Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. Х. Закирова, Жесткие шестимерные h -пространства постоянной кривизны, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 3, 347–354

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:32:07

© 2009 г.

З. Х. Закирова*

ЖЕСТКИЕ ШЕСТИМЕРНЫЕ h -ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Рассмотрено шестимерное псевдориманово пространство $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++--]$, допускающее проективные движения, т.е. группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. Найдены необходимые и достаточные условия того, что шестимерные жесткие h -пространства имеют постоянную кривизну.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, псевдоримановы многообразия, проективные преобразования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Общий метод определения псевдоримановых многообразий, допускающих негомотетическую проективную группу G_T , был развит в работе [1], где была предложена классификация всех лоренцевых многообразий размерности не меньше 3, которые допускают негомотетические проективные или аффинные преобразования. В каждом случае были определены соответствующие максимальные проективные и аффинные алгебры. Однако для псевдоримановых пространств с произвольной сигнатурой эта проблема не решена. В настоящей работе мы исследуем шестимерное псевдориманово пространство $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++--]$.

Изучение псевдоримановых пространств с нетривиальной метрикой интересно прежде всего в случае моделей типа Калуцы–Клейна с дополнительными времениподобными измерениями [2]–[4]. Напомним, что для того чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта [5]

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}. \quad (1)$$

Псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h_{ij} \neq cg_{ij}$ уравнений Эйзенхарта, называются h -пространствами. Известно, что проблема нахождения таких пространств зависит от типа h -пространства, т.е. от типа билинейной формы $L_X g_{ij}$, определенной характеристикой λ -матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$.

*Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия.
E-mail: zolya_zakirova@mail.ru

Число возможных типов зависит от размерности и сигнатуры h -пространства. В нашем случае шестимерных пространств V^6 с сигнатурой $[++----]$ имеется несколько возможных типов. Мы ограничиваемся рассмотрением жестких h -пространств, т.е. h -пространств с различными базисами простых делителей λ -матрицы [6], [7]. В статьях [8]–[12] мы нашли шестимерные жесткие h -пространства типов [2211], [321], [33], [411] и [51].

Для дальнейшего исследования нам понадобится необходимое и достаточное условие постоянства кривизны h -пространства. Это условие, как известно, выражается формулой

$$R_{jkl}^i = K(\delta_k^i g_{jl} - \delta_l^i g_{jk}), \quad K = \text{const}. \quad (2)$$

Поскольку проективно-групповые свойства жестких h -пространств типов [21111] и [3111] были изучены Аминовой, мы их здесь не обсуждаем.

2. H -ПРОСТРАНСТВО ТИПА [2211]

Исследуем h -пространство типа [2211]. В этом случае метрика имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} g_{ij} dx^i dx^j = & e_2 (f_4 - f_2)^2 \Pi_\sigma (f_\sigma - f_2) \{2A dx^1 dx^2 - A^2 \Sigma_1 (dx^2)^2\} + \\ & + e_4 (f_2 - f_4)^2 \Pi_\sigma (f_\sigma - f_4) \{2\tilde{A} dx^3 dx^4 - \tilde{A}^2 \Sigma_2 (dx^4)^2\} + \\ & + \sum_\sigma e_\sigma \Pi'_i (f_i - f_\sigma) (dx^\sigma)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \epsilon x^1 + \theta(x^2), & \tilde{A} &= \tilde{\epsilon} x^3 + \omega(x^4); \\ \Sigma_1 &= 2(f_4 - f_2)^{-1} + \sum_\sigma (f_\sigma - f_2)^{-1}, & \Sigma_2 &= 2(f_2 - f_4)^{-1} + \sum_\sigma (f_\sigma - f_4)^{-1}; \end{aligned} \quad (4)$$

$f_2 = \epsilon x^2$, $f_4 = \tilde{\epsilon} x^4 + a$; $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$; $f_\sigma(x^\sigma)$, $\theta(x^2)$, $\omega(x^4)$ – произвольные функции; a – константа, отличная от нуля, если $\tilde{\epsilon} = 0$; $e_i = \pm 1$.

