Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 2, 292–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:26:26

© 2009 г. С. Д. Глызин*, А. Ю. Колесов*, Н. Х. Розов†

К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗУЕМОСТИ СЦЕНАРИЯ РАЗВИТИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО ЛАНДАУ

Предложена феноменологическая модель развития турбулентности, представляющая собой нелинейное уравнение Клейна–Гордона, возмущенное неконсервативными добавками. С помощью сочетания аналитических и численных методов установлено, что переход к турбулентности в этом уравнении может происходить как по сценарию Ландау, так и в соответствии со сценарием Ландау–Селла. Первый из упомянутых сценариев связан, как известно, с каскадом бифуркаций устойчивых инвариантных торов все более высоких размерностей. Во втором случае мы имеем дело с хаотическим аттрактором, ляпуновская размерность которого при изменении некоторого управляющего параметра неограниченно растет.

Ключевые слова: сценарий Ландау, инвариантный тор, бифуркация, турбулентный аттрактор, хаос.

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамическая теория развития турбулентности берет свое начало с классических работ Ландау [1] и Хопфа [2]. В первой из этих работ была выдвинута гипотеза о том, что возникновение турбулентности связано с последовательным усложнением динамики за счет появления устойчивых инвариантных торов все более высоких размерностей с квазипериодической обмоткой. Во второй работе построен достаточно простой пример динамической системы, в которой наблюдается описанный в работе [1] каскад бифуркаций инвариантных торов.

Гипотеза Ландау сыграла большую роль в процессе осознания природы турбулентности. В частности, развитые Ландау представления легли в основу известных гипотез Колмогорова о росте размерности аттракторов уравнений Навье–Стокса при увеличении числа Рейнольдса. Однако современные представления о турбулентности сложились во многом благодаря открытию феномена динамического хаоса [3]. К настоящему времени выработано несколько различных эвристических сценариев

*Ярославский государственный университет, Ярославль, Россия.
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru

†Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: rozov@rozov.mccme.ru

перехода к турбулентности, среди которых следует отметить разрушение квазипериодических движений [4], [5], перемежаемость [6] и бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода [7]. Что же касается сценария Ландау, то его нельзя отнести к числу основных, поскольку аттрактор в виде незамкнутой плотной намотки на многомерном торе структурно неустойчив, т.е. он разрушается при малом изменении параметров системы. Тем не менее усложнение динамики по Ландау все же реализуется в некоторых специальных случаях. Для примера сошлемся на статью [8], где изучалась цепочка однонаправленно связанных ротаторов.

Итак, достаточно ясно, что рассматривать вопрос о реализуемости механизма развития турбулентности по Ландау в его первоначальном варианте не имеет смысла. В связи с этим всюду ниже, следуя идеям Селла [9], под сценарием Ландау мы будем понимать каскад бифуркаций

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_N \rightarrow T_{N+1} \rightarrow \dots \quad (1)$$

устойчивых инвариантных торов T_N , $N \geq 1$, не требуя при этом квазипериодичности движений на каждом из них. Очевидно, что в таком расширенном варианте данный сценарий уже не является экзотическим. Более того, его можно связать с концепцией динамического хаоса, если в цепочке (1) каждый инвариантный тор T_N , начиная с некоторого номера N_0 , заменить хаотическим аттрактором A_N и предположить, что $d_L(A_N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, где d_L – ляпуновская размерность. Так как при этом не исключен случай $A_N \subset T_N$, $N \geq N_0$, получившуюся в результате последовательность бифуркаций уместно назвать сценарием Ландау–Селла.

Дополнительным аргументом в пользу введенного термина служит тот факт, что принципиальная возможность сохранения хаотического аттрактора при бифуркации $T_N \rightarrow T_{N+1}$ была установлена в уже упоминавшейся статье Селла [9].

Цель настоящей работы – проиллюстрировать реализуемость сценариев Ландау и Ландау–Селла в рамках некоторой феноменологической модели. В качестве таковой рассматривается нелинейная краевая задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u + b u^5 = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon u + \nu u_{xx}) - u_t \int_0^1 (u_t)^2 dx, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

где a, b, ε, ν – произвольные положительные параметры, $u = u(t, x)$ – скалярная вещественная функция.

Причины, по которым мы остановили свой выбор на модели (2), состоят в следующем. Во-первых, при ее построении за основу взято нелинейное уравнение Клейна–Гордона на отрезке $0 \leq x \leq 1$ с нулевыми граничными условиями Дирихле. Соответствующую краевую задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u + b u^5 = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad (3)$$

можно рассматривать как некий аналог уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости, так как, в частности, она допускает закон сохранения

$$\int_0^1 \left((u_t)^2 + a^2 (u_x)^2 + u^2 + b \frac{u^6}{3} \right) dx \equiv \text{const}. \quad (4)$$

Во-вторых, при переходе от (3) к (2) мы добавили в правую часть уравнения Клейна–Гордона слагаемые $\varepsilon u_t - u_t \int_0^1 (u_t)^2 dx$ и νu_{txx} , которые в гидродинамической интерпретации соответствуют возбуждающей силе и вязкости.

Следует отметить, что предложенная нами гидродинамическая модель (2) хотя и существенно проще, чем исходная система уравнений Навье–Стокса, тем не менее является весьма содержательной. Как будет установлено ниже, при согласованном стремлении параметров ε и ν к нулю в ней происходит развитие турбулентности по Ландау, а при $\varepsilon \sim 1$, $\nu \rightarrow 0$ реализуется сценарий Ландау–Селла.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Краевую задачу (2) будем рассматривать как динамическую систему в фазовом пространстве $\dot{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$, где, как обычно, через $\dot{W}_2^1(0, 1)$ обозначено замыкание по норме

$$\|u\|_{\dot{W}_2^1} = \left(\int_0^1 u^2 dx + a^2 \int_0^1 (u')^2 dx \right)^{1/2} \quad (5)$$

линеала гладких функций $u(x)$, $0 \leq x \leq 1$, удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$. Для того чтобы определить понятие обобщенного решения этой задачи с начальными условиями из указанного фазового пространства, положим $w_1 = \mathcal{D}u$, $w_2 = u_t$, где $\mathcal{D}: \dot{W}_2^1(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ – арифметический квадратный корень из оператора $I - a^2 d^2/dx^2$, I – единичный оператор. В итоге в пространстве $E = L_2([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, состоящем из вектор-функций

$$w = (w_1, w_2)^T, \quad w_1, w_2 \in L_2(0, 1), \quad \|w\|_E = \left(\int_0^1 (w_1^2 + w_2^2) dx \right)^{1/2}, \quad (6)$$

получаем абстрактное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{w} = Aw + F(w). \quad (7)$$

Здесь $A = \mathcal{V}_0 \mathcal{D} - \mathcal{V}_1 \mathcal{D}^2 + \mathcal{V}_2$,

$$\mathcal{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu/a^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon + \nu/a^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$F(w) = \left(0, -b(\mathcal{D}^{-1}w_1)^5 - w_2 \int_0^1 w_2^2 dx \right)^T,$$

а операторы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^2$ применяются к вектор-функции (6) покомпонентно. Например, $\mathcal{D}w = (\mathcal{D}w_1, \mathcal{D}w_2)^T$.

