Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, Когомо-
логии Хохшильда и деформации поточечного суперпро-
изведения, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 3, 323–346

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:24:09

© 2009 г. С. Е. Конштейн*, А. Г. Смирнов*, И. В. Тютин*[†]

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА И ДЕФОРМАЦИИ ПОТОЧЕЧНОГО СУПЕРПРОИЗВЕДЕНИЯ

Рассмотрена ассоциативная супералгебра гладких грассманозначных функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Найдены низшие когомологии Хохшильда, а также при некоторых дополнительных условиях деформации этой супералгебры.

Ключевые слова: деформационное квантование, квантовая механика, супералгебра, когомология Хохшильда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Надежда построить квантовую механику на нетривиальных многообразиях связана с геометрическим, или деформационным, квантованием [1]–[4]. Функции на фазовом пространстве ассоциируются с операторами, а произведение и коммутатор операторов описываются ассоциативным $*$ -произведением и $*$ -коммутатором функций, которые являются деформациями обычного произведения и обычной скобки Пуассона.

Калибровочные теории на некоммутативных пространствах (так называемые некоммутативные калибровочные теории) формулируются в терминах $*$ -произведения (см. [5], [6] и содержащиеся там ссылки). Структура и свойства $*$ -произведения на обычных (четных) многообразиях изучены детально (см. [2]–[4]). В то же время $*$ -произведение на супермногообразиях исследовано еще недостаточно.

Легко формально обобщить некоммутативное произведение, предложенное в работе [7], на суперслучай [8], однако при этом возникают проблемы с единственностью $*$ -произведения (единственностью деформации поточечного произведения). В работе [9] найден общий вид ассоциативного $*$ -произведения на грассмановой алгебре с конечным числом образующих и доказана его единственность с точностью до подходящего преобразования эквивалентности. Интересно решить аналогичную задачу для функций от четных и нечетных переменных.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: konstein@lpi.ru, smirnov@lpi.ru, tyutin@lpi.ru

[†]IF University of Sao Paulo, Sao Paulo, Brazil

Каждое $*$ -произведение порождает $*$ -коммутатор, но обратное неверно (см. обсуждение в [10]). Например, как следует из результатов настоящей работы, найденная в работе [11] деформация суперскобки Пуассона, отличная от суперскобки Мойяла, не порождена $*$ -произведением.

Задача о нахождении $*$ -произведения связана с задачей о вычислении когомологий Хохшильда. В случае коцепей, задаваемых полидифференциальными операторами, когомологии Хохшильда алгебры гладких функций на гладком многообразии давно известны (см., например, [12]): p -я группа когомологий совпадает с пространством антисимметричных p -векторных полей. Кроме того, известно [13], что в случае гладких функций на $\mathbb{R}^n$ когомологии Хохшильда не изменяются при переходе от дифференциальных коцепей к непрерывным коцепям (см. также [14], где приведено прямое вычисление когомологий для непрерывного случая).

В настоящей работе исследуются когомологии и деформации ассоциативной супералгебры гладких функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$, принимающих значения в алгебре Грассмана, причем мы ограничиваемся случаем, когда параметры деформаций являются четными элементами алгебры Грассмана. В разделах 3–5 найдены низшие (до второй) когомологии Хохшильда данной супералгебры в предположении непрерывности коцепей по каждому аргументу. При этом мы всюду ограничиваемся случаем четных коцепей, поскольку только четные коциклы играют роль при построении $*$ -произведений с четными параметрами деформации. В разделе 6 получен общий вид формальной деформации рассматриваемой супералгебры (теорема 3).

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть поле $\mathbb{K}$ – это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ пространство гладких $\mathbb{K}$ -значных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. Это пространство снабжено своей стандартной топологией: по определению последовательность $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, если носители всех φ_k содержатся в некотором компакте и последовательность $\partial^\lambda \varphi_k$ сходится равномерно к $\partial^\lambda \varphi$ для любого мультииндекса λ . Положим

$$\mathbf{D}_{n_+}^{n_-} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-}, \quad \mathbf{D}_{n_+}'^{n_-} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-},$$

где $\mathbb{G}^{n_-}$ – алгебра Грассмана с n_- образующими, а $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_+})$ – пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_+})$. Образующие алгебры Грассмана и координаты пространства $\mathbb{R}^{n_+}$ обозначаются через ξ^α , $\alpha = 1, \dots, n_-$, и x^i , $i = 1, \dots, n_+$, соответственно. Мы будем также использовать коллективные переменные z^A , которые равны x^A при $A = 1, \dots, n_+$ и равны ξ^{A-n_+} при $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$. Пространства $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ имеют естественную градуировку, определенную градуировкой алгебры Грассмана. Четность элемента f этого пространства обозначается через $\varepsilon(f)$. Положим также $\varepsilon_A = 0$ для $A = 1, \dots, n_+$ и $\varepsilon_A = 1$ для $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$.

Интеграл на пространстве $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ определен соотношением

$$\int dz f(z) = \int_{\mathbb{R}^{n_+}} dx \int d\xi f(z),$$

где интеграл по алгебре Грассмана нормирован условием $\int d\xi \xi^1 \dots \xi^{n-} = 1$. Отождествим алгебру $\mathbb{G}^{n-}$ с ее дуальным пространством $\mathbb{G}'^{n-}$, полагая $f(g) = \int d\xi f(\xi)g(\xi)$, $f, g \in \mathbb{G}^{n-}$. Соответственно пространство $\mathbf{D}_{n+}^{m-}$ непрерывных линейных функционалов на $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$ отождествляется с пространством $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+}) \otimes \mathbb{G}^{n-}$. Как правило, значение $m(f)$ функционала $m \in \mathbf{D}_{n+}^{m-}$ на функциях $f \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ будет записываться в интегральной форме: $m(f) = \int dz m(z)f(z)$.

Назовем форму Φ *суперантисимметричной*, если

$$\Phi(f, g) = -(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}\Phi(g, f).$$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A} = \sum_{\oplus} \mathcal{A}_k$, где $\mathcal{A}_k$ – векторное пространство четных k -линейных раздельно непрерывных форм $\Phi_k \in \mathcal{A}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, принимающих значения в $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$, $\varepsilon(\Phi_k(z \mid f_1, \dots, f_k)) = \sum_{i=1}^k \varepsilon(f_i)$, $\mathcal{A}_0 \subset \mathbf{D}_{n+}^{n-}$, $\Phi_0(z) = \phi(z) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$, $\varepsilon_{\Phi_0} = \varepsilon(\phi) = 0$, с (некоммутативным) ассоциативным произведением

$$(\Phi_k \diamond \Psi_p)(z \mid f_1, \dots, f_{k+p}) = \Phi_k(z \mid f_1, \dots, f_k) \Psi_p(z \mid f_{k+1}, \dots, f_{k+p}).$$

Эта алгебра имеет естественную градуировку g : $g(\Phi_k) = k$, $g(\mathcal{A}_k) = k$ и дифференциал Хохшильда d : $\mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_{k+1}$, $g(d) = 1$, который действует по правилу

$$\begin{aligned} d_k \Phi_k(z \mid f_1, \dots, f_{k+1}) &= f_1(z) \Phi_k(z \mid f_2, \dots, f_{k+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^k (-1)^i \Phi_k(z \mid f_1, \dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, f_{k+1}) + \\ &+ (-1)^{k+1} \Phi_k(z \mid f_1, \dots, f_k) f_{k+1}(z). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $d_k \stackrel{\text{def}}{=} d|_{\mathcal{A}_k}$. Дифференциал d имеет следующие очевидные свойства:

$$\begin{aligned} d_0 \Phi_0(z \mid f) &= f(z) \phi(z) - \phi(z) f(z) = 0, \\ d_{k+p}(\Phi_k \Psi_p) &= (d_k \Phi_k) \Psi_p + (-1)^{g(\Phi_k)} \Phi_k d_p \Psi_p, \\ d_{k+1} d_k &= 0, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее мы будем использовать следующие обозначения для многоиндексных объектов:

$$\begin{aligned} (\partial_A)^k &= \partial_{A_k} \cdots \partial_{A_1}, & (p_A)^k &= p_{A_k} \cdots p_{A_1}, \\ (\overleftarrow{\partial}_A)^k &= \overleftarrow{\partial}_{A_1} \cdots \overleftarrow{\partial}_{A_k}, & (\overleftarrow{p}_A)^k &= p_{A_1} \cdots p_{A_k}, \\ m^{(A)_k} &= m^{A_1 \cdots A_k}, & m^{\cdots A_i A_{i+1} \cdots} &= (-1)^{\varepsilon_{A_i} \varepsilon_{A_{i+1}}} m^{\cdots A_{i+1} A_i \cdots}. \end{aligned}$$

3. КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА H^0

Когомологическое уравнение

$$d_0 \Phi_0(z \mid f) = 0$$

удовлетворяется тождественно для произвольной формы $\Phi_0(z)$, так что мы имеем $H^0 = \mathcal{A}_0$.

4. КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА H^1

В этом случае когомологическое уравнение имеет вид

$$f(z)\Phi_1(z | g) - \Phi_1(z | fg) + \Phi_1(z | f)g(z) = 0. \quad (4.1)$$

Пусть¹⁾

$$[z \cup \text{supp}(g)] \cap \text{supp}(f) = \emptyset. \quad (4.2)$$

Из уравнения (4.1) имеем

$$\widehat{\Phi}_1(z | f) = 0,$$

откуда следует²⁾

$$\Phi_1(z | f) = \sum_{q=0}^Q m(z)^{(A)_q} (\partial_A)^q f(z),$$

где $\widehat{\Phi}_1(z | f)$ обозначает ограничение линейной формы $\Phi_1(z | f)$ на область (4.2) или, эквивалентно, на область $z \cap \text{supp}(f) = \emptyset$. Здесь и ниже Q локально постоянна.

Так же, как и в работах [15], [16], положим $f(z) = e^{zp}$, $g(z) = e^{zk}$ в некоторой окрестности точки x . Из уравнения (4.1) имеем

$$F(z | k) - F(z | p + k) + F(z | p) = 0, \quad (4.3)$$

где

$$F(z | p) = \sum_{q=0}^Q m(z)^{(A)_q} (p_A)^q,$$

а уравнение (4.3) дает $F(z | p) = m(z)^A p_A$.

Таким образом, общее решение уравнения (4.1) имеет вид

$$\Phi_1(z | f) = m(z)^A \partial_A f(z). \quad (4.4)$$

Очевидно, что различные $m(z)^A$ определяют независимые коциклы (4.4).