Вычисляя компоненты тензора кривизны нашего h -пространства, получаем, что ненулевыми являются только следующие компоненты:

$$\begin{aligned} R_{b_p a_p c_p}^{a_p} &= \chi_p g_{b_p c_p}, \\ R_{b_p \sigma c_p}^\sigma &= \rho_{\sigma p} g_{a_p b_p} - \frac{\chi_p - \rho_{\sigma p}}{f_\sigma - f_p} A_p g_{a_p c_p} \delta_{b_p}^p, & c_p &\neq b_p, \\ R_{\sigma b_p \sigma}^{a_p} &= g_{\sigma \sigma} \left\{ \rho_{\sigma p} \delta_{b_p}^{a_p} - \frac{\chi_p - \rho_{\sigma p}}{f_\sigma - f_p} A_p \delta_{b_p}^p \delta_{c_p}^{a_p} \right\}, & c_p &\neq b_p, \\ R_{\sigma \tau \sigma}^\tau &= g_{\sigma \sigma} \frac{\rho_{\tau p} (f_\tau - f_p) - \rho_{\sigma p} (f_\sigma - f_p)}{f_\tau - f_\sigma}, & \sigma &\neq \tau, \\ R_{a_q b_p b_q}^{a_p} &= \left\{ \rho_{pq} g_{a_q b_q} - \frac{\chi_q - \rho_{pq}}{f_p - f_q} A_q g_{a_q c_q} \delta_{b_q}^q \right\} \delta_{b_p}^{a_p} - \left\{ \frac{\chi_p - \rho_{pq}}{f_q - f_p} A_p g_{a_q b_q} + \right. \\ & \left. + \frac{\sum_{l=2,4} (\chi_l - \rho_{pq})}{(f_q - f_p)^2} A_p A_q g_{a_q c_q} \delta_{b_q}^q \right\} \delta_{b_p}^p \delta_{c_p}^{a_p}, & c_p &\neq b_p, \quad c_q \neq b_q, \quad p \neq q, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\chi_p = B_p + \rho_p, \quad B_2 = \frac{\epsilon \theta'}{A^2 g_{12}}, \quad B_4 = \frac{\tilde{\epsilon} \omega'}{\tilde{A}^2 g_{34}}, \quad A_2 = A, \quad A_4 = \tilde{A}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_p)^2 g_{\sigma\sigma}}, \quad \rho_{pq} = -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_p)(f_{\sigma} - f_q) g_{\sigma\sigma}}, \\ \rho_{\sigma p} &= -\frac{1}{4} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_p) g_{\sigma\sigma}} \left\{ \frac{2f''_{\sigma}}{(f'_{\sigma})^2} - \frac{1}{f_{\sigma} - f_p} + \sum_{i, i \neq \sigma} (f_i - f_{\sigma})^{-1} \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\gamma, \gamma \neq \sigma} \frac{(f'_{\gamma})^2}{(f_{\gamma} - f_p)(f_{\gamma} - f_{\sigma}) g_{\gamma\gamma}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $p, q = 2, 4$, $\sigma = 5, 6$, индекс $a_2 = 1, 2$, в то время как индекс $a_4 = 3, 4$.

Из (2), в частности, следует, что

$$R_{112}^1 = R_{1\sigma 2}^{\sigma}, \quad R_{334}^3 = R_{3\sigma 4}^{\sigma}, \quad R_{112}^1 = R_{142}^4, \quad R_{334}^3 = R_{324}^2.$$

Подставляя в эти равенства компоненты тензора кривизны, получаем

$$(\chi_2 - \rho_{\sigma 2})g_{12} = 0, \quad (\chi_4 - \rho_{\sigma 4})g_{34} = 0, \quad (\chi_2 - \rho_{24})g_{12} = 0, \quad (\chi_4 - \rho_{24})g_{34} = 0,$$

при этом $g_{12} \neq 0$ и $g_{34} \neq 0$, следовательно,

$$\chi_2 - \rho_{\sigma 2} = 0, \quad \chi_4 - \rho_{\sigma 4} = 0, \quad \chi_2 - \rho_{24} = 0, \quad \chi_4 - \rho_{24} = 0. \quad (8)$$