Убедимся, что оператор A порождает в E сильно непрерывную по $t \geq 0$ группу линейных ограниченных операторов $\exp(At)$. Для этого обратимся к разложениям Фурье:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_{(k)} e_k(x), \quad \mathcal{D}w = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k w_{(k)} e_k(x), \quad w_{(k)} = \int_0^1 w e_k(x) dx, \quad (9)$$

$$e_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x), \quad \omega_k = \sqrt{1 + a^2 \pi^2 k^2}, \quad k \geq 1.$$

Из представлений (9) и из явного выражения для A очевидным образом следует, что интересующая нас полугруппа действует на любой элемент $w \in E$ по правилу

$$\exp(At)w = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[(\omega_k \mathcal{V}_0 - \omega_k^2 \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)t] w_{(k)} e_k(x). \quad (10)$$

Наличие полугруппы (10) позволяет определить понятие обобщенного решения в первую очередь для уравнения (7): под обобщенным решением этого уравнения с произвольным начальным условием $w(0) = w_0 \in E$ будем понимать непрерывную вектор-функцию $w(t)$ со значениями в E , удовлетворяющую на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ интегральному уравнению

$$w(t) = \exp(At)w_0 + \int_0^t \exp(A(t-s))F(w(s))ds. \quad (11)$$

Полагая затем $u(t, \cdot) = \mathcal{D}^{-1}w_1(t)$, $u_t(t, \cdot) = w_2(t)$, где $w_1(t)$, $w_2(t)$ – компоненты введенной в (6) вектор-функции $w(t)$, получаем искомое обобщенное решение

$$(u(t, x), u_t(t, x)) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1) \quad (12)$$

исходной краевой задачи (2). Подчеркнем, что включение в (12) имеет место по переменной x при любом фиксированном $t \in [0, \bar{t}]$. При этом сама вектор-функция (u, u_t) непрерывна по t в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$ с нормой

$$\|(u, u_t)\|_{\overset{\circ}{W}_2^1 \times L_2} = \left(\|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1}^2 + \|u_t\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Обратимся теперь к вопросу о существовании обобщенных решений. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Обобщенное решение (12) краевой задачи (2) с произвольными начальными условиями*

$$u|_{t=0} = u_0(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \in L_2(0, 1) \quad (14)$$

существует и единственно при всех $t \geq 0$.

При обосновании сформулированной теоремы нам потребуются некоторые факты из теории так называемых абстрактных полулинейных дифференциальных уравнений. В связи с этим будем рассматривать уравнение (7) в произвольном вещественном банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|$, предполагая, что, во-первых, $A: E_A \rightarrow E$ – замкнутый линейный оператор с плотной в E областью определения E_A , являющийся инфинитезимальным производящим для C^0 -полугруппы линейных ограниченных операторов $\exp(At)$, $t \geq 0$; во-вторых, нелинейный оператор $F: E \rightarrow E$ бесконечно дифференцируем по Фреше и ограничен на любом ограниченном подмножестве $\Omega \subset E$ вместе с любым конечным числом своих производных. Подчеркнем, что перечисленным свойствам заведомо удовлетворяет нелинейный оператор F из (8). Уравнение (7) при выполнении указанных условий будем называть полулинейным.

Дополним уравнение (7) начальным условием

$$w(0) = w_0, \quad (15)$$

где w_0 – произвольный элемент из E . Под обобщенным решением задачи Коши (7), (15), как уже было сказано выше, понимается непрерывное решение соответствующего интегрального уравнения (11). Пусть теперь $w_0 \in E_A$. Тогда классическим решением задачи Коши (7), (15) назовем такую непрерывно дифференцируемую на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ вектор-функцию $w = w(t)$, что, во-первых, $w(t) \in E_A$ и $Aw(t)$ непрерывна при каждом $t \in [0, \bar{t}]$; во-вторых, функция $w(t)$ на рассматриваемом отрезке удовлетворяет уравнению (7), а при $t = 0$ – начальному условию (15).

Общая теория абстрактных полулинейных дифференциальных уравнений содержится, например, в монографиях [10], [11]. Из приведенных там построений вытекает следующая серия утверждений.

ЛЕММА 1. По любому ограниченному множеству $\Omega \subset E$ можно указать такое $t_0 = t_0(\Omega) > 0$, что каждое обобщенное решение $w = w(t, w_0)$ уравнения (7) с начальным условием $w(0, w_0) = w_0 \in \Omega$ однозначно определено на отрезке $0 \leq t \leq t_0$. В случае $w_0 \in \Omega \cap E_A$ это решение при всех $t \in [0, t_0]$ будет классическим.

ЛЕММА 2. Пусть задано произвольное (вообще говоря, обобщенное) решение $w = w_*(t)$ уравнения (7) на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$. Тогда найдется такое достаточно малое $r_0 > 0$, что любое обобщенное решение $w = w(t, w_0)$ этого уравнения с начальным условием $w(0, w_0) = w_0 \in B$, $B = \{w \in E: \|w - w_*(0)\| \leq r_0\}$, существует на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ и непрерывно по совокупности переменных $(t, w_0) \in [0, \bar{t}] \times B$. Если же дополнительно $w_0 \in E_A$, то соответствующее решение $w(t, w_0)$ при всех $t \in [0, \bar{t}]$ оказывается классическим.

ЛЕММА 3. Для любого обобщенного решения $w = w_*(t)$, определенного на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$, найдется такая последовательность классических решений $w = w_n(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, $n \geq 1$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|w_*(t) - w_n(t)\| = 0. \quad (16)$$

Скажем несколько слов об обосновании каждой из приведенных лемм. Существование и единственность обобщенных решений, о которых говорится в лемме 1, вытекает из анализа интегрального уравнения (11). Действительно, обозначим через Π оператор, порождаемый правой частью этого уравнения в пространстве $C([0, t_0]; E)$ непрерывных на отрезке $0 \leq t \leq t_0$ вектор-функций $w(t) \in E$ с нормой $\|w(t)\|_C = \max_{0 \leq t \leq t_0} \|w(t)\|$. Опираясь на свойства ограниченности и гладкости оператора F и используя для оператора $\exp(At)$ известную оценку $\|\exp(At)\|_{E \rightarrow E} \leq c_1 e^{c_2 t}$, $t \geq 0$, $c_1 = \text{const} > 0$, $c_2 = \text{const} \in \mathbb{R}$, нетрудно установить существование для любого фиксированного $r_0 > 0$ такого не зависящего от $w_0 \in \Omega$ достаточно малого значения $t_0 = t_0(r_0, \Omega) > 0$, что оператор Π преобразует в себя множество $\{w(t) \in C([0, t_0]; E): \|w(t) - \exp(At)w_0\|_C \leq r_0\}$ и оказывается сжимающим. Отсюда очевидным образом следует, что любое обобщенное решение $w(t, w_0)$ уравнения (7) с начальным условием $w_0 \in \Omega$ однозначно определено на отрезке $0 \leq t \leq t_0$. Более

того, используя введенные в работе [11] (см. с. 71–76) конструкции, можно показать, что при $w_0 \in \Omega \cap E_A$ это решение будет классическим.