5. КОГОМОЛОГИЯ ХОХШИЛЬДА H^2

В этом разделе найдена вторая когомология Хохшильда для рассматриваемой супералгебры.

Решение когомологического уравнения

$$f(z)\Phi_2(z | g, h) - \Phi_2(z | fg, h) + \Phi_2(z | f, gh) - \Phi_2(z | f, g)h(z) = 0 \quad (5.1)$$

определяется ниже формулой (5.21).

Пусть $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{A}_k$ обозначает пространство локальных форм. Форма $\Phi_k \in \mathcal{A}_k$ называется *локальной*, если из условия $z \cap \text{supp}(f_i) = \emptyset$ при каком-либо $1 \leq i \leq k$ следует $\Phi_k(z | f_1, \dots, f_k) = 0$.

¹⁾ Пусть $z = (x, \xi)$. Здесь и далее мы используем обозначения $z \cup U$ ($z \cap U$) вместо $V_z \cup U$ ($V_z \cap U$), где V_z — некоторая окрестность точки x .

²⁾ Подробнее см. в работе [15].

5.1. Нелокальная часть коцикла. Пусть

$$[z \cup \text{supp}(h)] \cap \text{supp}(f) = [z \cup \text{supp}(h)] \cap \text{supp}(g) = \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset. \quad (5.2)$$

Из уравнения (5.1) мы получаем

$$\widehat{\Phi}_2(z \mid f, g) = 0,$$

что влечет

$$\begin{aligned} \Phi_2(z \mid f, g) = \sum_{q=0}^Q \{ & m_1^{(A)q}(z \mid f)(\partial_A)^q g(z) + \\ & + [(\partial_A)^q f(z)]m_2^{(A)q}(z \mid g) + m_3^{(A)q}(z \mid f(\partial_A)^q g)\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\widehat{\Phi}_2(z \mid f, g)$ обозначает недиагональную часть формы $\Phi_2(z \mid f, g)$, т.е. ограничение формы Φ на область (5.2).

Заметим, что все формы $m_a^{(A)q}$, в частности форма $m_1^{(A)0}$, являются глобально определенными обобщенными функциями.

Рассмотрим область

$$[z \cup \text{supp}(f) \cup \text{supp}(h)] \cap \text{supp}(g) = \emptyset. \quad (5.4)$$

Из уравнения (5.1) мы получаем следующее уравнение для ограничения формы Φ на область (5.4):

$$f(z)\widehat{\Phi}_2(z \mid g, h) - \widehat{\Phi}_2(z \mid f, g)h(z) = 0. \quad (5.5)$$

Подставляя представление (5.3) в уравнение (5.5), находим

$$\sum_{q=0}^Q \{ f(z)\widehat{m}_1^{(A)q}(z \mid g)(\partial_A)^q h(z) - [(\partial_A)^q f(z)]\widehat{m}_2^{(A)q}(z \mid g)h(z) \} = 0,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} m_1^{(A)q}(z \mid g) &\in \mathcal{L}_1, \quad m_2^{(A)q}(z \mid g) \in \mathcal{L}_1, \quad q \geq 1, \\ m_2^{(A)0}(z \mid g) - m_1^{(A)0}(z \mid g) &\in \mathcal{L}_1. \end{aligned}$$

Таким образом, форма $\Phi_2(z \mid f, g)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2(z \mid f, g) = & \left[\sum_{q=0}^Q m_3^{(A)q}(z \mid f(\partial_A)^q g) + m_1^{(A)0}(z \mid fg) \right] + \\ & + [f(z)m_1^{(A)0}(z \mid g) - m_1^{(A)0}(z \mid fg) + \\ & + m_1^{(A)0}(z \mid f)g(z)] + \Phi_{\text{loc}}(z \mid f, g), \quad \Phi_{\text{loc}}(z \mid f, g) \in \mathcal{L}_2, \end{aligned}$$

или, после переопределения $m_3^{(A)0}(z \mid f)$,

$$\Phi_2(z \mid f, g) = \Phi_{2|3}(z \mid f, g) + d_1\Phi_{1|1}(z \mid f, g) + \Phi_{\text{loc}}(z \mid f, g), \quad (5.6)$$

где

$$\Phi_{1|1}(z | f) = m_1^{(A)_0}(z | f), \quad \varepsilon_{\Phi_{1|1}} = 0, \quad (5.7)$$

$$\Phi_{2|3}(z | f, g) = \sum_{q=0}^Q m_3^{(A)_q}(z | f(\partial_A)^q g). \quad (5.8)$$

Для того чтобы определить $\Phi_{2|3}$, рассмотрим область

$$z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \emptyset. \quad (5.9)$$

Согласно представлению (5.6) из уравнения (5.1) получаем

$$\widehat{\Phi}_{2|3}(z | fg, h) - \widehat{\Phi}_{2|3}(z | f, gh) = 0. \quad (5.10)$$

Подставляя представление (5.8) в уравнение (5.10), находим

$$\sum_{q=0}^Q \widehat{m}_3^{(A)_q}(z | \{fg(\partial_A)^q h - f(\partial_A)^q(gh)\}) = 0.$$

Выбирая $g(z) = e^{-zp}$, $h(z) = e^{zp}$ на $\text{supp}(f)$, получаем равенство

$$\widehat{F}(z | f; p) - \widehat{F}(z | f; 0) = 0, \quad F(z | f; p) = \sum_{q=0}^Q \widehat{m}_3^{(A)_q}(z | f)(p_A)^q,$$

и затем

$$\widehat{m}_3^{(A)_q}(z | f) = 0 \Rightarrow m_3^{(A)_q}(z | f) \in \mathcal{L}_1, \quad q \geq 1.$$

Таким образом, форма $\Phi_2(z | f, g)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2(z | f, g) &= m(z | fg) + d_1 \Phi_{1|1}(z | f, g) + \Phi_{\text{loc}}(z | f, g), \\ m(z | f) &= m_3^{(A)_0}(z | f). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Рассмотрим, наконец, область

$$[z \cup \text{supp}(h)] \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] = \emptyset. \quad (5.12)$$

Используя представление (5.11), из уравнения (5.1) находим

$$m(z | fgh) + m(z | fg)h(z) = 0, \quad m(z | f) = 0.$$

Окончательно получаем

$$\Phi_2(z | f, g) = \Phi_{2|\text{loc}}(z | f, g) + d_1 \Phi_{1|1}(z | f, g), \quad (5.13)$$

где

$$\Phi_{2|\text{loc}}(z | f, g) = \sum_{k,l=0}^Q f(z)(\overleftarrow{\partial}_A)^k m^{(A)_k|(B)_l}(z)(\partial_B)^l g(z), \quad \varepsilon_{m^{(A)_k|(B)_l}} = \varepsilon_{A_1} + \dots + \varepsilon_{B_l},$$

а все коэффициенты $m^{(A)_k|(B)_l}(z)$ и форма $\Phi_{1|1}(z | f)$ определены глобально.

Таким образом, всякий коцикл когомологичен локальному коциклу, так как нелокальные части коциклов являются точными формами.

5.2. Локальные коциклы. Когомологическое уравнение (5.1) принимает следующий вид для локальных форм:

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=0}^Q & (f(z)[g(z)(\overleftarrow{\partial}_A)^k]m^{(A)_k|(B)_l}(z)(\partial_B)^l h(z) - \\ & - [f(z)g(x)](\overleftarrow{\partial}_A)^k m^{(A)_k|(B)_l}(z)(\partial_B)^l h(z) + \\ & + f(z)(\overleftarrow{\partial}_A)^k m^{(A)_k|(B)_l}(z)(\partial_B)^l [g(z)h(z)] - \\ & - f(z)(\overleftarrow{\partial}_A)^k m^{(A)_k|(B)_l}(z)[(\partial_B)^l g(z)]h(z)) = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Пусть $f(z) = e^{pz}$, $g(z) = e^{qz}$, $h(z) = e^{rz}$ в некоторой окрестности точки x . Тогда когомологическое уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} F(z | q, \tilde{r}) - F(z | p + q, \tilde{r}) + F(z | p, \tilde{q} + \tilde{r}) - F(z | p, \tilde{q}) &= 0, \\ F(z | p, q) &= \sum_{k,l=0}^Q (p_A)^k m^{(A)_k|(B)_l}(z)(q_B)^l, \quad \tilde{p}_A = (-1)^{\varepsilon_A} p_A. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Применяя оператор $\partial/\partial p_A|_{p=0}$ к уравнению (5.15), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_A} F(z | q, \tilde{r}) &= \Psi^A(z | q + r) - \Psi^A(z | q), \\ \Psi^A(z | q) &= \frac{\partial}{\partial p_A} F(z | p, \tilde{q}) \Big|_{p=0}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Из уравнения (5.16) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_A} \Psi^B(z | q + r) - (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \frac{\partial}{\partial q_B} \Psi^A(z | q + r) &= \\ = \frac{\partial}{\partial q_A} \Psi^B(z | q) - (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \frac{\partial}{\partial q_B} \Psi^A(z | q) \end{aligned} \quad (5.17)$$

и затем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_A} \Psi^B(z | r) - (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \frac{\partial}{\partial r_B} \Psi^A(z | r) &= -(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \omega^{AB}(z), \\ \omega^{AB}(z) &= \frac{\partial}{\partial q_B} \Psi^A(z | q) - (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \frac{\partial}{\partial q_A} \Psi^B(z | q) \Big|_{q=0} = -(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \omega^{BA}(z). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Общее решение уравнения (5.18) имеет вид

$$\Psi^A(z | r) = \frac{1}{2} \omega^{AB}(z) r_B + \frac{\partial}{\partial r_A} \phi(z | r). \quad (5.19)$$

Функция (5.19) также удовлетворяет уравнению (5.17). Подставляя выражение (5.19) в уравнение (5.16), получаем

$$\frac{\partial}{\partial q_A} \left(F(z | q, \tilde{r}) - \frac{1}{2} q_A \omega^{AB}(z) r_B - \phi(z | q + r) + \phi(z | q) \right) = 0$$

и, как следствие,

$$F(z | q, r) = \frac{1}{2} q_A \omega^{AB}(z) \tilde{r}_B + \phi(z | q + \tilde{r}) - \phi(z | q) + \varphi(z | \tilde{r}). \quad (5.20)$$

Подставляя теперь (5.20) в уравнение (5.15), находим, что функция (5.20) удовлетворяет уравнению (5.15), если функция $\varphi(z | r)$ имеет вид $\varphi(z | r) = -\phi(z | r) - \varphi_1(z)$. Таким образом, получаем

$$F(z | p, q) = \frac{1}{2} p_A \omega^{AB}(z) \tilde{q}_B + \phi(z | p + \tilde{q}) - \phi(z | p) - \phi(z | \tilde{q}),$$

где было сделано переопределение $\phi(z | p) \rightarrow \phi(z | p) + \varphi_1(z)$, или

$$\begin{aligned} \Phi_{2|\text{loc}}(z | f, g) &= \frac{1}{2} f(z) \overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB}(z) \partial_B g(z) + d_1 \Phi_{1|2}(z | f, g), \\ \Phi_{1|2}(z | f) &= -f(z) \sum_{k=0}^K (\overleftarrow{\partial}_A)^k \phi^{(A)k}(z), \end{aligned}$$

где $\phi^{(A)k}(z)$ – коэффициенты полинома $\phi(z | p) = \sum_{k=0}^K (p_A)^k \phi^{(A)k}(z)$.

