Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Смирнов, Интегрируемые $sl(N, \mathbb{C})$ -волчки как системы Калоджеро–Мозера, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 3, 355–369

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 08:02:39

© 2009 г.

А. В. Смирнов*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ $sl(N, \mathbb{C})$ -ВОЛЧКИ КАК СИСТЕМЫ КАЛОДЖЕРО–МОЗЕРА

Продemonстрирована связь между системами интегрируемых волчков на алгебрах $sl(N, \mathbb{C})$ и системами Калоджеро–Мозера для N частиц. Построены классические операторы Лакса, соответствующие данным системам. Показано, что эти операторы связаны с некоторыми новыми тригонометрическими и рациональными решениями уравнения Янга–Бакстера для алгебр $sl(N, \mathbb{C})$. Приведены явные формулы для $N = 2, 3$.

Ключевые слова: интегрируемые системы, волчки Эйлера–Арнольда, уравнение Янга–Бакстера.

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе [1] была продемонстрирована эквивалентность интегрируемых систем двух тел типа Калоджеро–Мозера (КМ) и систем $sl(2, \mathbb{C})$ -волчков Эйлера–Арнольда [2] и показано, что множество квадратичных гамильтонианов $sl(2, \mathbb{C})$ -волчков относительно действия группы автоморфизмов на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$ естественным образом разбиваются на три класса. Гамильтоновы системы, соответствующие этим гамильтонианам, были названы XYZ -, XXZ' -, XXX' -волчками. При этом на фазовом пространстве данных волчков могут быть выбраны канонические координаты, в которых их гамильтонова динамика совпадает с динамикой эллиптической, тригонометрической или рациональной системы КМ для двух частиц. В настоящей работе мы обобщаем эти результаты на случай произвольного ранга. Мы показываем, что интегрируемые волчки на алгебре $sl(N, \mathbb{C})$ эквивалентны N -частичным системам КМ. Мы получаем для данных интегрируемых систем волчков их представление в виде операторов Лакса, при этом оказывается, что операторы Лакса в тригонометрическом и рациональном случаях не совпадают со стандартными тригонометрическими и рациональными вырождениями эллиптического L -оператора Бакстера. Таким образом, полученные операторы являются некоторыми новыми нетривиальными решениями классического уравнения Янга–Бакстера.

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: asmirnov@itep.ru

В приложение к настоящей статье вынесены явные вычисления для тригонометрических и рациональных операторов Лакса, соответствующие случаям $N = 2, 3$. Там же мы приводим примеры гамильтонианов и высших интегралов движения для этих случаев, а также проверяем, что они коммутируют относительно канонической скобки Пуассона на алгебрах $sl(N, \mathbb{C})$. Случай $N = 4$ рассмотрен в работе [3].

2. ОСНОВНОЙ ПРИМЕР – СЛУЧАЙ РАНГА 1

Для большей ясности изложения в данном разделе на примере $sl(2, \mathbb{C})$ -систем мы подробно приводим основные вычисления, которые в следующих разделах мы проводим в общем случае. На примере ранга 1 мотивируется введение сингулярных калибровочных преобразований, которые необходимы для вычисления тригонометрического и рационального операторов Лакса.

Оператор Лакса для эллиптического $sl(2, \mathbb{C})$ -волчка $L^{\text{ET}}(z)$ строится исходя из уравнения на линейные скобки Пуассона:

$$\{L^{\text{ET}}(z) \otimes 1, 1 \otimes L^{\text{ET}}(z)\} = [r, 1 \otimes L^{\text{ET}}(z) + L^{\text{ET}}(z) \otimes 1], \quad (1)$$

где r – эллиптическая классическая r -матрица Бакстера для алгебры $sl(2, \mathbb{C})$. Явный вид эллиптического оператора Лакса

$$L^{\text{ET}}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{\theta'_{11}(0)\theta_{11}(z - \frac{1}{2})}{\theta_{11}(z)\theta_{11}(-\frac{1}{2})} S_3 & \frac{\theta'_{11}(0)e^{-\pi iz}}{\theta_{11}(z)} \left(\frac{\theta_{11}(z - \frac{\tau}{2})}{\theta_{11}(-\frac{\tau}{2})} S_1 + \frac{\theta_{11}(z - \frac{1+\tau}{2})}{\theta_{11}(-\frac{1+\tau}{2})} S_2 \right) \\ \frac{\theta'_{11}(0)e^{-\pi iz}}{\theta_{11}(z)} \left(\frac{\theta_{11}(z - \frac{\tau}{2})}{\theta_{11}(-\frac{\tau}{2})} S_1 - \frac{\theta_{11}(z - \frac{1+\tau}{2})}{\theta_{11}(-\frac{1+\tau}{2})} S_2 \right) & \frac{\theta'_{11}(0)\theta_{11}(z - \frac{1}{2})}{\theta_{11}(z)\theta_{11}(-\frac{1}{2})} S_3 \end{pmatrix},$$