Доказательство существования обобщенных решений из леммы 2 связано с анализом аналогичного (11) интегрального уравнения

$$\Pi(h, w_0) = 0, \quad (h, w_0) \in C([0, \bar{t}]; E) \times E, \quad (17)$$

где $h(t) = w(t, w_0) - w_*(t)$,

$$\begin{aligned} \Pi(h, w_0) = & h(t) - \exp(At)(w_0 - w_*(0)) - \\ & - \int_0^t \exp(A(t-s)) [F(w_*(s) + h(s)) - F(w_*(s))] ds. \end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что в точке $h = 0$, $w_0 = w_*(0)$ к этому уравнению применима теорема о неявном отображении по переменной h . Таким образом, обобщенные решения уравнения (7), о которых говорится в лемме 2, задаются равенством $w(t, w_0) = w_*(t) + h(t, w_0)$, где $h(t, w_0) \in C([0, \bar{t}]; E)$ – решение уравнения (17), существующее при всех w_0 , близких к $w_*(0)$, и непрерывное по совокупности переменных.

Для обоснования утверждения леммы 2, касающегося классических решений, достаточно показать, что любое обобщенное решение $w(t)$ уравнения (7), определенное на произвольном отрезке $t \in [0, \bar{t}]$, в случае $w(0) \in E_A$ является классическим. Проверка этого факта базируется на лемме 1. В самом деле, взяв в условиях этой леммы в качестве начального множества Ω кривую $\{w = w(t), 0 \leq t \leq \bar{t}\}$, последовательно убеждаемся, что интересующее нас решение будет классическим на отрезках $[0, t_0]$, $[t_0, 2t_0]$, $[2t_0, 3t_0]$ и т.д., где $t_0 = t_0(\Omega) > 0$.

Лемма 3 непосредственно вытекает из леммы 2. Для того чтобы убедиться в этом, возьмем такую последовательность $w_n \in E_A$ (существующую в силу плотности E_A в E), что $\|w_n - w_*(0)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Далее, без ограничения общности будем считать, что $w_n \in E_A \cap B$, где $B = \{w \in E: \|w - w_*(0)\| \leq r_0\}$, а постоянная $r_0 > 0$ выбрана в соответствии с леммой 2 по решению $w = w_*(t)$. В этом случае каждое решение $w_n(t) = w(t, w_n)$ уравнения (7) с начальным условием $w(0, w_n) = w_n$ заведомо является классическим и определено на всем отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$. Что же касается требуемого предельного равенства (16), то оно является очевидным следствием непрерывности функции $w(t, w_0)$ по совокупности переменных $(t, w_0) \in [0, \bar{t}] \times B$.

В дальнейшем нам потребуется еще одна лемма, связанная с продолжением решений уравнения (7). Прежде чем ее формулировать, для каждого решения $w(t)$ этого уравнения с начальным условием (15) определим так называемый максимальный полуинтервал существования $[0, t_{\max})$, где

$$t_{\max} = \sup\{t_0: w(t) \text{ существует на отрезке } t \in [0, t_0]\}. \quad (18)$$

В силу леммы 1 множество значений t_0 , по которым берется точная верхняя грань в (18), заведомо не пусто. Ясно также, что любое решение $w(t)$ однозначно продолжается на свой максимальный полуинтервал $[0, t_{\max})$, причем не исключен случай

$t_{\max} = +\infty$. Если же, напротив, $t_{\max} < +\infty$, то оказывается справедливым следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *Предположим, что для некоторого обобщенного решения $w(t)$ уравнения (7) конечна величина (18). Тогда имеет место предельное равенство*

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max} - 0} \|w(t)\| = +\infty. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проводится от противного. Действительно, предположим, что соотношение (19) не выполняется. В этом случае существуют такая последовательность моментов времени t_n , $t_n \rightarrow t_{\max} - 0$ при $n \rightarrow \infty$, и такая постоянная $M > 0$, что $\|w(t_n)\| \leq M$, $n \geq 1$. Далее, в условиях леммы 1 в качестве ограниченного множества Ω возьмем $\{w(t_n), n \geq 1\}$. Тогда, очевидно, решение $w(t)$ будет определено на всех отрезках вида $[t_n, t_n + t_0]$, $n \geq 1$, где $t_0 = t_0(\Omega) > 0$. Ясно также, что при достаточно больших n выполняется включение $t_{\max} \in (t_n, t_n + t_0)$. Но это противоречит определению $t_{\max}$ (см. (18)). Лемма доказана.

Обратимся теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. В связи с этим фиксируем произвольно начальные функции (14), а затем перейдем в начально-краевой задаче (2), (14) к переменным (6). В результате получим задачу Коши (7), (15), в которой $w_0 = (w_1^0, w_2^0)^T$, $w_1^0 = \mathcal{D}u_0(x)$, $w_2^0 = u_1(x)$. Применяя далее к упомянутой задаче лемму 1, убеждаемся, что ее обобщенное решение $w(t) = (w_1(t), w_2(t))^T$ однозначно определено на своем максимальном полуинтервале существования $[0, t_{\max})$. Наконец, осуществляя обратный переход от переменных (6) к исходным переменным (u, u_t) , получаем единственное обобщенное решение

$$(u(t, x), u_t(t, x)) \in \mathring{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1), \quad t \in [0, t_{\max}), \quad (20)$$

интересующей нас смешанной задачи (2), (14).

Итак, для завершения обоснования теоремы 1 осталось лишь установить, что фигурирующая в (20) величина $t_{\max}$ равна $+\infty$. В силу леммы 4 для этого достаточно показать справедливость для любого $t \in [0, t_{\max})$ априорной оценки вида

$$\|(u, u_t)\|_{\mathring{W}_{\frac{1}{2}} \times L_2} \leq c \cdot e^{\varepsilon t}, \quad c = \text{const} > 0, \quad (21)$$

препятствующей “уходу” решения (u, u_t) в бесконечность за конечное время.

Для того чтобы убедиться в выполнении требуемого неравенства, фиксируем произвольно значение $\bar{t} \in [0, t_{\max})$ и на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ аппроксимируем построенное выше обобщенное решение (20) классическими решениями. Согласно лемме 3 найдется такая последовательность классических решений $u_n(t, x)$, $n \geq 1$, краевой задачи (2), что

$$\max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|u - u_n\|_{\mathring{W}_{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0, \quad \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Остановимся на некоторых необходимых в дальнейшем свойствах функций $u_n(t, x)$. Нетрудно увидеть, что область определения оператора A (см. (7), (8)) задается равенством

$$E_A = \{w = (w_1, w_2)^T \in E: w_1 \in \mathring{W}_2^1(0, 1), w_2 \in \mathring{W}_2^2(0, 1)\}. \quad (23)$$

Отсюда и из приведенного выше общего определения классических решений полунелинейных уравнений вида (7) вытекает, что в данном случае, во-первых,

$$\begin{aligned} u_n(t, \cdot) &\in C^1([0, \bar{t}]; \overset{\circ}{W}_2^1) \cap C([0, \bar{t}]; \overset{\circ}{W}_2^2), \\ \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, \cdot) &\in C^1([0, \bar{t}]; L_2) \cap C([0, \bar{t}]; \overset{\circ}{W}_2^2); \end{aligned} \quad (24)$$

во-вторых, при любом фиксированном $t \in [0, \bar{t}]$ и при каждом $n \geq 1$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + u_n + bu_n^5 = \varepsilon \frac{\partial u_n}{\partial t} + \nu \frac{\partial^3 u_n}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial u_n}{\partial t} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (25)$$

Точнее говоря, в силу (24) все фигурирующие в (25) производные заведомо принадлежат пространству $L_2(0, 1)$ по x , и само соотношение (25) понимается в смысле равенства в $L_2(0, 1)$ по переменной x .