Окончательно, с учетом (5.13) мы находим, что общее решение когомологического уравнения (5.1) имеет вид

$$\Phi_2(z | f, g) = m_\omega(z | f, g) + d_1 \Phi_1(z | f, g), \quad (5.21)$$

где

$$\begin{aligned} m_\omega(z | f, g) &= \frac{1}{2} f(z) \overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB}(z) \partial_B g(z) = -(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} m_\omega(z | g, f), \\ \varepsilon(\omega^{AB}) &= \varepsilon_A + \varepsilon_B. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Когомологии с различными $\omega^{AB}(z)$ независимы. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} f(z) \overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB}(z) \partial_B g(z) &= d_1 \Psi_1(z | f, g) = \\ &= f(z) \Psi_1(z | g) - \Psi_1(z | fg) + \Psi_1(z | f) g(z). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Пусть

$$[z \cup \text{supp}(g)] \cap \text{supp}(f) = \emptyset.$$

Из уравнения (5.23) находим

$$\widehat{\Psi}_1(z | f) = 0,$$

т.е. форма $\Psi_1(z | f)$ является локальной:

$$\Psi_1(z | f) = f(z) \sum_{k=0}^K (\overleftarrow{\partial}_A)^k \psi^{(A)k}(z) \equiv f(z) \psi(\overleftarrow{\partial}_A | z).$$

Пусть $f(z) = e^{pz}$, $g(z) = e^{qz}$. Из уравнения (5.23) следует

$$p_A \omega^{AB}(z) (-1)^{\varepsilon_B} q_B = \psi(q | z) - \psi(p + q | z) + \psi(p | z).$$

Правая часть этого уравнения симметрична относительно перестановки $p \leftrightarrow q$, так что мы имеем

$$p_A \omega^{AB}(z)(-1)^{\varepsilon_B} q_B = q_B \omega^{BA}(z)(-1)^{\varepsilon_A} p_A = -p_A \omega^{AB}(z)(-1)^{\varepsilon_B} q_B,$$

откуда следует $\omega^{AB}(z) = 0$. Тем самым, уравнение (5.23) имеет решения только при $\omega^{AB}(z) = 0$.

5.3. Компактность и гладкость. Заметим, что слагаемые, стоящие в правой части выражения (5.21), обладают следующими свойствами суперсимметрии:

$$\begin{aligned} m_\omega(z \mid f, g) &= -(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} m_\omega(z \mid g, f), \\ \Phi_{d1}(z \mid f, g) &\equiv d_1 \Phi_1(z \mid f, g) = (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \Phi_{d1}(z \mid g, f). \end{aligned}$$

Таким образом, имеют место равенства

$$\begin{aligned} \Phi_2(z \mid f, g) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \Phi_2(z \mid g, f) &= 2m_\omega(z \mid f, g), \\ \Phi_2(z \mid f, g) + (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \Phi_2(z \mid g, f) &= 2\Phi_{d1}(z \mid f, g), \end{aligned}$$

откуда следует, что каждая из форм $m_\omega(z \mid f, g)$ и $\Phi_{d1}(z \mid f, g)$ должна иметь компактный носитель и быть гладкой по z при любых f и g из $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$.

Из гладкости формы $m_\omega(z \mid f, g)$ вытекает гладкость суперсимплектической метрики $\omega^{AB}(z)$ (достаточно рассмотреть, например, $f(z) = z^A$, $g(z) = z^B$ в некоторой окрестности точки x).

Рассмотрим условия компактности и гладкости формы

$$\Phi_{d1}(z \mid f, g) = f(z)\Phi_1(z \mid g) + \Phi_1(z \mid f)g(z) - \Phi_1(z \mid fg). \quad (5.24)$$

Поскольку первые два слагаемых в правой части выражения (5.24) имеют компактные носители, третье слагаемое (т.е. форма $\Phi_1(z \mid f)$) также должно иметь компактный носитель. Кроме того, из леммы 8, доказанной ниже в приложении А, следует, что форма $\Phi_1(z \mid f)$ является гладкой с точностью до слагаемого с нулевым дифференциалом для любой функции $f \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$. Таким образом, $\Phi_2(z \mid f, g)$ можно представить в виде (5.21), где форма $\Phi_1(z \mid f)$ при любых $f \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ имеет компактный носитель и является гладкой, а суперсимплектическая метрика $\omega^{AB}(z)$ гладкая.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. *Далее мы везде будем предполагать, что форма $\omega^{AB}(z)$ невырождена при всех z .*

6. ДЕФОРМАЦИИ ПОТОЧЕЧНОГО СУПЕРПРОИЗВЕДЕНИЯ

Рассмотрим четную ($\varepsilon_\Pi = 0$) деформацию поточечного произведения $(f * g)(z) \equiv \Pi(z \mid f, g; \hbar) = f(z)g(z) + O(\hbar)$ (звездочное произведение), рассматриваемого как формальный ряд по $\hbar$ и обладающего следующими свойствами:

1) звездочное произведение ассоциативно:

$$f * (g * h) = (f * g) * h,$$

или

$$\Pi(z \mid f, \Pi(|g, h; \hbar); \hbar) = \Pi(z \mid \Pi(|f, g; \hbar), h; \hbar); \quad (6.1)$$

2) кроме того,

$$\Pi(z \mid f, g; \hbar) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-} \quad \text{для всех } f, g, \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}.$$

В нулевом порядке по $\hbar$ уравнение ассоциативности очевидно удовлетворяется.

Преобразование $T: f(z) \rightarrow Tf = T(z \mid f)$ вида $T = I + \hbar T_1 + \hbar^2 T_2 + \dots$ будем называть преобразованием подобия, а формы $\Pi(z \mid f, g; \hbar)$ и $\Pi_T(z \mid f, g; \hbar) = T^{-1}\Pi(z \mid Tf, Tg; \hbar)$ – подобными формами. Очевидно, что формы Π и Π_T одновременно удовлетворяют или одновременно не удовлетворяют уравнению ассоциативности.

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Пусть даны 2-форма Π и преобразование подобия $T = 1 + \hbar^k T_k + O(\hbar^{k+1})$. Тогда

$$\Pi_T = \Pi + \hbar^k d_1 T_{(k)} + O(\hbar^{k+1}).$$

6.1. Первый порядок. Для формы

$$\Pi(z \mid f, g; \hbar) = f(z)g(z) + \hbar \Pi_{(1)}(z \mid f, g) + O(\hbar^2), \quad \Pi_{(1)}(z \mid f, g) \in D,$$

уравнение ассоциативности (6.1) дает в первом порядке по $\hbar$

$$\begin{aligned} d_2 \Pi_{(1)}(z \mid f, g, h) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Pi_{(1)}(z \mid f, g) &= m_{\omega_1}(z \mid f, g) + d_1 M_{(1)}(z \mid f, g), \quad M_{(1)}(z \mid f) \in D. \end{aligned}$$

С помощью преобразования подобия $T = I - \hbar M_{(1)}(z \mid f) + O(\hbar^2)$ (индекс T мы далее будем опускать), форма Π может быть представлена в виде

$$\Pi(z \mid f, g; \hbar) = f(z)g(z) + \hbar m_{\omega_1}(z \mid f, g) + \hbar^2 \Pi_{(2)}(z \mid f, g) + O(\hbar^3), \quad \Pi_{(2)}(z \mid f, g) \in D.$$

6.2. Вспомогательные леммы. Введем ассоциатор $\text{Asc}(\Pi_1, \Pi_2)(z \mid f, g, h)$ двух 2-форм Π_1 и Π_2 :

$$\text{Asc}(\Pi_1, \Pi_2)(z \mid f, g, h) = \Pi_1(z \mid f, \Pi_2(|g, h; \hbar); \hbar) - \Pi_1(z \mid \Pi_2(|f, g; \hbar), h; \hbar) + (1 \leftrightarrow 2).$$

В терминах ассоциаторов уравнение ассоциативности (6.1) имеет вид

$$\frac{1}{2} \text{Asc}(\Pi, \Pi) = 0.$$

Утверждения следующих лемм проверяются непосредственными вычислениями.