Докажем, что условие $\chi_2 - \rho_{\sigma 2} = 0$ эквивалентно равенствам $\rho_2 - \rho_{\sigma 2} = \epsilon = 0$. Действительно, дифференцируя равенство

$$\chi_2 - \rho_{\sigma 2} = \rho_2 - \rho_{\sigma 2} + \frac{\epsilon \theta'}{A^2 g_{12}} = 0$$

по χ^1 , мы получим $\epsilon = 0$ и, следовательно, $\rho_2 - \rho_{\sigma 2} = 0$. Обратно, если $\rho_2 - \rho_{\sigma 2} = \epsilon = 0$, то $\chi_2 - \rho_{\sigma 2} = 0$. Подобным образом находятся эквивалентные условия для других соотношений в (8).

Докажем, что необходимые условия постоянной кривизны h -пространства типа [2211],

$$\chi_p - \rho_{\sigma p} = \chi_p - \rho_{24} = 0, \quad (9)$$

или эквивалентные условия

$$\rho_p - \rho_{\sigma p} = \rho_p - \rho_{24} = \epsilon = \tilde{\epsilon} = 0 \quad (10)$$

являются также и достаточными. Соотношения, которые следуют из (7),

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma} \rho_p &= -f'_{\sigma} \frac{\rho_p - \rho_{\sigma p}}{f_{\sigma} - f_p}, \quad \partial_1 \rho_p = \partial_3 \rho_p = 0, \\ \partial_p \rho_p &= -\epsilon_p \sum_{\sigma} \frac{f'_{\sigma}{}^2}{(f_{\sigma} - f_p)^3 g_{\sigma\sigma}}, \quad \partial_p \rho_q = -\frac{\epsilon_p}{2} \sum_{\sigma} \frac{f'_{\sigma}{}^2}{(f_{\sigma} - f_q)^2 (f_{\sigma} - f_p) g_{\sigma\sigma}}, \end{aligned}$$

где $p \neq q$, $\epsilon_2 = \epsilon$, $\epsilon_4 = \tilde{\epsilon}$, вместе с (10) приводят к тождествам

$$\chi_p = \rho_{\sigma p} = \rho_{24} = \rho_p = \text{const.}$$

Используя эти результаты вместе с условиями $\epsilon = \tilde{\epsilon} = 0$, можно показать, что компоненты тензора кривизны (5) удовлетворяют условиям (2) с $K = \rho_p = \text{const.}$

3. H -ПРОСТРАНСТВО ТИПА [321]

Метрика h -пространства типа [321] может быть записана в виде

$$\begin{aligned} g_{ij} dx^i dx^j = & e_3(f_5 - \epsilon x^3)^2(f_6 - \epsilon x^3)\{(dx^2)^2 + 4A dx^1 dx^3 + \\ & + 2(\epsilon x^1 - 2A\Sigma_1) dx^2 dx^3 + ((\epsilon x^1)^2 - 4\epsilon x^1 A\Sigma_1 + 4A^2\Sigma_3)(dx^3)^2\} + \\ & + e_5(\epsilon x^3 - f_5)^3(f_6 - f_5)\{2\tilde{A} dx^4 dx^5 - \Sigma_4 \tilde{A}^2(dx^5)^2\} + \\ & + e_6(f_5 - f_6)^2(f_5 - f_6)^3(dx^6)^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \epsilon x^2 + \theta(x^3), & \tilde{A} &= \tilde{\epsilon} x^4 + \omega(x^5); \\ \Sigma_1 &= (f_6 - \epsilon x^3)^{-1} + 2(f_5 - \epsilon x^3)^{-1}, & \Sigma_2 &= (f_6 - \epsilon x^3)^{-2} + 2(f_5 - \epsilon x^3)^{-2}, \\ 2\Sigma_3 &= (\Sigma_1)^2 - \Sigma_2, & \Sigma_4 &= 3(\epsilon x^3 - f_5)^{-1} + (f_6 - f_5)^{-1}; \end{aligned} \quad (12)$$

$f_1 = f_2 = f_3 = \epsilon x^3$, $f_4 = f_5 = \tilde{\epsilon} x^5 + a$, f_6 – произвольная функция переменной x^6 ; $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, причем $\epsilon \neq 0$, если $\tilde{\epsilon} = 0$ и, наоборот, $\tilde{\epsilon} \neq 0$, если $\epsilon = 0$; a – константа, не равная нулю, если $\tilde{\epsilon} = 0$; $e_3, e_5, e_6 = \pm 1$.