Покажем сначала, что интересующая нас оценка (21) выполняется для решений $u_n(t, x)$, $n \geq 1$. С этой целью умножим левую и правую части соотношения (25) на $\partial u_n / \partial t$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до 1. В результате убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) &= \varepsilon \int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx - \nu \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx - \\ &\quad - \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx \right)^2 \leq \varepsilon \int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \leq \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} + 2\varepsilon \int_0^t \varkappa_n(\tau) d\tau, \quad (26)$$

где $\varkappa_n(t) = \int_0^1 (\partial u_n / \partial t)^2 dx$, $\ell(u, u_t)$ – функционал, определяемый левой частью формулы (4). Далее, учитывая вытекающие из (4), (5), (13) очевидные неравенства

$$\varkappa_n(t) \leq \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right), \quad \left\| \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{\overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}} \times L_2}^2 \leq \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right),$$

из неравенства (26) и леммы Гронуолла–Беллмана последовательно получаем следующие оценки:

$$\varkappa_n(t) \leq \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \cdot e^{2\varepsilon t}, \quad \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \leq \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \cdot e^{2\varepsilon t}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует искомая оценка для классических решений $u_n(t, x)$: при любом $t \in [0, \bar{t}]$

$$\left\| \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{\overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}} \times L_2} \leq \sqrt{\ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}} \cdot e^{\varepsilon t}. \quad (27)$$

На завершающем этапе, привлекая свойства (22), перейдем в (27) к пределу при $n \rightarrow \infty$. В итоге на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ получаем требуемую априорную оценку (21) с константой $c = \sqrt{\ell(u_0, u_1)}$, где u_0, u_1 – начальные функции из (14). Остается заметить, что в силу произвольности $\bar{t} \in (0, t_{\max})$ эта оценка справедлива на всем полуинтервале $[0, t_{\max})$. Теорема 1 доказана.

Следует добавить, что утверждение теоремы 1 сохраняется (вместе с обоснованием) и в случае $\nu = 0$. В некоторой корректировке нуждаются только равенство (23) и свойства (24) классических решений: при $\nu = 0$ в (23), (24) для компонент w_2 и $\partial u_n / \partial t$ должны выполняться включения

$$w_2 \in \mathring{W}_2^1(0, 1), \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, \cdot) \in C^1([0, \bar{t}]; L_2) \cap C([0, \bar{t}]; \mathring{W}_2^1).$$

3. АНАЛИЗ ЛОКАЛЬНЫХ АТТРАКТОРОВ

В данном разделе мы изучим локальные (располагающиеся в некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия) аттракторы краевой задачи (2) при условии малости параметров ε и ν . В связи с этим рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (u + \nu_0 u_{xx}) - \varepsilon u_t \int_0^1 (u_t)^2 dx - \varepsilon^2 b u^5, \quad (28)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

получающуюся из (2) при $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu = \nu_0 \varepsilon$, $\nu_0 = \text{const} \geq 0$ после замены $u/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow u$.

Для исследования аттракторов задачи (28) воспользуемся бесконечномерным аналогом известного асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского [12]. Суть упомянутого метода состоит в том, что возможные автоколебательные режимы рассматриваемой задачи ищутся в виде формального разложения

$$u = u_0(t, \tau, x) + \varepsilon u_1(t, \tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (29)$$

Здесь

$$u_j(t, \tau, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,j}(t, \tau) e_n(x), \quad j = 0, 1, \quad (30)$$

$$u_{n,0} = z_n(\tau) e^{i\omega_n t} + \bar{z}_n(\tau) e^{-i\omega_n t}, \quad n \geq 1, \quad (31)$$

функции $e_n(x)$ и частоты ω_n те же, что и в (9), а неизвестные (подлежащие определению) комплексные амплитуды $z_n(\tau)$, $n \geq 1$, таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$ (в этом случае после подстановки соотношений (31) в ряд (30) при $j = 0$ получается функция из класса $\mathring{W}_2^1$ по переменной x). Что касается поправки порядка ε из (29), то фигурирующие в ней функции $u_{n,1}(t, \tau)$ будем искать в классе формальных тригонометрических рядов переменных $\omega_k t$, $k \geq 1$.

Итак, подставим в краевую задачу (28) разложения (29), (30) и приравняем коэффициенты при ε . В результате приходим к счетной системе линейных неоднородных

дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}_{n,1} + \omega_n^2 u_{n,1} = f_n(t, \tau), \quad n \geq 1, \quad (32)$$

где, как обычно, точкой обозначена производная по t , переменная τ считается параметром, а функции $f_n(t, \tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_n &= f_n^0 e^{i\omega_n t} + \overline{f_n^0} e^{-i\omega_n t} - \dot{u}_{n,0} \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{u}_{k,0})^2, \\ f_n^0 &= i\omega_n (1 - \nu_0 \pi^2 n^2) z_n - 2i\omega_n \frac{dz_n}{d\tau}. \end{aligned} \quad (33)$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнений (32) в интересующем нас классе функций является отсутствие в их правых частях (33) гармоник $e^{\pm i\omega_n t}$. Добиться равенства нулю коэффициентов при указанных гармониках удастся за счет имеющихся в запасе комплексных амплитуд z_n , для которых при этом получается некоторая счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Нетрудно проверить, что после перехода к переменным $\xi_n = \omega_n z_n$, $n \geq 1$, упомянутая система записывается в виде

$$2 \frac{d\xi_n}{d\tau} = \left[1 - \nu_0 \pi^2 n^2 - 3|\xi_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k \geq 1, \\ k \neq n}} |\xi_k|^2 \right] \xi_n, \quad n \geq 1. \quad (34)$$

Завершая описание алгоритмической части нашего метода, введем в рассмотрение пространство последовательностей Z_0 (над полем вещественных чисел), состоящее из бесконечномерных векторов