ЛЕММА 2. Пусть $\Pi = fg + \hbar m_{\omega_1} + \hbar^2 \Pi_{(2)} + O(\hbar^3)$. Тогда

$$\frac{1}{2} \text{Asc}(\Pi, \Pi) = \hbar^2 d_2 \Pi_{(2)} + \frac{1}{2} \hbar^2 \text{Asc}(m_{\omega_1}, m_{\omega_1}) + O(\hbar^3).$$

ЛЕММА 3. Пусть $\Pi = W + \hbar^n \Pi_{(n)} + \hbar^{n+1} \Pi_{(n+1)} + O(\hbar^{n+2})$, где $W = fg + \hbar m_{\omega_1} + O(\hbar^2)$, удовлетворяет уравнению ассоциативности (6.1). Тогда

$$\frac{1}{2} \text{Asc}(\Pi, \Pi) = \hbar^n d_2 \Pi_{(n)} + \hbar^{n+1} d_2 \Pi_{(n+1)} + \hbar^{n+1} \text{Asc}(m_{\omega_1}, \Pi_{(n)}) + O(\hbar^{n+2}). \quad (6.2)$$

ЛЕММА 4. Для произвольной суперантисимметричной 2-формы Π выполняется тождество

$$(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} d_2 \Pi(z \mid f, g, h) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h) + \varepsilon(f)\varepsilon(g)} d_2 \Pi(z \mid g, f, h) + \text{cycle}(f, g, h) \equiv 0. \quad (6.3)$$

6.3. Второй порядок. Согласно лемме 2 во втором порядке по $\hbar$ уравнение ассоциативности (6.1) принимает вид

$$d_2 \Pi_{(2)} + \frac{1}{2} \text{Asc}(m_{\omega_1}, m_{\omega_1}) = 0.$$

Используя тождество (6.3), получаем (учитывая, что форма $m_{\omega_1}(z \mid f, g)$ суперантисимметрична)

$$(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} m_{\omega_1}(z \mid f, m_{\omega_1}(|g, h)) + \text{cycle}(f, g, h) = 0.$$

В левой части этого равенства члены со вторыми производными одной из функций f, g или h тождественно сокращаются, а приравнивание нулю коэффициента перед $\partial f \partial g \partial h$ дает

$$(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_C} \omega_1^{AD}(z) \partial_D \omega_1^{BC} + \text{cycle}(f, g, h) = 0.$$

Таким образом, $\omega_1^{AB}(z)$ суперантисимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, т.е. является метрикой суперскобки Пуассона.

Отметим, что матрица $\omega_{1AB}(z)$, такая что $\omega_{1AB} \omega_1^{BC}(z) = \delta_A^C$, удовлетворяет тождеству

$$(-1)^{(1+\varepsilon_A)\varepsilon_C} \partial_A^z \omega_{1BC}(z) + \text{cycle}(A, B, C) = 0. \quad (6.4)$$

В дальнейшем для каждой удовлетворяющей тождеству Якоби суперантисимметричной метрике

$$\omega^{AB}(z) = \omega_1^{AB}(z) + \hbar \omega_2^{AB}(z) + \dots, \quad (6.5)$$

где матрица $\omega_1^{AB}(z)$ невырожденна при всех z , будет построено такое звездочное произведение $\Pi_{F\omega}$, что

$$\Pi_{F\omega^{(1)}} - \Pi_{F\omega^{(2)}} = \hbar^k m_{\tilde{\omega}_k} + O(\hbar^{k+1}), \quad \tilde{\omega} = \omega^{(1)} - \omega^{(2)}, \quad (6.6)$$

для любых таких метрик $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$, что $\omega^{(1)} = \omega^{(2)} \pmod{\hbar^k}$. Будет показано, что произвольная деформация $\Pi(z \mid f, g; \hbar) = fg + \hbar m_{\omega_1}(z \mid f, g) + \dots$ поточечного произведения, где матрица $\omega_1^{AB}(z)$ обратима при всех z , эквивалентна с точностью до преобразования подобия звездочному произведению $\Pi_{F\omega}(z \mid f, g; \hbar)$, где ω – суперантисимметричная метрика вида (6.5), удовлетворяющая тождеству Якоби. Для построения $\Pi_{F\omega}$ нам потребуется адаптировать известную конструкцию Федосова [3] на суперслучай.

6.4. Суперконструкция Федосова. Введем формальную вейлевскую супералгебру W :

$$\begin{aligned} a \in W \Rightarrow a &= a(z \mid y, \eta; \hbar) = \sum_{p, q, k \geq 0} \hbar^k a_{k|(A)_p|(B)_q}(z)(y^A)^p(\eta^B)^q, \\ \varepsilon(z^A) &= \varepsilon(y^A) = \varepsilon_A, \quad \varepsilon(\eta^A) = \varepsilon_A + 1, \\ \deg(z^A) &= \deg(\eta^A) = 0, \quad \deg(y^A) = 1, \quad \deg(\hbar) = 2, \end{aligned}$$

с ассоциативным произведением

$$\begin{aligned} a \circ b(z \mid y, \eta; \hbar) &= a(z \mid y, \eta; \hbar) e^{(i\hbar/2)\hat{\omega}} b(z \mid y, \eta; \hbar) = \\ &= (-1)^{\varepsilon(a)\varepsilon(b)} b(z \mid y, \eta; \hbar) e^{(-i\hbar/2)\hat{\omega}} a(z \mid y, \eta; \hbar), \\ \hat{\omega} &= \overleftarrow{\partial}_A^y \omega^{AB}(z) \partial_B^y, \quad \omega^{BA}(z) = -(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \omega^{AB}(z), \quad \varepsilon(\omega^{AB}) = \varepsilon_A + \varepsilon_B, \\ &(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_C} \omega^{AD}(z) \partial_D^z \omega^{DC}(z) + \text{cycle}(A, B, C) = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Суперкоммутатором $[a, b]$ назовем выражение

$$[a, b] = a \circ b - (-1)^{\varepsilon(a)\varepsilon(b)} b \circ a = 2ia \sin\left(\frac{\hbar}{2} \hat{\omega}\right) b, \quad a, b \in W,$$

обладающее следующими свойствами:

1) суперантисимметрия

$$[b, a] = -(-1)^{\varepsilon(a)\varepsilon(b)} [a, b];$$

2) правило Лейбница

$$[a, b \circ c] = [a, b] \circ c + (-1)^{\varepsilon(a)\varepsilon(b)} b \circ [a, c], \quad a, b, c \in W;$$

3) тождество Якоби

$$(-1)^{\varepsilon(a)\varepsilon(c)} [a, [b, c]] + \text{cycle}(a, b, c) = 0, \quad a, b, c \in W.$$

Для функции $a \in W$ введем обозначения

$$a_0 = a_0(z \mid \eta; \hbar) = a(z \mid y, \eta; \hbar)|_{y=0}, \quad a_{00} = a_{00}(z \mid \hbar) = a(z \mid y, \eta; \hbar)|_{y=\eta=0}.$$

Подмножество функций W_Z супералгебры W , коммутирующих со всеми функциями из супералгебры W , назовем центром супералгебры W , т.е. $a_Z \in W_Z \Rightarrow [a_Z, b] = 0$ для любого $b \in W$. Очевидно, что множество W_Z состоит из функций, не зависящих от y : $a_Z \in W_Z \Rightarrow a_Z = a_{Z0} = a_Z(z \mid \eta; \hbar)$.

Введем операторы

$$\hat{\delta} = \eta^A \frac{\partial}{\partial y^A}, \quad \hat{\delta}^* = y^A \frac{\partial}{\partial \eta^A}, \quad \hat{N} = \eta^A \frac{\partial}{\partial \eta^A} + y^A \frac{\partial}{\partial y^A}, \quad \hat{q} = \hat{N}^{-1} \cdot \hat{\delta}^*,$$

обладающие свойствами

$$\hat{\delta}^2 = (\hat{\delta}^*)^2 = \hat{q}^2 = 0, \quad \hat{\delta}\hat{\delta}^* + \hat{\delta}^*\hat{\delta} = \hat{N}, \quad [\hat{N}, \hat{\delta}] = [\hat{N}, \hat{\delta}^*] = [\hat{N}, \hat{q}] = 0,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(\hat{\delta}) = \varepsilon(\hat{\delta}^*) = \varepsilon(\hat{q}) = 1, \quad \varepsilon(\hat{N}) = 0, \quad \hat{q}a = \begin{cases} \hat{\delta}^* \hat{N}^{-1}a, & \hat{N}a \neq 0, \\ 0, & \hat{N}a = 0, \end{cases} \\ \deg(\hat{\delta}) = -1, \quad \deg(\hat{\delta}^*) = \deg(\hat{q}) = 1, \quad \deg(\hat{N}) = 0, \\ a = \hat{\delta}\hat{\delta}^*a + \hat{\delta}^*\hat{\delta}a + a_{00} \quad \forall a \in W.\end{aligned}$$

Введем матрицу $\omega_{AB}(z)$, обратную матрице $\omega^{AB}(z)$,

$$\begin{aligned}\omega_{AD}(z)\omega^{DB}(z) &= \omega^{BD}(z)\omega_{DA}(z) = \delta_A^B, \\ \omega_{BA} &= (-1)^{(1+\varepsilon_A)(1+\varepsilon_B)}\omega_{AB}, \quad \varepsilon(\omega_{AB}) = \varepsilon_A + \varepsilon_B, \\ (-1)^{(1+\varepsilon_A)\varepsilon_C} \partial_A^z \omega_{BC}(z) + \text{cycle}(A, B, C) &= 0.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Ковариантными производными матриц $\omega_{AB}(z)$ и $\omega^{AB}(z)$ назовем выражения

$$\begin{aligned}\nabla_A \omega_{BC}(z) &= \partial_A^z \omega_{BC}(z) - \Delta_{AB}^D(z)\omega_{DC}(z) - (-1)^{(1+\varepsilon_B)(1+\varepsilon_C)}\Delta_{AC}^D(z)\omega_{DB}(z), \\ \nabla_A \omega^{BC}(z) &= (-1)^{\varepsilon_B(\varepsilon_A+\varepsilon_D)}\omega^{BD}(z)[\nabla_A \omega_{DF}(z)]\omega^{FC}(z) = \\ &= \partial_A^z \omega^{BC}(z) + \Gamma_{AD}^B(z)\omega^{DC}(z) - (-1)^{\varepsilon_B\varepsilon_C}\Gamma_{AD}^C(z)\omega^{DB}(z), \\ \Delta_{BA}^C &= (-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B}\Delta_{AB}^C, \quad \varepsilon(\Delta_{AB}^C) = \varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C, \quad \Gamma_{AB}^C = (-1)^{\varepsilon_B(1+\varepsilon_C)}\Delta_{AB}^C,\end{aligned}$$

где $\Delta_{AB}^C(z)$ и $\Gamma_{AB}^C(z)$ – связности.