где $\theta_{km}(z)$ – стандартные тета-функции с модулярным параметром τ :

$$\theta_{km}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left(2\pi i \left(\left(n + \frac{k}{2} \right)^2 \frac{\tau}{2} + \left(z + \frac{m}{2} \right) \left(n + \frac{k}{2} \right) \right) \right). \quad (2)$$

Уравнение (1) фиксирует скобку Пуассона на динамических переменных волчка S_i :

$$\{S_i, S_j\} = 2i\epsilon_{ijk}S_k.$$

В дальнейшем нам будет удобнее работать с динамическими переменными, которые связаны с базисом Шевалле алгебры $sl(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} S_2 &= i(S^+ - S^-), & S_1 &= S^+ + S^-, & \{S_3, S^+\} &= 2S^+, \\ \{S_3, S^-\} &= -2S^-, & \{S^+, S^-\} &= S_3. \end{aligned}$$

В работе [4] в рамках подхода Хитчина [5] к интегрируемым системам было получено соответствие между эллиптическим $sl(2, \mathbb{C})$ -волчком и эллиптической системой КМ. Операторы Лакса этих систем связаны следующим образом:

$$L^{\text{ET}}(z) = \Xi(z)L^{\text{ECM}}(z)\Xi^{-1}(z). \quad (3)$$

Здесь матрица $\Xi(z)$ зависит как от спектрального параметра z , так и от относительной координаты $u = u_1 - u_2$ системы КМ в системе центра масс и имеет особенность в точке $z = 0$ [4]:

$$\Xi(z) = \Xi(z, u) = \begin{pmatrix} \theta_{00}(z - 2u, 2\tau) & -\theta_{00}(z + 2u, 2\tau) \\ -\theta_{10}(z - 2u, 2\tau) & \theta_{10}(z + 2u, 2\tau) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Эллиптический оператор Лакса для системы КМ имеет вид

$$L^{\text{ECM}} = \begin{pmatrix} v & \nu \frac{\theta_{11}(z+u)\theta'_{11}(0)}{\theta_{11}(u)\theta_{11}(z)} \\ \nu \frac{\theta_{11}(z-u)\theta'_{11}(0)}{\theta_{11}(-u)\theta_{11}(z)} & -v \end{pmatrix},$$

где v – относительный импульс двух частиц, а параметр ν играет роль константы взаимодействия. Из уравнения (3) мы получаем следующие формулы бозонизации:

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{\theta_{10}(0)\theta_{10}(2u)}{\theta'_{11}(0)\theta_{11}(2u)}v + \frac{\theta_{10}^2(0)\theta_{00}(2u)\theta_{01}(2u)}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)\theta_{11}^2(2u)}\nu, \\ S_2 &= \frac{\theta_{00}(0)\theta_{00}(2u)}{i\theta'_{11}(0)\theta_{11}(2u)}v - \frac{\theta_{00}^2(0)\theta_{10}(2u)\theta_{01}(2u)}{i\theta_{10}(0)\theta_{01}(0)\theta_{11}^2(2u)}\nu, \\ S_3 &= -\frac{\theta_{01}(0)\theta_{01}(2u)}{\theta'_{11}(0)\theta_{11}(2u)}v + \frac{\theta_{01}^2(0)\theta_{00}(2u)\theta_{10}(2u)}{\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)\theta_{11}^2(2u)}\nu. \end{aligned} \quad (5)$$

Наша ближайшая цель – получить тригонометрический и рациональный аналоги приведенных соотношений. Переход к вырожденным случаям является, однако, нетривиальным. Например, если попытаться получить тригонометрический предел формул (5), устремляя модулярный параметр к мнимой бесконечности, $\tau \rightarrow i\infty$, то мы получим расходящиеся выражения [1]. Данное явление объясняется тем, что, несмотря на то что матричные элементы операторов Лакса $L^{\text{ET}}(z)$ и $L^{\text{ECM}}(z)$ в этом пределе конечны, после сопряжения матрицей $\Xi(z)$ мы можем получить сингулярные пределы, поскольку матрица $\Xi(z)$ сингулярна в этом пределе. Данную трудность можно обойти следующим образом: произведем над уравнением (3) калибровочное преобразование:

$$A^T(q)L^{\text{ET}}(z)(A^T(q))^{-1} = A^T(q)\Xi(z)L^{\text{ECM}}(z)\Xi^{-1}(z)(A^T(q))^{-1}, \quad (6)$$