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1, \bar{\xi}_1, \dots, \xi_n, \bar{\xi}_n, \dots), \quad \xi_k \in \mathbb{C}, \quad k \geq 1, \\ \|\xi\| &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Заметим, что согласно работе [10] система (34) порождает абстрактное полулинейное параболическое уравнение в пространстве Z_0 . Опираясь на известные свойства таких уравнений (см. леммы 1–4) и очевидные априорные оценки $|\xi_n(\tau)|^2 \leq |\xi_n(0)|^2 e^\tau$, $n \geq 1$, $\tau \geq 0$, нетрудно убедиться, что любое решение $\xi(\tau) = (\xi_1(\tau), \bar{\xi}_1(\tau), \dots, \xi_n(\tau), \bar{\xi}_n(\tau), \dots)$ данной системы с начальным условием $\xi(0) \in Z_0$ определено на полуоси $\tau \geq 0$. Поэтому если мы зафиксируем какое-либо из таких решений и подставим $z_n(\tau) = \xi_n(\tau)/\omega_n$, $n \geq 1$, в (33), то все уравнения (32) станут разрешимыми в классе тригонометрических рядов, а их решения примут вид

$$u_{n,1} = -\frac{i}{8\omega_n^2} (\xi_n^3 e^{3i\omega_n t} - \bar{\xi}_n^3 e^{-3i\omega_n t}) + i\xi_n u_{n,1}^0 - i\bar{\xi}_n \overline{u_{n,1}^0}, \quad (35)$$

где

$$u_{n,1}^0 = \sum_{\substack{k \geq 1, \\ k \neq n}} \frac{1}{4\omega_k} \left(\frac{\bar{\xi}_k^2}{\omega_n - \omega_k} e^{i(\omega_n - 2\omega_k)t} - \frac{\xi_k^2}{\omega_n + \omega_k} e^{i(\omega_n + 2\omega_k)t} \right).$$

Чтобы придать изложенным формальным построениям необходимую строгость, перейдем от (34) к системе для амплитуд $\rho_n = |\xi_n|^2$:

$$\frac{d\rho_n}{d\tau} = \left[1 - \nu_0 \pi^2 n^2 - 3\rho_n - 2 \sum_{\substack{k \geq 1, \\ k \neq n}} \rho_k \right] \rho_n, \quad n \geq 1, \quad (36)$$

и будем рассматривать последнюю как самостоятельную динамическую систему в конусе K векторов с неотрицательными координатами из пространства

$$l = \left\{ \rho = (\rho_1, \dots, \rho_n, \dots) : \|\rho\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n| < \infty \right\}. \quad (37)$$

Предположим, что система (36) имеет состояние равновесия с конечным числом ненулевых координат $\rho_{n_j} = \rho_{n_j}^0 > 0$, $j = 1, \dots, k$, экспоненциально устойчивое или дихотомичное (в метрике фазового пространства (37)). Тогда справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Введенному выше состоянию равновесия системы (36) в исходной краевой задаче (28) при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, соответствует k -мерный инвариантный тор T_k с теми же свойствами устойчивости. Указанный тор задается уравнениями*

$$u = \sum_{j=1}^k \frac{2}{\omega_{n_j}} \sqrt{\rho_{n_j}^0} \cos \varphi_j \cdot e_{n_j}(x) + \varepsilon U_*(\varphi, x, \varepsilon), \quad (38)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon^2 \Phi_*(\varphi, \varepsilon),$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)^T$, $\omega = (\omega_{n_1}, \dots, \omega_{n_k})^T$, а 2π -периодические по φ функции U_* , Φ_* ограничены равномерно по φ, ε (вместе с любым фиксированным числом производных по φ) в метриках пространств $\dot{W}_2^1(0, 1)$ и $\mathbb{R}^k$ соответственно.

Сформулированная теорема представляет собой частный случай установленного в монографии [11] (см. гл. 1) общего результата о бифуркации инвариантных торов в абстрактных нелинейных системах. Отметим, что в [11] реализован геометрический подход к проблеме существования и устойчивости инвариантных торов, основанный на исследовании динамических свойств оператора сдвига по траекториям рассматриваемой системы за фиксированное конечное время $t_0 > 0$. Что касается краевой задачи (28), то для нее ввести такого рода оператор позволяет полученная выше теорема 1.

Теорема 2 сводит интересующую нас проблему аттракторов краевой задачи (28) к поиску устойчивых состояний равновесия системы (36). Для формулировки соответствующего результата рассмотрим монотонно убывающую последовательность

$$\bar{\nu}_N = \frac{3}{\pi^2 N(4N^2 - 1)}, \quad N \geq 1, \quad (39)$$

критических значений параметра ν_0 . Динамику системы (36) по этому параметру описывает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что параметр ν_0 удовлетворяет неравенствам*

$$\bar{\nu}_{N+1} < \nu_0 < \bar{\nu}_N \quad (40)$$

при некотором натуральном N . Тогда система (36) имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия O_N с координатами

$$\rho_n = \begin{cases} \frac{1}{2N+1} + \frac{\nu_0 \pi^2}{3} N(N+1) - \nu_0 \pi^2 n^2 & \text{при } n = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{при } n \geq N+1. \end{cases} \quad (41)$$

Все остальные возможные состояния равновесия этой системы, лежащие в конусе K , при условиях (40) экспоненциально неустойчивы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Факт существования у системы (36) при $\nu_0 \in [0, \bar{\nu}_N)$ состояния равновесия O_N проверяется непосредственно. Система в вариациях на нем распадается на систему из N уравнений

$$\dot{h} = -Bh, \quad h = (h_1, \dots, h_N)^T, \quad (42)$$

где элементы $b_{j,r}$, $j, r = 1, \dots, N$, матрицы B таковы, что $b_{j,j} = 3\rho_j$, $b_{j,r} = 2\rho_j$ при $j \neq r$, и на серию скалярных уравнений

$$\dot{h}_m = (1 - 2S - \nu_0 \pi^2 m^2) h_m, \quad S = \sum_{j=1}^N \rho_j, \quad m \geq N+1. \quad (43)$$

Анализ свойств устойчивости системы (42) сводится, очевидно, к исследованию расположения корней уравнения $\det(\lambda I + B) = 0$, здесь I – единичная матрица. Покажем, что все они вещественны и отрицательны.

Для того чтобы раскрыть введенный выше определитель, сначала вычтем последний столбец матрицы $\lambda I + B$ из всех предыдущих. После этого добавим к последней строке получившейся матрицы все остальные ее строки, умножив j -ю строку на $(\rho_N + \lambda)/(\rho_j + \lambda)$, $j = 1, \dots, N-1$. В итоге интересующее нас уравнение $\det(\lambda I + B) = 0$ преобразуется к виду

$$(\rho_1 + \lambda) \dots (\rho_N + \lambda) \left[1 + \sum_{j=1}^N \frac{2\rho_j}{\rho_j + \lambda} \right] = 0. \quad (44)$$

Далее, нетрудно заметить, что в силу вытекающих из (41) неравенств $\rho_n > \rho_{n+1}$, $n = 1, \dots, N-1$, числа $\lambda = -\rho_j$, $j = 1, \dots, N$, не являются решениями уравнения (44), а значит, оно эквивалентно уравнению

$$\sum_{j=1}^N \frac{\rho_j}{\rho_j + \lambda} = -\frac{1}{2}. \quad (45)$$

Это уравнение имеет на полуоси $\lambda < 0$ ровно N различных корней, так как входящая в левую часть (45) функция на интервалах $(-\rho_j, -\rho_{j+1})$, $j = 1, \dots, N-1$, и $(-\infty, -\rho_1)$ монотонно меняется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$ соответственно.

