \dots = \Delta_{\mu}^{(l)}(k, E_{\min}(k)), \\
 \Delta_{\mu}^{(l+1)}(k, E_{\min}(k)) &= \Delta_{\mu}^{(l+2)}(k, E_{\min}(k)) = \dots = \Delta_{\mu}^{(\nu)}(k, E_{\min}(k)), \\
 \Delta_{\mu}^{(l)}(k, E_{\min}(k)) &< \Delta_{\mu}^{(l+1)}(k, E_{\min}(k)).
 \end{aligned}$$

Кроме того, для любого $0 < \mu < \mu_0$ и $k \in \mathbb{T}_{(l)}^{\nu}$ имеем

$$\begin{aligned}
 \lim_{k^{(l+1)} \rightarrow \pi} \Delta_{\mu}^{(l+1)}(k, E_{\min}(k)) &= -\infty, \\
 \lim_{k^{(l)} \rightarrow 0} \Delta_{\mu}^{(l)}(k, E_{\min}(k)) &= \Delta_{\mu}^{(l)}(0, 0) > 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда, из компактности множества $\mathbb{T}_{(l)}^\nu$ и непрерывности функций $\Delta_\mu^{(l)}(k, E_{\min}(k))$ для любого $0 < \mu < \mu_0$ вытекает, что существует $k_0 \in \mathbb{T}_{(l)}^\nu$ такое, что выполняются неравенства $\Delta_\mu^{(l)}(k_0, E_{\min}(k_0)) < 0$ и $\Delta_\mu^{(l+1)}(k_0, E_{\min}(k_0)) > 0$ одновременно, т.е. множество $E_\mu^{(l)}$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1. Множества $k \in G_\mu^{(l)}$, $l = \overline{0, \nu}$, определенные по формулам (18), удовлетворяют требованиям п. 1 теоремы. Действительно, пусть $k \in G_\mu^{(l)}$, $l = \overline{1, \nu}$. Из определения множества $G_\mu^{(l)}$ вытекает, что $k \in F_\mu^{(j_\alpha)}$ при всех $\alpha = \overline{1, l}$ и $k \notin F_\mu^{(j_\alpha)}$ при $\alpha = \overline{l+1, \nu}$ для некоторого j_α . Согласно определению множества $G_\mu^{(l)}$ и леммам 8, 9 заключаем, что при $k \in G_\mu^{(l)}$, $l = \overline{1, \nu}$, оператор $h_\mu(k)$ имеет ровно l собственных значений ниже порога $E_{\min}(k)$. Из определения множества $G_\mu^{(l)}$, $l = \overline{0, \nu}$, утверждений лемм 1, 2 и 9 получаем, что при $k \in G_\mu^{(0)}$ оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений, лежащих ниже порога $E_{\min}(k)$.

В силу леммы 4 для любых $z < 0$ и $k \in \mathbb{T}^\nu$ имеют место неравенства $\Delta_\mu^{(i)}(k, z) > \Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, z) > \Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0) > 0$, $i = \overline{1, \nu}$. Отсюда и из утверждений лемм 1, 2 вытекает, что оператор $h_\mu(k)$ не имеет отрицательных собственных значений.

2. Пусть $\nu = 1$ или $\nu = 2$. Тогда согласно лемме 5 функция

$$\psi(p) = \sum_{i=1}^{\nu} \sin p^{(i)} \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$$

удовлетворяет уравнению $G_{\mu_0}(\mathbf{0}, 0)\psi = \psi$, т.е. оператор $h_{\mu_0}(\mathbf{0})$ имеет ν -кратный виртуальный уровень на пороге $E_{\min}(\mathbf{0}) = 0$.

Пусть $\nu \geq 3$. Из определения числа μ_0 имеем $\Delta_{\mu_0}^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0$, $i = \overline{1, \nu}$. В силу леммы 5 порог $E_{\min}(\mathbf{0}) = 0$ является ν -кратным собственным значением оператора $h_{\mu_0}(\mathbf{0})$.

Из определений функций $E_k(q)$ и $E_{\min}(k)$ вытекает, что при ненулевых $k \in \mathbb{T}^\nu$ почти всюду имеет место неравенство $E_k(q) - E_{\min}(k) < E_0(q)$. Следовательно, получаем неравенство

$$\Delta_{\mu_0}^{(i)}(k, E_{\min}(k)) < \Delta_{\mu_0}^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0, \quad k \neq 0, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

Согласно лемме 8 при всех ненулевых $k \in \mathbb{T}^\nu$ оператор $h_{\mu_0}(k)$ имеет ровно ν собственных значений (с учетом кратности) ниже $E_{\min}(k)$. Теперь покажем положительность собственных значений $z_{\mu_0}^{(i)}(k)$, $k \neq 0$, $i = \overline{1, \nu}$. Так как $\Delta_{\mu_0}^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0$, в силу леммы 4 получим, что $\Delta_{\mu_0}^{(i)}(k, 0) > 0$, $i = \overline{1, \nu}$, при всех ненулевых $k \in \mathbb{T}^\nu$. Из монотонности функции $\Delta_{\mu_0}^{(i)}(k, \cdot)$ при всех ненулевых $k \in \mathbb{T}^\nu$ вытекают неравенства

$$\Delta_{\mu_0}^{(i)}(k, 0) > \Delta_{\mu_0}^{(i)}(k, z_{\mu_0}^{(i)}(k)) = 0 > \Delta_{\mu_0}^{(i)}(k, E_{\min}(k)), \quad i = \overline{1, \nu}.$$

Таким образом, собственные значения $z_{\mu_0}^{(i)}(k)$, $i = \overline{1, \nu}$, оператора $h_{\mu_0}(k)$ принадлежат интервалу $(0, E_{\min}(k))$.

3. Пусть $\mu > \mu_0$. Используя соотношение

$$\Delta_\mu^{(i)}(k, E_{\min}(k)) < \Delta_\mu^{(i)}(\mathbf{0}, 0) < \Delta_{\mu_0}^{(i)}(\mathbf{0}, 0) = 0$$

и рассуждая, как в п. 2 доказательства теоремы, убеждаемся, что оператор $h_\mu(k)$ имеет ровно ν собственных значений (с учетом кратности) ниже порога $E_{\min}(k)$. При $\mu > 4\nu$ из утверждений леммы 4 вытекают соотношения

$$\Delta_\mu^{(i)}(k, 0) \leq \max_{k \in \mathbb{T}^\nu} \Delta_\mu^{(i)}(k, 0) = 1 - \frac{\mu}{4\nu} < 0, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

Согласно лемме 8 оператор $h_\mu(k)$ имеет ν отрицательных собственных значений (с учетом кратности), лежащих ниже порога $E_{\min}(k)$.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность Р. А. Минлосу за внимание к работе.

Список литературы

- [1] P. A. Faria da Veiga, L. Ioriatti, M. O'Carroll, *Phys. Rev. E*, **66**:1 (2002), 6130.
- [2] D. C. Mattis, *Rev. Modern Phys.*, **58**:2 (1986), 361–379.
- [3] A. I. Mogilner, “Hamiltonians in solid-state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results”, *Many Particle Hamiltonians: Spectra and Scattering*, Adv. Soviet Math., **5**, ed. R. A. Minlos, AMS, Providence, RI, 1991, 139–194.
- [4] S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 91–115.
- [5] С. Н. Лакаев, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28.
- [6] А. М. Халхужаев, *Узбек. матем. журн.*, 2000, № 3, 32–39.
- [7] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

Поступила в редакцию 18.03.2008,
после доработки 6.05.2008