Из (2) находим, что $R_{123}^2 = R_{1r3}^r$, $r = 5, 6$. Подставляя в это равенство соответствующие компоненты тензора кривизны нашего h -пространства, $R_{123}^2 = \chi_3 g_{13}$, $R_{153}^5 = \rho_{53} g_{13}$, $R_{163}^6 = \rho_{63} g_{13}$, где

$$\chi_3 = \frac{3\epsilon^2}{16A^2 g_{22}} + \rho_3, \quad (13)$$

а функции ρ_3 , ρ_{53} и ρ_{63} определены формулами (7) с $p, q = 3, 5$ и $\sigma = 5, 6$, мы получаем, что $(\chi_3 - \rho_{r3})g_{13} = 0$. Поскольку $g_{13} \neq 0$, имеем

$$\chi_3 - \rho_{r3} = \frac{3\epsilon^2}{16A^2 g_{22}} + \rho_3 - \rho_{r3} = 0.$$

Дифференцируя последнее равенство по x^2 , мы находим, что $\epsilon = 0$ и, следовательно, $\rho_3 - \rho_{r3} = 0$. Обратно, если $\rho_3 - \rho_{r3} = \epsilon = 0$, то $\chi_3 - \rho_{r3} = 0$. Так как $f_3 \neq f_5$, из $\rho_3 - \rho_{53} = 0$ следует, что $f'_6 = 0$. Подставляя $\epsilon = 0$ в соотношение

$$R_{123}^1 = \gamma g_{13} + \frac{3\epsilon^2}{8A} \Sigma_1 + \frac{3\epsilon}{4A^2} (\theta' - \epsilon^2 x^1) = 0,$$

где равенство $R_{123}^1 = 0$ вытекает из (2), получаем

$$\gamma = -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_p)^3 g_{\sigma\sigma}} = 0.$$

Из (2) также следует, что $R_{445}^4 = R_{4s5}^s$, $s = 3, 6$, поэтому $(\chi_5 - \rho_{s5})g_{45} = 0$, ибо для нашего h -пространства $R_{445}^4 = \chi_5 g_{45}$, $R_{435}^3 = \rho_{53} g_{45}$, $R_{465}^6 = \rho_{65} g_{45}$, где

$$\chi_5 = \frac{\tilde{\epsilon} \theta'}{\tilde{A}^2 g_{45}} + \rho_5. \quad (14)$$

Так как $g_{45} \neq 0$, мы получаем, что $\chi_5 - \rho_{s5} = 0$. Подобным образом можно доказать, что это условие эквивалентно условиям $f'_6 = \tilde{\epsilon} = 0$.

Докажем, что необходимые условия постоянной кривизны h -пространства типа [321],

$$\chi_p - \rho_{6p} = \chi_p - \rho_{35} = \gamma = 0, \quad p = 3, 5, \quad (15)$$

или условия $f'_6 = \epsilon = \tilde{\epsilon} = 0$ являются достаточными. Заметим, что из (15) и (7) (при $p, q = 3, 5, \sigma = 6$), а также равенств (13) и (14) следует, что $\chi_p = \rho_p = \rho_{6p} = \rho_{35} = 0$. Вычисляя другие компоненты тензора кривизны нашего h -пространства и подставляя их в последние равенства, мы получаем h -пространство постоянной кривизны.