Анализ уравнений (43) тривиален. Действительно, опираясь на формулы (39), (41), приходим к выводу, что

$$\max_{m \geq N+1} (1 - 2S - \nu_0 \pi^2 m^2) = \frac{1 - \nu_0 / \bar{\nu}_{N+1}}{2N + 1}.$$

Отсюда очевидным образом следует, что состояние равновесия O_N экспоненциально устойчиво (неустойчиво) при $\nu_0 - \bar{\nu}_{N+1} > 0$ ($\nu_0 - \bar{\nu}_{N+1} < 0$).

Покажем теперь, что каждое состояние равновесия $O \in K$, $O \neq O_N$, при условии (40) экспоненциально неустойчиво. Из структуры правых частей системы (36) вытекает, что любое такое состояние равновесия имеет лишь конечное число ненулевых координат $\rho_{n_j} = \eta_j > 0$, $j = 1, \dots, k$, где $n_1 < \dots < n_k$ – некоторый фиксированный набор натуральных чисел, причем

$$\eta_j = 1 - 2S - \nu_0 \pi^2 n_j^2, \quad j = 1, \dots, k, \quad S = \frac{1}{2k + 1} \left(k - \nu_0 \pi^2 \sum_{m=1}^k n_m^2 \right), \quad (46)$$

а требование $\min_j \eta_j > 0$ эквивалентно выполнению неравенств

$$0 \leq \nu_0 < \nu_* = \left(\pi^2 (2k + 1) \left(n_k^2 - \frac{2}{2k + 1} \sum_{m=1}^k n_m^2 \right) \right)^{-1}. \quad (47)$$

В случае, когда $O = O_n$ при некотором $n \neq N$, факт неустойчивости состояния равновесия O вытекает из проведенного выше анализа. Если же $O \neq O_n$ для любого n , то обязательно найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $m < n_k$, $m \neq n_j$, $j = 1, \dots, k$. Линеаризуем исходную систему (36) на этом состоянии равновесия и из получившейся системы в вариациях возьмем только одно уравнение для компоненты h_m с указанным выше номером m . Нетрудно заметить, что данное уравнение имеет вид

$$\dot{h}_m = (1 - 2S - \nu_0 \pi^2 m^2) h_m, \quad (48)$$

а из формул (46), условия (47) и неравенства $m < n_k$ вытекает строгая положительность фигурирующей в (48) величины $1 - 2S - \nu_0 \pi^2 m^2$. Теорема 3 доказана.

В дополнение к установленной теореме отметим, что при $\nu_0 = \bar{\nu}_N$ состояние равновесия O_N “влипает” в аналогичную неподвижную точку O_{N-1} , так как в этом случае обращается в нуль компонента ρ_N из (41), а все остальные координаты ρ_n , $n = 1, \dots, N - 1$, остаются положительными и совпадают с координатами точки O_{N-1} . Таким образом, при $\nu_0 \rightarrow 0$ в системе (36) наблюдается цепочка бифуркаций вида $O_1 \rightarrow \dots \rightarrow O_N \rightarrow O_{N+1} \rightarrow \dots$, которой в исходной задаче (28) при согласованном стремлении параметров ε и ν_0 к нулю отвечает аналогичная цепочка бифуркаций устойчивых инвариантных торов. Точнее говоря, в силу теорем 2, 3 при фиксированном ν_0 , удовлетворяющем неравенствам (40), и при подходящем уменьшении ε краевая задача (28) имеет устойчивый инвариантный тор любой наперед заданной конечной размерности. А это, собственно, и означает, что при $\varepsilon, \nu_0 \rightarrow 0$ в ней реализуется сценарий развития турбулентности по Ландау.

Одна из интересных особенностей краевой задачи (28) состоит в том, что при $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu_0 = 0$ удается доказать наличие у нее так называемого турбулентного аттрактора. Причина, позволяющая это сделать, заключается в существовании при $\nu_0 = 0$ корректной замены переменных, приводящей исходную задачу (28) к системе вида

$$\dot{\xi} = \Lambda_0 \xi + \varepsilon \Lambda_1(\xi) + \varepsilon^2 \Lambda_*(\xi, \varepsilon) \quad (49)$$

в пространстве последовательностей Z_0 . Здесь $\xi = (\xi_1, \bar{\xi}_1, \dots, \xi_n, \bar{\xi}_n, \dots) \in Z_0$,

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \text{diag}\{i\omega_1, -i\omega_1, \dots, i\omega_n, -i\omega_n, \dots\}, \\ \Lambda_1(\xi) &= (\Lambda_{1,1}(\xi), \bar{\Lambda}_{1,1}(\xi), \dots, \Lambda_{n,1}(\xi), \bar{\Lambda}_{n,1}(\xi), \dots), \\ \Lambda_{n,1}(\xi) &= \frac{1}{2} \left[1 - 3|\xi_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k \geq 1, \\ k \neq n}} |\xi_k|^2 \right] \xi_n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (50)$$

а оператор $\Lambda_*(\xi, \varepsilon)$ обладает следующим свойством: для любого $m \in \mathbb{N}$ и произвольного ограниченного подмножества $B \subset Z_0$ найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m, B) > 0$, что при каждом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ этот оператор действует из B в Z_0 и все его производные Фреше $\partial_{\xi}^k \Lambda_*(\xi, \varepsilon)$, $k = 0, \dots, m$, непрерывны и ограничены по совокупности переменных $(\xi, \varepsilon) \in B \times [0, \varepsilon_0]$.

Действительно, предположим, что нужная замена переменных уже построена и задача (28) преобразована к виду (49), (50). Рассмотрим отвечающую (49) укороченную систему

$$\dot{\xi}_n = i\omega_n \xi_n + \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - 3|\xi_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k \geq 1, \\ k \neq n}} |\xi_k|^2 \right] \xi_n, \quad n \geq 1, \quad (51)$$

и выполним в ней последовательно замены $\xi_n e^{-i\omega_n \tau} \rightarrow \xi_n$, $n \geq 1$, $\tau = \varepsilon t$. В результате для $\rho_n = |\xi_n|^2$ получим в точности систему (36) при $\nu_0 = 0$, порождающую в инвариантном конусе $K \subset l$ полупоток $g^{\tau}(\rho)$, $\tau \geq 0$, $\rho \in K$. Далее заметим, что в силу очевидного неравенства $dS(\tau)/d\tau \leq -1$ при $S(\tau) \geq 1$, где $S(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(\tau)$, множество $\mathcal{U} = K \cap \{\rho \in l: \|\rho\| \leq 1\}$ является для данного полупотока инвариантным и поглощающим. Тем самым в K существует глобальный аттрактор

$$\tilde{\Omega}_0 = \bigcap_{\tau \geq 0} g^{\tau}(\mathcal{U}). \quad (52)$$

Из проделанного при обосновании теоремы 3 анализа следует, что $\tilde{\Omega}_0$ содержит счетное число неустойчивых состояний равновесия вида

$$\begin{aligned} \rho_{n_j} &= \frac{1}{2k+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k; \\ \rho_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{n_j\}, \end{aligned} \quad (53)$$

где $n_1 < \dots < n_k$ – произвольный конечный набор натуральных чисел. Кроме того, неустойчивое многообразие любого из состояний равновесия (53) является бесконечномерным и также принадлежит множеству (52). А это означает, что $\tilde{\Omega}_0$ заведомо

некомпактно и имеет бесконечную хаусдорфову размерность. Аттрактор с такими свойствами в дальнейшем будем называть турбулентным.