где матрица $A^T(q)$ – это скалярная матрица калибровочного преобразования, зависящая от модулярного параметра $q = e^{2\pi i\tau}$:

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} q^{1/8} & 0 \\ 0 & q^{-1/8} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

При этом необходимо помнить, что калибровочное преобразование действует так же во “внутреннем пространстве” оператора Лакса, т.е. наряду с сопряжением матрицей $A^T(q)$ мы должны произвести переход к новым динамическим переменным по формулам

$$\begin{pmatrix} S_3 & 2S^+ \\ 2S^- & -S_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q^{1/8} & 0 \\ 0 & q^{-1/8} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_3 & 2S^+ \\ 2S^- & -S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{1/8} & 0 \\ 0 & q^{-1/8} \end{pmatrix},$$

или более явно

$$S_3 \rightarrow S_3, \quad S^+ \rightarrow q^{-1/4} S^+, \quad S^- \rightarrow q^{1/4} S^-.$$

После этого преобразования в уравнении (6) можно перейти к пределу $q = 0$, все пределы при этом становятся конечными, и мы получаем следующие тригонометрические формулы бозонизации:

$$\begin{aligned} S_3 &= -\frac{v}{u \operatorname{tg}(2\pi u)} - \frac{\nu}{\sin^2(2\pi u)}, \\ S^+ &= -\frac{v}{4\pi \sin(2\pi u)} - \frac{\nu \cos(2\pi u)}{4 \sin^2(2\pi u)}, \\ S^- &= \frac{v \cos^2(2\pi u)}{\pi \sin(2\pi u)} + \frac{\nu \cos(2\pi u)(1 + \sin^2(2\pi u))}{\sin^2(2\pi u)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для канонической скобки $\{v, u\} = 1$ имеем

$$\{S_3, S^+\} = 2S^+, \quad \{S_3, S^-\} = -2S^-, \quad \{S^+, S^-\} = S_3.$$

Функция Казимира имеет вид

$$\Omega = S_3^2 + 4S^+ S^- = \nu^2.$$

Более важно, что эти уравнения можно переписать в виде тригонометрической версии уравнения (3):

$$L^{\text{TT}}(z) = \Xi^T(z) L^{\text{TCM}}(z) (\Xi^T(z))^{-1}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} L^{\text{TT}}(z) &= \lim_{q \rightarrow 0} A^T(q) L^{\text{ET}}(z) (A^T(q))^{-1}, \quad \Xi^T(z) = q^{1/8} \lim_{q \rightarrow 0} A^T(q) \Xi^{\text{E}}(z), \\ L^{\text{TCM}}(z) &= \lim_{q \rightarrow 0} L^{\text{ECM}}(z). \end{aligned}$$

Вычисляя соответствующие пределы, находим

$$\begin{aligned} L^{\text{TCM}}(z) &= \begin{bmatrix} v & \nu \pi (\operatorname{ctg}(2\pi u) + \operatorname{ctg}(\pi z)) \\ \nu \pi (-\operatorname{ctg}(2\pi u) + \operatorname{ctg}(\pi z)) & -v \end{bmatrix}, \\ \Xi^T(z) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 \cos(\pi(z - 2u)) & 2 \cos(\pi(z + 2u)) \end{pmatrix}, \\ L^{\text{TT}}(z) &= \begin{bmatrix} \pi \operatorname{ctg}(\pi z) S_3 & \frac{2\pi S^+}{\sin(\pi z)} \\ \frac{2\pi S^-}{\sin(\pi z)} + 8\pi S^+ \sin(\pi z) & -\pi \operatorname{ctg}(\pi z) S_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Полученный тригонометрический оператор Лакса (10), как легко видеть, не совпадает со стандартным вырождением L -оператора Дринфельда–Белавина, а представляет собой некоторый новый тригонометрический оператор Лакса для алгебры $sl(2, \mathbb{C})$. Следует заметить, что определитель матрицы $A^T(q)$ равен единице для любого значения параметра q , т.е. для любого q она принадлежит калибровочной группе $SL(2)$. В точке $q = 0$ данная матрица является сингулярной, именно по этой причине мы получаем новый тригонометрический оператор Лакса, калибровочно-неэквивалентный стандартному вырождению [1], [6], [7]. Данный оператор Лакса определяет на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$ некоторую новую гамильтонову систему, ее гамильтониан определяется свободным членом в разложении $\text{tr}(L^{\text{TT}}(z))^2$ по спектральному параметру z :

$$\text{tr}(L^{\text{TT}}(z))^2 = 2\pi^2(S_3^2 - 16S^{+2}) - \frac{2\pi^2\Omega}{\sin^2(\pi z)}.$$