4. H -ПРОСТРАНСТВО ТИПА [33]

Метрика h -пространства типа [33] определяется формулами

$$\begin{aligned} g_{ij} dx^i dx^j = & e_3(f_6 - f_3)^3 \{ (dx^2)^2 + 4A dx^1 dx^3 + \\ & + 2(\epsilon x^1 - 2A\Sigma_1) dx^2 dx^3 + ((\epsilon x^1)^2 - 4\epsilon x^1 A\Sigma_1 + 4A^2\Sigma_2)(dx^3)^2 \} + \\ & + e_6(f_3 - f_6)^3 \{ (dx^5)^2 + 4\tilde{A} dx^4 dx^6 + 2(\tilde{\epsilon} x^4 + 2\tilde{A}\Sigma_1) dx^5 dx^6 + \\ & + ((\tilde{\epsilon} x^4)^2 + 4\tilde{\epsilon} x^4 \tilde{A}\Sigma_1 + 4\tilde{A}^2\Sigma_2)(dx^6)^2 \}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} A = \epsilon x^2 + \theta(x^3), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^4 + \omega(x^6); \\ \Sigma_1 = 3(f_6 - f_3)^{-1}, \quad \Sigma_2 = 3(f_6 - f_3)^{-2}; \end{aligned} \quad (17)$$

$f_3 = \epsilon x^3$, $f_6 = \tilde{\epsilon} x^6 + a$; $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$; a, c – константы, $a \neq 0$, если $\tilde{\epsilon} = 0$; $i_1, j_1 = 1, 2, 3$, $i_2, j_2 = 4, 5, 6$; $e_i = \pm 1$; $\theta(x^3)$ и $\omega(x^6)$ – произвольные функции, отличные от нуля, когда $\epsilon = 0$ и $\tilde{\epsilon} = 0$ соответственно.

Ненулевые компоненты $R_{\nu b_p \mu}^{a_p}$, $b_p \neq \mu$, $a_p < b_p$, $R_{5a_1 6}^{a_1}$, $R_{6a_1 5}^{a_1}$, $R_{6a_1 6}^{a_1}$, $R_{2a_2 3}^{a_2}$, $R_{3a_2 2}^{a_2}$, $R_{3a_2 3}^{a_2}$ тензора кривизны (здесь $p = 1, 2$; $a_1, b_1 = 1, 2, 3$, $a_2, b_2 = 4, 5, 6$; ν, μ – индексы ненулевых компонент метрики $g_{\nu\mu}$ (16)) пропорциональны ϵ или $\tilde{\epsilon}$. В частности,

$$R_{123}^2 = \frac{3\epsilon^2}{8A}, \quad R_{456}^5 = \frac{3\tilde{\epsilon}^2}{8\tilde{A}}.$$

Равенства $R_{123}^2 = R_{163}^6$ и $R_{456}^5 = R_{436}^3$, которые получаются из (2), приводят к соотношению $\epsilon = \tilde{\epsilon} = 0$. Очевидно, когда $\epsilon = \tilde{\epsilon} = 0$, все компоненты тензора кривизны h -пространства, которое мы рассматриваем, равны нулю.

5. H -ПРОСТРАНСТВО ТИПА [411]

Метрика h -пространства типа [411] следующая:

$$\begin{aligned} g_{ij} dx^i dx^j = & e_4 \Pi_\sigma (f_\sigma - \epsilon x^4) \left\{ 6A dx^1 dx^4 + 2dx^2 dx^3 + \right. \\ & \left. + 2(2\epsilon x^2 - 3A\Sigma_1) dx^2 dx^4 - \Sigma_1 (dx^3)^2 + 2(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2 \Sigma_1) dx^3 dx^4 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \left((\epsilon x^2)^2 \Sigma_1 + \epsilon^2 x^1 x^2 - \frac{3}{2} \epsilon x^1 A \Sigma_1 \right) (dx^4)^2 \Big\} + 3A dx^3 dx^4 + \\
& + 12\epsilon x^2 A (dx^4)^2 + \sum_{\sigma} e_{\sigma} \Pi'_i (f_i - f_{\sigma}) (dx^{\sigma})^2,
\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$A = \epsilon x^3 + \theta(x^4); \quad \Sigma_1 = (f_5 - \epsilon x^4)^{-1} + (f_6 - \epsilon x^4)^{-1}; \tag{19}$$