Следует отметить, что аналогичный (52) турбулентный аттрактор Ω_0 существует и у системы (51): любой точке $\rho_0 = (\rho_1^0, \dots, \rho_n^0, \dots)$ из $\tilde{\Omega}_0$ отвечает совокупность векторов $\xi \in \Omega_0$ с компонентами $\xi_n = \sqrt{\rho_n^0} e^{i\varphi_n}$, $n \geq 1$, где вещественные параметры $\varphi_n \in [0, 2\pi]$ меняются независимо друг от друга. Добавим также, что состояниям равновесия (53) в укороченной системе (51) соответствуют неустойчивые инвариантные торы.

Возвращаясь к полной системе (49) и учитывая описанные выше свойства остатка $\Lambda_*(\xi, \varepsilon)$, нетрудно проверить, что для ее траекторий шар $B = \{\xi \in Z_0: \|\xi\| \leq 1\}$ оказывается инвариантным. Для этого достаточно взять функцию Ляпунова $V(\xi) = \|\xi\|^2$ и убедиться, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial \xi_n} \dot{\xi}_n + \frac{\partial V}{\partial \bar{\xi}_n} \dot{\bar{\xi}}_n = -\varepsilon - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^4 + O(\varepsilon^2)$$

равномерно по ξ : $\|\xi\| = 1$. Отсюда, очевидно, следует, что в шаре B система (49) имеет асимптотически близкий к Ω_0 турбулентный аттрактор $\Omega(\varepsilon)$. Более того, из свойств ограниченности и гладкости остатка $\Lambda_*(\xi, \varepsilon)$ вытекает существование для любого натурального k такого $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ аттрактор $\Omega(\varepsilon)$ содержит счетное число неустойчивых инвариантных торов, отвечающих состояниям равновесия (53) при фиксированном k и при произвольном выборе номеров $n_1 < \dots < n_k$.

Итак, проблема существования турбулентного аттрактора свелась к отысканию упомянутой выше замены переменных. При построении этой замены удобнее работать не с самой краевой задачей (28), а с аналогичным (7) абстрактным уравнением в пространстве E (см. (6)). При $\nu_0 = 0$ данное уравнение имеет вид

$$\dot{w} = A_0 w + \varepsilon A_1 w + \varepsilon F(w, \varepsilon), \quad (54)$$

где

$$A_0 = \mathcal{V}_0 \mathcal{D}, \quad A_1 = \text{diag}\{0, 1\}, \quad F = \left(0, -\varepsilon b(\mathcal{D}^{-1} w_1)^5 - w_2 \int_0^1 w_2^2 dx \right)^T.$$

Для уравнения (54) интересующая нас замена переменных задается равенством

$$w = \Theta_0 \xi + \varepsilon \Theta_1(\xi), \quad \xi \in Z_0, \quad (55)$$

где линейный оператор Θ_0 и нелинейный оператор Θ_1 действуют из Z_0 в E по правилам

$$\begin{aligned} \Theta_0 \xi &= \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n + \bar{\xi}_n, i\xi_n - i\bar{\xi}_n)^T e_n(x), \\ \Theta_1(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_{n,1}(\xi), \theta_{n,2}(\xi))^T e_n(x), \end{aligned} \quad (56)$$

а коэффициенты $\theta_{n,1}$, $\theta_{n,2}$ определяются следующим образом. Обратимся к равенствам (35) для $u_{n,1}(t, \tau)$, $n \geq 1$, и будем считать, что вместо $\xi_n(\tau)$, $\xi_k(\tau)$, $k \neq n$, в них

подставлены координаты $\xi_n, \xi_k, k \neq n$, произвольного не зависящего от τ вектора $\xi \in Z_0$. В результате получаются формальные тригонометрические ряды, которые мы обозначим через $u_{n,1}(t, \xi)$, $n \geq 1$, подчеркивая их зависимость от ξ . Используя эти ряды, положим

$$\theta_{n,1}(\xi) = \omega_n u_{n,1}(0, \xi), \quad \theta_{n,2}(\xi) = \frac{\partial u_{n,1}}{\partial t}(0, \xi), \quad n \geq 1. \quad (57)$$

Корректность приведенной замены вполне очевидна. В самом деле, в силу первого равенства в (56) линейный оператор Θ_0 ограничен вместе со своим обратным, а из формул (35), (56), (57) вытекает, что нелинейность $\Theta_1(\xi)$ представляет собой ограниченную кубическую форму. Остается отметить, что, как показывает непосредственная проверка, замена (55) действительно преобразует уравнение (54) к требуемому виду (49).

4. НЕЛОКАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

В данном разделе мы приведем результаты численного анализа аттракторов краевой задачи (2) при $\nu \rightarrow 0$ в случае, когда все остальные параметры имеют порядок единицы. Точнее говоря, всюду ниже мы считаем, что эти параметры фиксированы, в частности,

$$\varepsilon = b = 10, \quad a^2 = 0.1. \quad (58)$$

Для описания соответствующего численного эксперимента сначала, полагая $u_t = v$, перейдем от уравнения второго порядка из (2) к системе

$$\begin{aligned} u_t &= v, & v_t &= \varepsilon v + \nu v_{xx} - v \int_0^1 v^2 dx + a^2 u_{xx} - u - b u^5, \\ u|_{x=0} &= u|_{x=1} = v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Заменим в этой системе частные производные по x и интегральное слагаемое приближенными равенствами

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x)|_{x=k/(N+1)} &\approx (N+1)^2(u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)), \\ v_{xx}(t, x)|_{x=k/(N+1)} &\approx (N+1)^2(v_{k+1}(t) - 2v_k(t) + v_{k-1}(t)), \\ \int_0^1 v^2(t, x)dx &\approx \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N v_k^2(t), \end{aligned}$$

где N — произвольно фиксированное натуральное число, $u_k(t) = u(t, x)|_{x=k/(N+1)}$, $v_k(t) = v(t, x)|_{x=k/(N+1)}$, $k = 1, \dots, N$. В результате для переменных u_k, v_k приходим к конечномерной модели

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= v_k, \\ \dot{v}_k &= \varepsilon v_k + \nu(N+1)^2(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) - \frac{v_k}{N+1} \sum_{m=1}^N v_m^2 + \\ &\quad + a^2(N+1)^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) - u_k - b u_k^5, \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (60)$$

где $u_0 = v_0 = u_{N+1} = v_{N+1} = 0$.

Компьютерный анализ модели (60) проводился при условиях (58) в диапазоне параметров $5 \leq N \leq 30$, $0 \leq \nu \leq 1.01$ с помощью пакета программ tracer 3.70, разработанного Д. С. Глызиным. Использовался метод Дорманда–Принса 8(5,3) с автоматическим выбором шага, величина которого во всех случаях не превосходила 0.001. Подчеркнем, что указанный метод, впервые приведенный в статье [13], в настоящее время является одним из стандартных методов численного решения дифференциальных уравнений и реализован, например, в таких пакетах, как MatLab, Dynamics Solver.