Связность называется *суперсимплектической*, если матрицы $\omega_{AB}(z)$ и $\omega^{AB}(z)$ (суперсимплектические метрики) ковариантно постоянны, т.е.

$$\nabla_A \omega_{BC}(z) = \nabla_A \omega^{BC}(z) = 0.\tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) можно записать в виде

$$\partial_A^z \omega_{BC}(z) = \Delta_{AB|C}(z) - (-1)^{\varepsilon_B\varepsilon_C}\Delta_{AC|B}(z), \quad \Delta_{AB|C} = \Delta_{AB}^D \omega_{DC}(-1)^{\varepsilon_C},\tag{6.10}$$

следствием которого является полезное соотношение

$$\begin{aligned}[\partial_A^z \omega_{BC}(z) - (-1)^{\varepsilon_A\varepsilon_B} \partial_B^z \omega_{AC}(z)] &= \\ &= -(-1)^{\varepsilon_B\varepsilon_C}\Delta_{AC|B}(z) + (-1)^{\varepsilon_A(\varepsilon_B\varepsilon_C)}\Delta_{BC|A}(z).\end{aligned}\tag{6.11}$$

Общее решение уравнения (6.10) можно представить в виде

$$\Delta_{AB|C}(z) = \frac{1}{3} [\partial_A^z \omega_{BC}(z) + \partial_B^z \omega_{AC}(z)](-1)^{\varepsilon_C} + \rho_{ABC}(z),\tag{6.12}$$

где $\rho_{ABC}(z)$ – произвольная функция, полностью суперсимметричная по индексам.

Введем следующие операторы: дифференциал $\hat{d} = \eta^A \partial_A^z$, операторная связность $\hat{\Gamma} = \eta^A \Gamma_{AB}^C y^B \partial_C^z = \eta^A \Delta_{AB}^C (-1)^{\varepsilon_B(1+\varepsilon_C)} y^B \partial_C^z$, операторная ковариантная производная $\hat{D} = \hat{d} - \hat{\Gamma} \equiv \eta^A \hat{D}_A$.

Прямое вычисление дает следующее правило действия операторной ковариантной производной на произведение Вейля:

$$\begin{aligned}\hat{D}(a \circ b) &= (\hat{D}a) \circ b + (-1)^{\varepsilon(a)} a \circ (\hat{D}b) + \frac{i\hbar}{2} (-1)^\xi \eta^A [\nabla_A \omega^{BC}] (a \overleftarrow{\partial}_B^y) \circ (\partial_C^y b), \\ \xi &= (\varepsilon(a) + \varepsilon_C + 1)\varepsilon_B + \varepsilon(a)\varepsilon_C.\end{aligned}$$

Если связность суперсимплектическая, то операторная ковариантная производная действует на произведение Вейля по правилу Лейбница

$$\widehat{D}(a \circ b) = (\widehat{D}a) \circ b + (-1)^{\varepsilon(a)} a \circ (\widehat{D}b).$$

Далее мы всегда будем предполагать, что связность суперсимплектическая. Непосредственное вычисление позволяет получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \widehat{D}^2 a &= \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon_B} \eta^B \eta^A [\widehat{D}_A, \widehat{D}_B] a = \\ &= \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon_B} \eta^B \eta^A R_{AB|C}{}^D y^C (-1)^{\varepsilon_C(1+\varepsilon_D)} \partial_D^y a = -\frac{i}{\hbar} [R, a], \\ \widehat{D}R &= 0, \quad R = \frac{1}{4} R_{AB} y^A y^B, \\ R_{AB} &= (-1)^{\varepsilon_D} \eta^D \eta^C R_{CD|A|B}, \quad R_{CD|A|B} = R_{CD|A}{}^D \omega_{DB} (-1)^{\varepsilon_C(1+\varepsilon_D)}, \end{aligned}$$

где $R_{AB|C}{}^D = -\partial_A^z \Delta_{BC}^D + \Delta_{AC}^E \Delta_{EB}^D (-1)^{\varepsilon_B \varepsilon_C} - (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} (A \leftrightarrow B)$ – тензор кривизны связности Δ_{AB}^C . Используя соотношения (6.8), (6.10) и (6.11), получаем представление для тензора $R_{AB|C|D}$:

$$\begin{aligned} R_{AB|C|D} &= \frac{1}{3} \partial_C^z \partial_D^z \omega_{AB} (-1)^{\varepsilon_B + (\varepsilon_A + \varepsilon_B)(\varepsilon_C + \varepsilon_D)} + [\partial_A \rho_{BCD} - (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \partial_B \rho_{ACD}] + \\ &+ [\Delta_{AC|E} \omega^{EF} \Delta_{BD|F} (-1)^{\varepsilon_C + \varepsilon_D + \varepsilon_{DC} + \varepsilon_E + \varepsilon_B \varepsilon_C + \varepsilon_B \varepsilon_F + \varepsilon_D \varepsilon_F} - \\ &- (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} (A \leftrightarrow B)], \end{aligned}$$

явно демонстрирующее суперантисимметрию этого тензора по индексам A, B и его суперсимметрию по индексам C, D .

Простые вычисления позволяют установить следующие соотношения:

$$\hat{\delta} \widehat{D} + \widehat{D} \hat{\delta} = 0, \quad \hat{\delta} a = -\frac{i}{\hbar} [\gamma_\delta, a], \quad \gamma_\delta = \eta^A \omega_{AB}(z) y^B.$$

Оператор $\widehat{Q}$,

$$\widehat{Q}a = \widehat{D}a - \frac{i}{\hbar} [\gamma, a],$$

назовем $\widehat{Q}$ -связностью, а функцию (2-форму) Ω ,

$$\Omega = R + \widehat{D}\gamma - \frac{i}{\hbar} \gamma \circ \gamma,$$

– ее кривизной. Здесь $\gamma = \eta^A \gamma_A(z | y; \hbar)$ – пока произвольная функция первого порядка по η (1-форма) со свойством $\gamma_0 = 0$. $\widehat{Q}$ -связность обладает следующими свойствами (напомним, что операторная ковариантная производная $\widehat{D}$ суперсимплектическая):

$$\begin{aligned} \widehat{Q}^2 a &= -\frac{i}{\hbar} [\Omega, a], \quad \widehat{Q}\Omega = 0, \\ \widehat{Q}(a \circ b) &= (\widehat{Q}a) \circ b + (-1)^{\varepsilon(a)} a \circ (\widehat{Q}b). \end{aligned}$$

$\widehat{Q}$ -связность называется абелевой, если $\widehat{Q}^2 a = 0$ для любого $a \in W$, или, эквивалентно, $\Omega = \Omega_0 \in W_Z$.

ТЕОРЕМА 1. *Существует абелева $\widehat{Q}$ -связность вида*

$$\widehat{Q}a = \widehat{D}a - \hat{\delta}a - \frac{i}{\hbar} [r, a] = \widehat{D}a - \frac{i}{\hbar} [\gamma, a], \quad \gamma = -\gamma_\delta + r,$$

где 1-форма r является (единственным) решением уравнения

$$\hat{\delta}r = R + \widehat{D}r - \frac{i}{\hbar} r \circ r, \quad \deg r \geq 3, \quad \hat{q}r = 0. \quad (6.13)$$

Доказательство существования и единственности решения уравнения (6.13) повторяет рассуждения Федосова и мы его здесь не приводим.

Вычисление кривизны $\widehat{Q}$ -связности дает

$$\Omega = \frac{1}{2} \eta^A \eta^B \omega_{BA} - \hat{\delta}r + R + \widehat{D}r - \frac{i}{\hbar} r \circ r = \frac{1}{2} \eta^A \eta^B \omega_{BA}.$$

Далее мы рассматриваем только абелевы $\widehat{Q}$ -связности.

Функцию $a \in W$, удовлетворяющую условию

$$\widehat{Q}a = 0,$$

назовем плоской. Подпространство плоских функций из W , не зависящих от η (подпространство плоских 0-форм), обозначим W_Q :

$$a_Q \in W_Q \Rightarrow a_Q = a_Q(z | y; \hbar), \quad \widehat{Q}a_Q = 0.$$

Подпространство функций из W_Z , не зависящих от η , обозначим W_{Z0} :

$$a_{Z0} \in W_{Z0} \Rightarrow a_{Z0} = a_{Z0}(z | \hbar).$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 5. *Подпространство W_Q является алгеброй относительно произведения Вейля.*

Действительно,

$$\widehat{Q}(a_Q \circ b_Q) = (\widehat{Q}a_Q) \circ b_Q + (-1)^{\varepsilon(a)} a \circ \widehat{Q}b_Q = 0 \Rightarrow a_Q \circ b_Q \in W_Q.$$

Введем оператор $\hat{\sigma}$ перехода в точку $y^A = 0$:

$$\hat{\sigma}a(\dots y \dots) = a(\dots 0 \dots) = a_0.$$

Следующая теорема показывает, что между пространствами W_Q и W_{Z0} существует естественное взаимно однозначное соответствие.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой функции $a_{Z0} \in W_{Z0}$ существует одна и только одна функция $a_Q \in W_Q$ со свойством $\hat{\sigma}a_Q = a_{Z0}$. Другими словами, уравнение*

$$\widehat{Q}a = 0, \quad a = a(z | y; \hbar), \quad a(z | 0; \hbar) = a_{Z0}(z | \hbar),$$

имеет при фиксированной функции $a_{Z0}(z | \hbar)$ единственное решение.

Доказательство повторяет рассуждения Федосова и мы его здесь не приводим.

Функции $a_Q \in W_Q$, $\hat{\sigma}a_Q = a_{Z0} \in W_{Z0}$, будем называть расширениями функций a_{Z0} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $a_{Z0}, b_{Z0} \in W_{Z0}$, а $a_Q, b_Q \in W_Q$ – соответствующие расширения этих функций. Назовем $*$ -произведением $a_{Z0} * b_{Z0}$ функций a_{Z0} и b_{Z0} выражение

$$a_{Z0} * b_{Z0} = \hat{\sigma}[a_Q \circ b_Q]. \quad (6.14)$$

Нетрудно проверить, что $*$ -произведение (6.14) ассоциативно.

Далее мы будем использовать конкретное выражение для связности³⁾ Δ_{AB}^C ,

$$\Delta_{AB}^C = \frac{1}{3} (\partial_A^z \omega_{BD} + (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \partial_B^z \omega_{AD}) \omega^{DC}, \quad (6.15)$$

где ω^{AB} – суперсимплектическая метрика, задаваемая формальным рядом по $\hbar$,

$$\omega^{AB} = \omega^{AB}(z | \hbar) = \sum_{k=1} \hbar^{k-1} \omega_k^{AB}(z).$$

При фиксированной метрике ω^{AB} $*$ -произведение (6.14) однозначно определено и задается формальным рядом по $\hbar$ со структурой

$$a_{Z0} * b_{Z0} = a_{Z0} b_{Z0} + O(\hbar).$$

Будем обозначать $*$ -произведение (6.14) как $\Pi_{F\omega}(z | f, g; \hbar)$.