$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \epsilon x^4$, f_5 – функция переменной x^5 , f_6 – функция переменной x^6 ; $e_4, e_5, e_6 = \pm 1$; $\epsilon = 0, 1$. В этом случае ненулевые компоненты тензора кривизны таковы: $R^i_{\nu i \mu}$, $i \neq \mu$ и $R^{a_1}_{\nu b_1 \mu}$, $b_1 \neq \mu$, $a_1 < b_1$. Здесь $i = 1, \dots, 6$; $a_1, b_1 = 1, \dots, 4$; ν, μ – индексы ненулевых компонент метрики $g_{\nu \mu}$ (18).

Формула (2) дает

$$R^1_{114} = R^{\sigma}_{1\sigma 4}, \quad R^1_{214} = R^{\sigma}_{2\sigma 4}, \quad R^1_{224} = 0. \tag{20}$$

Для h -пространства типа [411]

$$\begin{aligned}
R^1_{114} &= \rho_4 g_{14}, & R^1_{214} &= \rho_4 g_{24}, & R^{\sigma}_{1\sigma 4} &= \rho_{\sigma 4} g_{14}, & R^{\sigma}_{2\sigma 4} &= \rho_{\sigma 4} g_{24}, \\
R^1_{224} &= \gamma_1 g_{24} + \gamma_2 g_{14} + \frac{2\epsilon}{3A^2} \left(\theta' - \frac{4}{3} \epsilon^2 x^2 \right),
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_4)^3 g_{\sigma\sigma}}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_4)^4 g_{\sigma\sigma}}, \tag{21}$$

ρ_4 и $\rho_{\sigma 4}$ определяются (7), когда $p = 4$, $\sigma = 5, 6$. Таким образом, из первых двух равенств в (20) следует, что

$$\rho_4 - \rho_{\sigma 4} = 0, \quad \gamma_1 g_{14} + \frac{2\epsilon^2}{3A} = 0.$$

Дифференцируя последнее равенство по x^1 , мы получаем $\epsilon = 0$ и, следовательно, $\gamma_1 = 0$. Далее из последнего равенства в (20) вытекает $\gamma_2 = 0$.

Докажем, что необходимые условия постоянной кривизны h -пространства типа [411],

$$\rho_4 - \rho_{\sigma 4} = \epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \tag{22}$$

являются достаточными. Верны следующие соотношения:

$$\partial_1 \rho_4 = \partial_2 \rho_4 = \partial_3 \rho_4 = 0, \quad \partial_4 \rho_4 = 6\epsilon \gamma_1, \quad \partial_{\sigma} \rho_4 = -f'_{\sigma} \frac{\rho_4 - \rho_{\sigma 4}}{f_{\sigma} - f_4}.$$

Отсюда, учитывая (22), мы получаем $\rho_4 = \rho_{\sigma 4} = \text{const}$. Используя последнее равенство и условия $\epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, мы можем доказать, что тензор кривизны нашего пространства удовлетворяет тождествам (2) с $K = \rho_4 = \text{const}$.

6. H -ПРОСТРАНСТВО ТИПА [51]

Метрика h -пространства типа [51] определена формулами

$$\begin{aligned} g_{ij}dx^i dx^j = e(f_6 - \epsilon x^5) \Big\{ & 8Adx^1 dx^5 + 2dx^2 dx^4 + \\ & + 2(3\epsilon x^3 - 4A\Sigma_1)dx^2 dx^5 + (dx^3)^2 - 2\Sigma_1 dx^3 dx^4 + \\ & + 2(2\epsilon x^2 - 3\epsilon x^3 \Sigma_1)dx^3 dx^5 + 2(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2 \Sigma_1)dx^4 dx^5 + \\ & + 4\left(\frac{3}{2}\epsilon x^1 \epsilon x^3 + (\epsilon x^2)^2 - 2\epsilon x^1 A\Sigma_1 - 3\epsilon x^2 \epsilon x^3 \Sigma_1\right)(dx^5)^2 \Big\} + \\ & + e_6(\epsilon x^5 - f_6)^5(dx^6)^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$A = \epsilon x^4 + \theta; \quad \Sigma_1 = (f_6 - \epsilon x^5)^{-1}; \quad (24)$$