Обратимся к вопросу о поведении различных характеристик аттрактора Ω_N системы (60) при фиксированном $\nu \geq 0$ и при увеличении N . Оказывается, что в случае $\nu = 0$ ляпуновская размерность d_L этого аттрактора при $N \rightarrow \infty$ неограниченно растет, а его старший ляпуновский показатель $\lambda_{\max}$, наоборот, убывает и при $N \geq 25$ становится равным нулю. Графики зависимости указанных величин от N представлены на рис. 1 и 2. Добавим также, что на промежутке $5 \leq N \leq 23$ для d_L справедлива приближенная формула $d_L \approx 1.028 + 1.509N$ (в этом случае аттрактор Ω_N оказывается хаотическим). В случае $N \geq 25$ множество Ω_N представляет собой $(2N - 3)$ -мерный инвариантный тор, движения на котором близки к квазипериодическим.

Рис. 1

Рис. 2

При малых $\nu > 0$ введенные выше величины d_L и $\lambda_{\max}$ с ростом N ведут себя несколько иначе: при $N \rightarrow \infty$ они стремятся к конечным положительным пределам. Об этом свидетельствуют рис. 3–5, где изображены графики зависимости $\lambda_{\max}$ от N для $\nu = 0.001$, 0.002 и 0.003 соответственно, а также рис. 6, на котором показана зависимость от N размерности d_L в случае $\nu = 0.002$.

Следует отметить, что при малых $\nu > 0$ с ростом N стабилизируется также сигнатура Σ_N аттрактора Ω_N , равная количеству его ненулевых положительных ляпуновских показателей. Например, при $\nu = 0.002$ и при всех $N \geq 12$ выполняется равенство $\Sigma_N = 3$.

Приведенные результаты численного расчета в совокупности с содержащимся в разделе 3 теоретическим анализом позволяют сделать следующие общие выводы о динамике по ν исходной распределенной модели (2).

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

1. При $\nu = 0$ и при значениях параметров (58) у краевой задачи (2) существует турбулентный аттрактор Ω_{turb} , который, по всей видимости, является продолжением по ε аттрактора $\Omega(\varepsilon)$, обнаруженного в задаче (28) при $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu_0 = 0$. Как и $\Omega(\varepsilon)$, данный аттрактор представляет собой ограниченное и некомпактное множество в фазовом пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$, имеющее бесконечную хаусдорфову размерность. Кроме того, что оказалось весьма неожиданным, для “типичных” траекторий из Ω_{turb} справедливо равенство $\lambda_{\text{max}} = 0$. Таким образом, турбулентный аттрактор в предложенной нами модели можно отнести к так называемым странным нехаотическим аттракторам (см. [14]) или рассматривать как некий вариант “бесконечномерного тора”.

2. Аттрактор Ω_{turb} является пределом при $\nu \rightarrow 0$ конечномерных хаотических аттракторов, ляпуновская размерность которых неограниченно растет. Последнее как раз означает, что при значениях параметров (58) и при уменьшении вязкости ν в краевой задаче (2) наблюдается интересующий нас сценарий развития турбулентности Ландау–Селла.

Дополнительным аргументом в пользу реализуемости упомянутого сценария служит визуальная информация, представленная на рис. 7, 8. На этих рисунках по-

Рис. 7

Рис. 8

казаны графики зависимости от ν величин d_L и $\lambda_{\max}$ аттрактора Ω_N системы (60) при $N = 30$, построенные на отрезке $0.005 \leq \nu \leq 0.01$ по точкам с шагом 0.0001. Подчеркнем, что дальнейшее увеличение N не имеет смысла, поскольку стабилизация характеристик d_L и $\lambda_{\max}$ происходит уже в случае $N = 30$ (см. рис. 3–5). Следовательно, есть все основания ожидать, что аналогичный вид имеют графики указанных характеристик и для аттракторов краевой задачи (2).

В заключение скажем несколько слов о бифуркациях, происходящих на начальных стадиях сценария Ландау–Селла. Анализ конечномерных моделей (60) позволяет сделать вывод, что в исходной распределенной модели (2) при значениях параметров (58) и при уменьшении ν наблюдаются следующие перестройки. При $\nu > 10/\pi^2$ устойчиво ее нулевое решение, а при прохождении ν через критическое значение $10/\pi^2$ из нуля рождается устойчивый цикл C (бифуркация Андронова–Хопфа). Далее этот цикл сохраняет устойчивость при $\nu_* \lesssim \nu < 10/\pi^2$, где $\nu_* \approx 0.03272$, а при последующем уменьшении ν отдает ее бифурцирующему из него двумерному тору T . Указанный тор, в свою очередь, существует и устойчив на промежутке $\nu_{**} \lesssim \nu \lesssim \nu_*$, где $\nu_{**} \approx 0.00812$, причем динамика на нем в некоторых случаях является периодической (например, она оказывается таковой при $\nu \in [0.00941, 0.00967]$). Что касается хаотического аттрактора, то он впервые возникает в краевой задаче (2) при $\nu \approx \nu_{**}$ в результате разрушения тора T . Добавим, что наступлению стабильного хаоса, имеющего место при малых $\nu > 0$, предшествует некоторое количество промежутков изменения ν , в которых существуют устойчивые циклы. Наиболее крупные “окна периодичности” соответствуют значениям ν из интервалов $[0.00476, 0.00483]$, $[0.0062, 0.00648]$, $[0.00655, 0.00686]$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-01004) и Целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект РНП.2.1.1.630).

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, *Докл. АН СССР*, **44**:8 (1944), 339–342.
- [2] Е. Норф, *Comm. Pure Appl. Math.*, **1**:4 (1948), 303–322.

- [3] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.*, **20**:2 (1963), 130–141.
- [4] D. Ruelle, F. Takens, *Comm. Math. Phys.*, **20**:3 (1971), 167–192.
- [5] S. E. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens, *Comm. Math. Phys.*, **64**:1 (1978), 35–40.
- [6] П. Берже, И. Помо, К. Видаль, *Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности*, Меркурий-ПРЕСС, Череповец, 2000.
- [7] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, **19**:1 (1978), 25–52.
- [8] Г. В. Осипов, *Изв. вузов. Сер. радиофиз.*, **31**:5 (1988), 624–627.
- [9] G. R. Sell, “Resonance and bifurcations in Hopf–Landau dynamical systems”, *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, Interaction Mech. Math. Ser., eds. G.I. Barenblatt, G. Ioss, D.D. Joseph, Pitman, Boston, MA, 1983, 305–313.
- [10] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.
- [11] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004.
- [12] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974.
- [13] J. R. Dormand, P. J. Prince, *J. Comput. Appl. Math.*, **6**:1 (1980), 19–26.
- [14] В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, А. Б. Нейман, Г. И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер, *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*, Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2003.

Поступила в редакцию 14.03.2008