6.5. Второй порядок. Представим форму $\Pi(z | f, g; \hbar)$ в виде

$$\Pi(z | f, g; \hbar) = \Pi_{F\omega_1}(z | f, g; \hbar) + \hbar^2 \Pi_{(2)}(z | f, g) + O(\hbar^3), \quad \Pi_{(2)} \in \mathcal{A}_2.$$

Тогда во втором порядке по $\hbar$ уравнение ассоциативности (6.1) принимает вид

$$\begin{aligned} d_2 \Pi_{(2)} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Pi_{(2)}(z | f, g) &= m_{\omega_2}(z | f, g) + d_1 M_{(2)}(z | f, g), \quad M_{(2)}(z | f) \in \mathcal{A}_1. \end{aligned}$$

6.6. Третий порядок. После выполнения преобразования подобия $T = I - \hbar^2 M_{(2)}(z | f) + O(\hbar^2)$ форма Π может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Pi(z | f, g; \hbar) &= \Pi_{F\omega_1}(z | f, g; \hbar) + \hbar^2 m_{\omega_2}(z | f, g) + \hbar^3 \Pi_{(3)}(z | f, g) + O(\hbar^4), \\ \Pi_{(3)}(z | f, g) &\in D. \end{aligned}$$

Согласно лемме 3 уравнение ассоциативности (6.1) дает в третьем порядке по $\hbar$

$$d_3 \Pi_{(3)} + \text{Asc}(m_{\omega_1}, m_{\omega_2}) = 0.$$

³⁾Выражение (6.15), рассматриваемое в произвольной системе координат, не имеет трансформационных свойств связности. Однако его легко ковариантизировать таким образом, что в произвольной системе координат это будет настоящая связность, а в используемой нами (декартовой) системе координат она будет совпадать с выражением (6.15).

Используя тождество (6.3), получаем

$$\begin{aligned} (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)}[m_{\omega_1}(z | f, m_{\omega_2}(|g, h)) + m_{\omega_2}(z | f, m_{\omega_1}(|g, h))] + \text{cycle}(f, g, h) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_C}[\omega_1^{AD}(z)\partial_D \omega_1^{BC}(z) + \omega_2^{AD}(z)\partial_D \omega_1^{BC}(z)] + \text{cycle}(f, g, h) &= 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Соотношение (6.16) означает, что метрика $\omega_1^{AB} + \hbar \omega_2^{AB}$ удовлетворяет тождеству Якоби (6.7) с точностью до членов порядка $\hbar^2$. Отсюда следует, что матрица

$$\omega_{[1]AB}(z; \hbar) = \omega_{1AB}(z) + \hbar \omega_{1CD}(z) \omega_2^{CD}(z) \omega_{1DB}(z)$$

удовлетворяет тождеству (6.8), а значит, суперантисимметричная матрица $\omega_{[1]}^{AB}(z; \hbar)$,

$$\omega_{[1]}^{AC}(z; \hbar) \omega_{[1]CB}(z; \hbar) = \delta_B^A, \quad \omega_{[1]}^{AB}(z; \hbar) = \omega_1^{AB}(z) + \hbar \omega_2^{AB}(z) + O(\hbar^2),$$

точно удовлетворяет тождеству Якоби (6.7).

В силу (6.6) мы теперь можем представить форму $\Pi(z | f, g; \hbar)$ в виде

$$\Pi(z | f, g; \hbar) = \Pi_{F\omega_{[1]}}(z | f, g; \hbar) + \hbar^3 \Pi_{(3)}(z | f, g) + O(\hbar^4), \quad \Pi_{(3)}(z | f, g) \in D.$$

Тогда в третьем порядке по $\hbar$ уравнение ассоциативности (6.1) принимает вид

$$d_2 \Pi_{(3)} = 0.$$

Далее нам остается воспользоваться методом математической индукции. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Каждая деформация $\Pi(z | f, g; \hbar) = fg + \hbar m_{\omega_1}(z | f, g) + \dots$ поточечного произведения, где матрица $\omega_1^{AB}(z)$ обратима при всех z , эквивалентна с точностью до преобразования подобия звездочному произведению $\Pi_{F\omega_{[\infty]}}(z | f, g; \hbar)$, где*

$$\omega_{[\infty]}^{AB}(z; \hbar) = \omega_1^{AB}(z) + \hbar \omega_2^{AB}(z) + \dots$$

– суперантисимметричная матрица, удовлетворяющая тождеству Якоби (6.7).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Свойства гладкости первого дифференциала Хохшильда

Пусть O – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{E}(O)$ пространство всех гладких функций на O . Топология $\mathcal{E}(O)$ задается полунормами

$$\|f\|_{N,K} = \sup_{x \in K, |\lambda| \leq N} |\partial^\lambda f(x)|,$$

где N пробегает множество $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел, а K – множество всех компактов, лежащих в O .

Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^n$. Подпространство $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций, носитель которых содержится в K , обозначим $\mathcal{D}(K)$. Пространство $\mathcal{D}(K)$ снабжается топологией, индуцированной из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Если V – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то пространство Шварца $\mathcal{D}(V)$ определяется соотношением $\mathcal{D}(V) = \bigcup_K \mathcal{D}(K)$, где

объединение берется по всем компактам, лежащим в V , и снабжается топологией индуктивного предела.

Пусть O и V – открытые множества в $\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbb{R}^{n_2}$ соответственно, $\mathbf{m}$ – непрерывное линейное отображение из $\mathcal{D}(V)$ в $\mathcal{E}(O)$.

Очевидно, билинейная форма

$$(f, g) \rightarrow \int f(x) \mathbf{m}(g)(x) dx$$

на $\mathcal{D}(O) \times \mathcal{D}(V)$ раздельно непрерывна. Поэтому в силу теоремы Шварца о ядре (см. [17], теорема 5.2.1) существует единственная обобщенная функция $m \in \mathcal{D}'(O \times V)$ такая, что

$$m(f \otimes g) = \int f(x) \mathbf{m}(g)(x) dx, \quad (f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y), \quad (\text{A.1})$$

для любых $f \in \mathcal{D}(O)$ и $g \in \mathcal{D}(V)$. Мы будем говорить, что обобщенная функция $m \in \mathcal{D}'(O \times V)$ является гладкой по первому аргументу, если она может быть получена описанным выше способом, т.е. существует непрерывное линейное отображение $\mathbf{m}: \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{E}(O)$, удовлетворяющее (A.1).

ЛЕММА 6. Пусть $O \subset \mathbb{R}^{n_1}$ – открытое множество, ϱ – гладкое отображение из O в $\mathbb{R}^{n_2}$. Если обобщенная функция $m \in \mathcal{D}'(O \times \mathbb{R}^{n_2})$ гладкая по первому аргументу, то обобщенная функция $m(x, y + \varrho(x))$ также является гладкой по первому аргументу.

Доказательство леммы 6 будет дано ниже в приложении Б.

Первый дифференциал Хохшильда d_1 будем рассматривать как оператор из пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{3n})$. Для любого $M \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ имеем

$$d_1 M(\varphi) = M(\mathcal{L}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{3n}), \quad (\text{A.2})$$

где непрерывный линейный оператор $\mathcal{L}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{3n}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ определяется соотношением

$$(\mathcal{L}\varphi)(x, y) = \varphi(x, x, y) + \varphi(x, y, x) - \varphi(x, y, y). \quad (\text{A.3})$$

Фиксируем $M \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ и введем обобщенные функции $\widetilde{M} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ и $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{3n})$, полагая

$$\widetilde{M}(x, y) = M(x, y + x), \quad S(x, y, z) = d_1 M(x, y + x, z + x). \quad (\text{A.4})$$

Из (A.2) и (A.3) следует, что $\widetilde{M}$ и S связаны соотношением

$$S(\varphi) = \widetilde{M}(\tilde{\mathcal{L}}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{3n}), \quad (\text{A.5})$$

где непрерывный линейный оператор $\tilde{\mathcal{L}}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{3n}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ дается формулой

$$(\tilde{\mathcal{L}}\varphi)(x, y) = \varphi(x, 0, y) + \varphi(x, y, 0) - \varphi(x, y, y).$$

В частности, если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, то

$$S(f \otimes \psi) = \widetilde{M}(f \otimes Q\psi), \quad (\text{A.6})$$

где непрерывный линейный оператор $Q: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$(Q\psi)(x) = \psi(0, x) + \psi(x, 0) - \psi(x, x). \quad (\text{A.7})$$

ЛЕММА 7. Для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существует такой непрерывный линейный оператор $R_K: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, что

$$QR_K g = g \quad (\text{A.8})$$

для любой функции $g \in \mathcal{D}(K)$ такой, что

$$\partial_i g(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A.9})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^n$, h_K – гладкая функция с компактным носителем, равная единице в окрестности K и удовлетворяющая условию $h_K(0) = 1$. Определим оператор R_K соотношением

$$(R_K g)(x, y) = g(x)h_K(y)^2 - h_K(x)h_K(y) \sum_{i=1}^n y^i \int_0^1 (\partial_i g)(tx) dt, \quad g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Непосредственно проверяется, что оператор R_K непрерывен. Если $g \in \mathcal{D}(K)$ удовлетворяет (A.9), то интегралы $\int_0^1 (\partial_i g)(tx) dt$ обращаются в нуль при $x = 0$. Поэтому в силу (A.7) и соотношения $h_K^2 g = g$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} (QR_K g)(x) &= g(0)h_K(x)^2 + g(x)(1 - h_K(x)^2) + h_K(x)^2 \sum_{i=1}^n x^i \int_0^1 (\partial_i g)(tx) dt = \\ &= h_K(x)^2 \left(g(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} g(tx) dt \right) = h_K(x)^2 g(x) = g(x). \end{aligned}$$

Пусть χ – гладкая функция с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$, равная единице в окрестности начала координат. Для $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ определим функцию $\hat{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, полагая

$$\hat{g}(x) = g(x) - \chi(x) \sum_{i=1}^n (\partial_i g)(0) x^i. \quad (\text{A.10})$$

Очевидно, $(\partial_i \hat{g})(0) = 0$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Предположим, что обобщенная функция $d_1 M$ является гладкой по первому аргументу. Тогда в силу леммы 6 обобщенная функция S также является гладкой по первому аргументу. По определению это означает, что существует такое непрерывное линейное отображение $\mathbf{S}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, что

$$S(f \otimes \psi) = \int \mathbf{S}(\psi)(x) f(x) dx, \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}). \quad (\text{A.11})$$