θ – функция переменной x^5 ; $f_5 = \epsilon x^5$, f_6 – функция переменной x^6 ; $e_5, e_6 = \pm 1$, $\epsilon = 0, 1$. Ненулевые компоненты тензора кривизны суть $R_{\nu i \mu}^i$, $i \neq \mu$ и $R_{\nu b_1 \mu}^{a_1}$, $b_1 \neq \mu$, $a_1 < b_1$, где $i = 1, \dots, 6$; $a_1, b_1 = 1, \dots, 5$; ν, μ – индексы ненулевых компонент метрики $g_{\nu\mu}$ (23). Как и в предыдущих случаях, можно доказать, что необходимое и достаточное условие постоянной кривизны h -пространства типа [51] определяется соотношениями $f'_6 = \epsilon = 0$.

Таким образом, мы приходим к теореме.

ТЕОРЕМА. *Шестимерные жесткие h -пространства V^6 типов [2211], [321], [33], [411] и [51] имеют постоянную кривизну тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

для h -пространства типа [2211]

$$\rho_p - \rho_{\sigma p} = \rho_p - \rho_{pq} = \epsilon = \tilde{\epsilon} = 0, \quad p, q = 2, 4, \quad p \neq q, \quad \sigma = 5, 6, \quad (25)$$

для h -пространства типа [321]

$$f'_6 = \epsilon = \tilde{\epsilon} = 0, \quad (26)$$

для h -пространства типа [33]

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} = 0, \quad (27)$$

для h -пространства типа [411]

$$\rho_4 - \rho_{\sigma 4} = \epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \sigma = 5, 6, \quad (28)$$

для h -пространства типа [51]

$$f'_6 = \epsilon = 0, \quad (29)$$

где ρ_p , $\rho_{\sigma p}$, ρ_{pq} , γ_1 и γ_2 определяются формулами (7), (21).

Благодарности. Автор благодарен А. В. Аминовой за постоянную поддержку и обсуждения. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 07-02-00878) и ИНТАС (грант № 05-1000008-7865).

Список литературы

- [1] А. В. Аминова, *УМН*, **50**:1(301) (1995), 69–142.
- [2] A. D. Sakharov, *ЖЭТФ*, **87** (1984), 375–383.
- [3] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, *УФН*, **146**:4 (1985), 655–681.
- [4] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, Б. Драгович, *ТМФ*, **70**:3 (1987), 422–431.
- [5] Л. П. Эйзенхард, *Риманова геометрия*, ИЛ, М., 1948.
- [6] А. З. Петров, Учен. зап. Казан. гос. ун-та, **109**, № 4, 1949, 7–36.
- [7] З. Закирова, *Проективно-групповые свойства 6-мерных теорий типа Калуцы–Клейна*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, Казан. гос. ун-т, Казань, 2001.
- [8] Z. Zakirova, “First integral of the geodesics equations in 6d h -spaces”, *Proc. Geometry Seminar* (Kazan, 1996), № 23, 1997, 57–64.
- [9] Z. Zakirova, “6-dimensional h -spaces of the special type”, *Lobachevskiy Int. Geom. Seminar, Abstracts* (Kazan, 1997), 52.
- [10] Z. Zakirova, “On one solution of the Eisenhart equation”, *Latest Problems of the Field Theory*, ed. A. V. Aminova, Kazan Gos. Univ., Kazan, 2000, 104–109.
- [11] З. Х. Закирова, *Изв. вузов. Матем.*, **9** (1999), 78–79.
- [12] Z. Zakirova, *On projective group properties of the 6d h -space of the type [33]*, [arXiv: math/0101052](https://arxiv.org/abs/math/0101052).

Поступила в редакцию 16.11.2007,
после доработки 10.04.08