Для каждого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ введем линейное отображение $\tilde{\mathbf{m}}_K: \mathcal{D}(K) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, полагая

$$\tilde{\mathbf{m}}_K(g) = \mathbf{S}(R_K \hat{g}), \quad g \in \mathcal{D}(K),$$

где R_K – оператор, удовлетворяющий условиям леммы 7. Поскольку $g \rightarrow \hat{g}$ есть непрерывное отображение из $\mathcal{D}(K)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, отображения $\tilde{\mathbf{m}}_K$ непрерывны для

всех K . Если $K \supset \text{supp } \chi$ и $g \in \mathcal{D}(K)$, то $\hat{g} \in \mathcal{D}(K)$. Поэтому при $K \supset \text{supp } \chi$ в силу (A.6), (A.11) и леммы 7 имеем

$$\begin{aligned} \int \tilde{\mathbf{m}}_K(g)(x)f(x) dx &= \int \mathbf{S}(R_K \hat{g})(x)f(x) dx = \\ &= S(f \otimes R_K \hat{g}) = \widetilde{M}(f \otimes QR_K \hat{g}) = \\ &= \widetilde{M}(f \otimes \hat{g}), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad g \in \mathcal{D}(K). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Поскольку правая часть (A.12) не зависит от K , имеем $\tilde{\mathbf{m}}_{K'}(g) = \tilde{\mathbf{m}}_K(g)$ для любых компактов $K' \supset K \supset \text{supp } \chi$ и любой функции $g \in \mathcal{D}(K)$. Это означает, что отображения $\tilde{\mathbf{m}}_K$ при разных K , содержащих $\text{supp } \chi$, согласованы между собой и, следовательно, определяют непрерывное линейное отображение $\tilde{\mathbf{m}}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. В силу (A.12) имеем

$$\int \tilde{\mathbf{m}}(g)(x)f(x) dx = \widetilde{M}(f \otimes \hat{g}), \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (\text{A.13})$$

Пусть $\tilde{m}$ – гладкая обобщенная функция по первому аргументу, соответствующая отображению $\tilde{\mathbf{m}}$, т.е. такая обобщенная функция на $\mathbb{R}^{2n}$, что

$$\tilde{m}(f \otimes g) = \int \tilde{\mathbf{m}}(g)(x)f(x) dx, \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Для $i = 1, 2, \dots, n$ положим $\chi^i(x) = \chi(x)x^i$ и определим обобщенные функции $\mu^i \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ соотношениями $\mu^i(f) = -\widetilde{M}(f \otimes \chi^i)$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда в силу (A.10) и (A.13) получаем

$$\tilde{m}(f \otimes g) = \widetilde{M}(f \otimes g) + \sum_{i=1}^n (\partial_i g)(0) \mu^i(f), \quad f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (\text{A.14})$$

Поскольку линейная оболочка элементов вида $f \otimes g$ плотна в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, из (A.14) следует, что

$$\tilde{m}(x, y) = \widetilde{M}(x, y) - \sum_{i=1}^n \mu^i(x) \partial_i \delta(y). \quad (\text{A.15})$$

Определим обобщенную функцию $m \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ формулой $m(x, y) = \tilde{m}(x, y - x)$. В силу леммы 6 обобщенная функция m является гладкой по первому аргументу. Делая в (A.15) замену $y \rightarrow y - x$, с учетом (A.4) получаем

$$m(x, y) = M(x, y) - \sum_{i=1}^n \mu^i(x) \partial_i \delta(y - x).$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 8. Пусть $M \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ – обобщенная функция такая, что $d_1 M$ является гладкой по первому аргументу. Тогда M представима в виде

$$M(x, y) = m(x, y) + \sum_{i=1}^n \mu^i(x) \partial_i \delta(y - x),$$

где $\mu^i \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, а функция $m \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ является гладкой по первому аргументу.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Доказательство леммы 6

Пусть U и V – открытые множества в $\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbb{R}^{n_2}$ соответственно, f – гладкая функция на $U \times V$. Для $x \in U$ введем функцию $f_x \in \mathcal{E}(V)$, полагая

$$f_x(y) = f(x, y).$$

Если $\lambda \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, то функцию $\partial_x^\lambda f(x, y)$ на $U \times V$ обозначим через f^λ . Для краткости будем писать f_x^λ вместо $(f^\lambda)_x$. Таким образом, имеем

$$f_x^\lambda(y) = \partial_x^\lambda f(x, y).$$

Обозначим через $\mathcal{R}(U, V)$ пространство, состоящее из всех гладких функций f на $U \times V$, обладающих следующим свойством: для любого компактного множества $B \subset U$ найдется такой компакт $K \subset V$, что $f(x, y) = 0$ для любых $x \in B$ и $y \notin K$. Очевидно, $f^\lambda \in \mathcal{R}(U, V)$ для любых $f \in \mathcal{R}(U, V)$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$. Если $f \in \mathcal{R}(U, V)$ и $x \in U$, то $f_x \in \mathcal{D}(V)$.

Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 2.1.3 книги [17].

ЛЕММА 9. Пусть U и V – открытые множества в $\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbb{R}^{n_2}$ соответственно, $f \in \mathcal{R}(U, V)$ и $m \in \mathcal{D}'(V)$. Обозначим через g функцию $x \rightarrow m(f_x)$ на U . Тогда $g \in \mathcal{E}(U)$, причем для любых $x \in U$ и мультииндекса $\lambda \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$ имеем

$$\partial^\lambda g(x) = m(f_x^\lambda).$$

ЛЕММА 10. Пусть U, V и O – открытые множества в $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ и $\mathbb{R}^{n_3}$ соответственно и $f \in \mathcal{R}(U, V)$. Для любого непрерывного отображения $\mathbf{m}: \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{E}(O)$ и любого мультииндекса $\nu \in \mathbb{Z}_+^{n_3}$ функция $(x, z) \rightarrow (\partial^\nu \mathbf{m}(f_x))(z)$ непрерывна на $U \times O$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $g(x, z)$ функцию $(x, z) \rightarrow (\partial^\nu \mathbf{m}(f_x))(z)$ на $U \times O$. Фиксируем точку $(x_0, z_0) \in U \times O$ и $\varepsilon > 0$. Так как функция $\partial^\nu \mathbf{m}(f_{x_0})$ непрерывна на O , то найдется такая компактная окрестность K точки z_0 , что

$$|g(x_0, z) - g(x_0, z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in K. \quad (\text{Б.1})$$

Легко видеть, что $x \rightarrow f_x$ есть непрерывное отображение из U в $\mathcal{D}(V)$. Поэтому найдется такая окрестность B точки x_0 , что $\|\mathbf{m}(f_x) - \mathbf{m}(f_{x_0})\|_{|\nu|, K} < \varepsilon/2$ при $x \in B$. Отсюда, в частности, следует, что $|g(x, z) - g(x_0, z)| < \varepsilon/2$ для любых $x \in B$ и $z \in K$. Поэтому в силу (Б.1) имеем $|g(x, z) - g(x_0, z_0)| < \varepsilon$ для любых $x \in B$ и $z \in K$, т.е. g непрерывна в точке (x_0, z_0) .

ЛЕММА 11. Пусть U, V и O – открытые множества в $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ и $\mathbb{R}^{n_3}$ соответственно, $f \in \mathcal{R}(U, V)$ и $\mathbf{m}: \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{E}(O)$ – непрерывное отображение. Обозначим через g функцию $(x, z) \rightarrow \mathbf{m}(f_x)(z)$ на $U \times O$. Тогда $g \in \mathcal{E}(U \times O)$, причем

$$\partial_x^\lambda \partial_z^\nu g(x, z) = (\partial^\nu \mathbf{m}(f_x^\lambda))(z) \quad (\text{Б.2})$$

для любых мультииндексов $\lambda \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$ и $\nu \in \mathbb{Z}_+^{n_3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для краткости $\partial_{x,i} = \partial/\partial x^i$ и $\partial_{z,j} = \partial/\partial z^j$. Достаточно показать, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $g \in C^k(U \times O)$, причем при $|\lambda| + |\nu| \leq k$ справедливо равенство (Б.2). Доказательство проведем индукцией по k . При $k = 0$ утверждение следует из леммы 10. Покажем, что если утверждение верно для $k \in \mathbb{Z}_+$, то оно верно и для $k+1$. Пусть λ и ν таковы, что $|\lambda| + |\nu| = k$. Поскольку $\mathbf{m}(f_x^\lambda) \in \mathcal{E}(O)$, из (Б.2) следует, что $\partial_x^\lambda \partial_z^\nu g$ имеет все частные производные по z и

$$\partial_{z,j} \partial_x^\lambda \partial_z^\nu g(x, z) = (\partial^{\tilde{\nu}} \mathbf{m}(f_x^\lambda))(z), \quad \tilde{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_{j-1}, \nu_j + 1, \nu_{j+1}, \dots, \nu_{n_3}). \quad (\text{Б.3})$$

Для $z \in O$ определим обобщенную функцию $m_z \in \mathcal{D}'(U)$ соотношением $m_z(\varphi) = (\partial^\nu \mathbf{m}(\varphi))(z)$, $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Тогда $(\partial^\nu \mathbf{m}(f_x^\lambda))(z) = m_z(f_x^\lambda)$. Для любого $\lambda' \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$ имеем $(f_x^\lambda)^{\lambda'} = f_x^{\lambda+\lambda'}$. Поэтому из (Б.2) и леммы 9, примененной к функциям f^λ и m_z , следует, что $\partial_x^\lambda \partial_z^\nu g$ имеет все частные производные по x и

$$\partial_{x,i} \partial_x^\lambda \partial_z^\nu g(x, z) = (\partial^{\tilde{\lambda}} \mathbf{m}(f_x^\lambda))(z), \quad \tilde{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{n_1}). \quad (\text{Б.4})$$

Применяя лемму 10 к f^λ , заключаем, что функция $(x, z) \rightarrow (\partial^\nu \mathbf{m}(f_x^\lambda))(z)$ непрерывна на $U \times O$ для любых λ и ν . Поэтому из (Б.3) и (Б.4) вытекает непрерывность всех частных производных функции $\partial_x^\lambda \partial_z^\nu g(x, z)$. Следовательно, $g \in C^{k+1}(U \times O)$. Наконец, справедливость (Б.2) для производных порядка $k+1$ непосредственно следует из (Б.3) и (Б.4).

ЛЕММА 12. Пусть $O \subset \mathbb{R}^{n_1}$ – открытое множество, ϱ – гладкое отображение из O в $\mathbb{R}^{n_2}$. Пусть $\mathbf{m}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \mathcal{E}(O)$ – непрерывное линейное отображение. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$ определим функцию $\tilde{\mathbf{m}}(\varphi)$ на O соотношением $\tilde{\mathbf{m}}(\varphi)(x) = \mathbf{m}(\varphi(\cdot + \varrho(x)))(x)$. Тогда $\tilde{\mathbf{m}}(\varphi) \in \mathcal{E}(O)$ для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$ и $\tilde{\mathbf{m}}$ является непрерывным линейным отображением из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$ в $\mathcal{E}(O)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$ обозначим функцию $(x, y) \rightarrow \varphi(y + \varrho(x))$ на $O \times \mathbb{R}^{n_2}$ через $\tilde{\varphi}$ и определим функцию $\mathbf{n}(\varphi)$ на $O \times O$ соотношением $\mathbf{n}(\varphi)(x, z) = \mathbf{m}(\tilde{\varphi}_x)(z)$. Очевидно, что $\tilde{\varphi} \in \mathcal{R}(O, \mathbb{R}^{n_2})$ для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$. Поэтому из леммы 11 следует, что $\mathbf{n}(\varphi) \in \mathcal{E}(O \times O)$. Так как $\tilde{\mathbf{m}}(\varphi)(x) = \mathbf{n}(\varphi)(x, x)$, то $\tilde{\mathbf{m}}(\varphi) \in \mathcal{E}(O)$. Докажем, что отображение $\tilde{\mathbf{m}}$ непрерывно. Поскольку отображение $f(x, z) \rightarrow f(x, x)$ из $\mathcal{E}(O \times O)$ в $\mathcal{E}(O)$ непрерывно, достаточно проверить непрерывность отображения $\mathbf{n}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \mathcal{E}(O \times O)$. Фиксируем $N \in \mathbb{Z}_+$ и компакты $K \subset O$ и $K' \subset \mathbb{R}^{n_2}$. Нам надо показать, что найдутся такие $N' \in \mathbb{Z}_+$ и $C > 0$, что

$$\|\mathbf{n}(\varphi)\|_{N, K \times K} \leq C \|\varphi\|_{N', K'}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K'). \quad (\text{Б.5})$$

Выберем такой компакт $K'' \subset \mathbb{R}^{n_2}$, что $K' - \varrho(x) \subset K''$ для любого $x \in K$. Поскольку отображение $\mathbf{m}$ непрерывно, найдутся такие $N'' \in \mathbb{Z}_+$ и $C' > 0$, что

$$\|\mathbf{m}(\psi)\|_{N, K} \leq C' \|\psi\|_{N'', K''}, \quad \psi \in \mathcal{D}(K''). \quad (\text{Б.6})$$

Согласно лемме 11 для любых мультииндексов $\lambda, \nu \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$ и любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$ имеем $\partial_x^\lambda \partial_z^\nu \mathbf{n}(\varphi)(x, z) = (\partial^\nu \mathbf{m}(\tilde{\varphi}_x^\lambda))(z)$. Если $|\nu| \leq N$, то в силу (Б.6) получаем, что

$$|\partial_x^\lambda \partial_z^\nu \mathbf{n}(\varphi)(x, z)| \leq C' \|\tilde{\varphi}_x^\lambda\|_{N'', K''}, \quad x, z \in K, \quad (\text{Б.7})$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(K')$. Индукцией по $|\lambda|$ легко доказать, что функцию $\tilde{\varphi}_x^\lambda$ можно представить в виде

$$\tilde{\varphi}_x^\lambda(y) = \partial_x^\lambda \varphi(y + \varrho(x)) = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, |\kappa| \leq |\lambda|} h_{\lambda, \kappa}(x) (\partial^\kappa \varphi)(y + \varrho(x)), \quad (\text{Б.8})$$

где $h_{\lambda, \kappa}$ – не зависящие от φ гладкие функции на O (их можно выразить через производные от ϱ , но это для нас не существенно). Для $\varphi \in \mathcal{D}(K')$ и $x \in K$ имеем

$$\|(\partial^\kappa \varphi)(\cdot + \varrho(x))\|_{N'', K''} \leq \|\varphi\|_{N'' + |\kappa|, K'}.$$

Поэтому из (Б.7) и (Б.8) следует, что

$$|\partial_x^\lambda \partial_z^\nu \mathbf{n}(\varphi)(x, z)| \leq C_\lambda \|\varphi\|_{N'' + |\lambda|, K'}, \quad x, z \in K, \quad |\nu| \leq N,$$

где $C_\lambda = n_1^{|\lambda|} \max_{|\kappa| \leq |\lambda|} \sup_{x \in K} |h_{\lambda, \kappa}(x)|$. Переходя в последней оценке к точной верхней грани по x, z, λ и ν и полагая $N' = N'' + N$ и $C = \max_{|\lambda| \leq N} C_\lambda$, получаем (Б.5).

ЛЕММА 13. Пусть O и V – открытые множества в $\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbb{R}^{n_2}$ соответственно и $\mathbf{m}$ – непрерывное отображение из $\mathcal{D}(V)$ в $\mathcal{E}(O)$. Для любого $\varphi \in \mathcal{D}(O \times V)$ функция $x \rightarrow \mathbf{m}(\varphi_x)(x)$ на O принадлежит $\mathcal{D}(O)$. Если обобщенная функция $t \in \mathcal{D}'(O \times V)$ является гладкой по первому аргументу и $\mathbf{m}: \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{E}(O)$ – непрерывное линейное отображение, удовлетворяющее (А.1), то

$$t(\varphi) = \int \mathbf{m}(\varphi_x)(x) dx \quad (\text{Б.9})$$

для любого $\varphi \in \mathcal{D}(O \times V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varphi \in \mathcal{D}(O \times V)$ обозначим функцию $x \rightarrow \mathbf{m}(\varphi_x)(x)$ на O через h_φ . Очевидно, h_φ имеет компактный носитель. Кроме того, из леммы 11 следует, что h_φ – гладкая функция. Таким образом, $h_\varphi \in \mathcal{D}(O)$. Поэтому правая часть (Б.9) корректно определена и задает некоторый линейный функционал μ на $\mathcal{D}(O \times V)$. Покажем, что функционал μ непрерывен. Пусть K и K' – компакты в O и V соответственно. Поскольку отображение $\mathbf{m}$ непрерывно, найдутся такие $N \in \mathbb{Z}_+$ и $C > 0$, что $|\mathbf{m}(g)(x)| \leq C \|g\|_{N, K'}$ для любых $g \in \mathcal{D}(K')$ и $x \in K$. Отсюда следует, что

$$|h_\varphi(x)| \leq C \|\varphi(x, \cdot)\|_{N, K'} \leq C \|\varphi\|_{N, K \times K'}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K \times K'), \quad x \in K.$$

Поэтому для любого $\varphi \in \mathcal{D}(K \times K')$ имеем $|\mu(\varphi)| \leq C \Lambda(K) \|\varphi\|_{N, K \times K'}$, где $\Lambda(K)$ – мера Лебега множества K , и непрерывность μ доказана. Из (А.1) и определения μ следует, что $t(f \otimes g) = \mu(f \otimes g)$ для любых $f \in \mathcal{D}(O)$ и $g \in \mathcal{D}(V)$. Ввиду плотности линейной оболочки элементов вида $f \otimes g$ в $\mathcal{D}(O \times V)$ и непрерывности t и μ это означает, что $t = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Положим $\tilde{m}(x, y) = t(x, y + \varrho(x))$. По условию, найдется непрерывное отображение $\mathbf{m}: \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{E}(O)$, удовлетворяющее (А.1). В силу леммы 12 существует такое непрерывное отображение $\tilde{\mathbf{m}}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2}) \rightarrow \mathcal{E}(O)$, что

$\tilde{\mathbf{m}}(g)(x) = \mathbf{m}(g(\cdot - \varrho(x)))(x)$ для любого $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$. Пусть $f \in \mathcal{D}(O)$ и $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$. Положим $\varphi(x, y) = f(x)g(y - \varrho(x))$. Согласно лемме 13 находим

$$\tilde{m}(f \otimes g) = m(\varphi) = \int \mathbf{m}(\varphi_x)(x) dx = \int \tilde{\mathbf{m}}(g)(x) f(x) dx.$$

Это означает, что $\tilde{m}$ является гладкой по первому аргументу.

Благодарности. И. В. Тютин благодарит Институт физики университета Сан-Паулу за гостеприимство и FAPESP за поддержку. Работа поддержана РФФИ (грант № 08-02-01118 (С. Е. Конштейн, И. В. Тютин)) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1615.2008.2).

Список литературы

- [1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Ann. Phys.*, **111**:1 (1978), 61–110; 111–151.
- [2] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991.
- [3] В. Fedosov, *Deformation Quantization and Index Theory*, Math. Top., **9**, Akademie, Berlin, 1996.
- [4] M. Kontsevich, *Lett. Math. Phys.*, **66**:3 (2003), 157–216; [arXiv: q-alg/9709040](#).
- [5] N. A. Nekrasov, *Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories*, [arXiv: hep-th/0011095](#).
- [6] A. Schwarz, *Gauge theories on noncommutative spaces*, [arXiv: hep-th/0011261](#).
- [7] H. J. Groenewold, *Physica*, **12**:7 (1946), 405–460.
- [8] Ф. А. Березин, *УФН*, **132**:3 (1980), 497–548.
- [9] И. В. Тютин, *ТМФ*, **127**:2 (2001), 253–267; [arXiv: hep-th/0101046](#).
- [10] Д. А. Лейтес, И. М. Щепочкина, *ТМФ*, **126**:3 (2001), 339–369.
- [11] S. E. Konstein, I. V. Tyutin, *General form of the deformation of Poisson superbracket on (2, 2)-dimensional superspace*, [arXiv: hep-th/0612006](#).
- [12] J. Vey, *Comment. Math. Helv.*, **50**:1 (1975), 421–454.
- [13] G. Pinczon, *Lett. Math. Phys.*, **39**:2 (1997), 143–156.
- [14] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **140**:3 (2004), 355–366.
- [15] С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, *ТМФ*, **143**:2 (2005), 163–194; [arXiv: hep-th/0312109](#).
- [16] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **136**:2 (2003), 179–196.
- [17] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Т. 1, Мир, М., 1986.

Поступила в редакцию 24.06.2008