Таким образом, гамильтониан соответствующего волчка имеет вид

$$H^T = \frac{1}{4\pi i} \oint \frac{\text{tr}(L^{\text{TT}}(z))^2}{z} dz = \pi^2(S_3^2 - 16S^{+2}). \quad (11)$$

С учетом формул (8) получаем, что этот гамильтониан эквивалентен гамильтониану тригонометрической системы КМ

$$H^T = \pi^2(S_3^2 - 16S^{+2}) = v^2 - \frac{\pi^2\nu^2}{\sin^2(2\pi u)}.$$

Для дальнейшего вырождения к рациональному случаю нужно произвести замену константы π в формулах (8) на некоторую переменную x , после чего перейти к пределу $x = 0$. И снова мы видим, что выражения получаются расходящимися. Для получения конечных выражений мы вновь применяем к уравнению (9) калибровочное преобразование, зависящее от x :

$$A^R(x)L^{\text{TT}}(z)(A^R(x))^{-1} = A^R(x)\Xi^T(z)L^{\text{TCM}}(z)(\Xi^T(z))^{-1}(A^R(x))^{-1}, \quad (12)$$

где матрица $A^R(x)$ имеет следующий вид:

$$A^R(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 2/x & 1/x \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Калибровочное преобразование во внутреннем пространстве соответствует переходу к новым переменным:

$$\begin{pmatrix} S_3 & 2S^+ \\ 2S^- & -S_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 2/x & 1/x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_3 & 2S^+ \\ 2S^- & -S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 2/x & 1/x \end{pmatrix},$$

т.е. мы должны произвести замену

$$S_3 \rightarrow S_3 + \frac{4S^+}{x^2}, \quad S^+ \rightarrow \frac{S^+}{x^2}, \quad S^- \rightarrow S^-x^2 - 2S_3 - \frac{4S^+}{x^2}.$$

Теперь если в обеих частях уравнения (12) устремить x к нулю, то все пределы становятся конечными, и мы получаем следующие рациональные формулы бозонизации:

$$\begin{aligned} S_3 &= uv - \frac{\nu}{2}, \\ S^+ &= \frac{v}{2u} + \frac{\nu}{4u^2}, \\ S^- &= -\frac{u^3v}{2} + \frac{3\nu u^2}{4}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для канонической скобки $\{v, u\} = 1$ вновь получаем

$$\{S_3, S^+\} = 2S^+, \quad \{S_3, S^-\} = -2S^-, \quad \{S^+, S^-\} = S_3, \quad \Omega = S_3^2 + 4S^+S^- = \nu^2.$$

Данные выражения можно переписать в виде рациональной версии уравнения (3):

$$L^{\text{RT}}(z) = \Xi^{\text{R}}(z) L^{\text{RCM}}(z) (\Xi^{\text{R}}(z))^{-1}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} L^{\text{RCM}}(z) &= \begin{pmatrix} v & \nu\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2u}\right) \\ \nu\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2u}\right) & -v \end{pmatrix}, \\ \Xi^{\text{R}}(z) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -zu + u^2 & -zu - u^2 \end{pmatrix}, \quad L^{\text{RT}}(z) = \begin{pmatrix} \frac{S_3}{z} & \frac{2S^+}{z} \\ \frac{2S^-}{z} + zS_3 & -\frac{S_3}{z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

И вновь мы получаем интересный результат: рациональный оператор (16) является некоторым обобщением стандартного рационального оператора Лакса для алгебры $sl(2, \mathbb{C})$. Это явление связано с тем, что, как и в тригонометрическом случае, матрица калибровочного преобразования $A^{\text{R}}(x)$ является сингулярной в точке $x = 0$. Гамильтониан системы отождествляется со свободным членом в разложении:

$$\text{tr}(L^{\text{RT}}(z))^2 = -4S^+S_3 + \frac{2\Omega}{z^2} \Rightarrow H^{\text{R}} = 2S^+S_3.$$

Подставляя сюда формулы бозонизации (14), находим, что данный гамильтониан эквивалентен гамильтониану рациональной системы КМ:

$$H^{\text{R}} = 2S^+S_3 = v^2 - \frac{\nu^2}{4u^2}. \quad (17)$$

Подведем кратко итоги данного раздела. На примере $sl(2, \mathbb{C})$ -систем мы показали, что существуют некоторые новые тригонометрические и рациональные операторы Лакса (10), (16) для данной алгебры, не совпадающие со стандартными вырождениями классического L -оператора Дринфельда–Белавина. Динамические системы, которые порождают эти операторы, эквивалентны соответствующим системам КМ. Для получения правильных вырождений необходимо перед переходом

к соответствующим тригонометрическому и рациональному пределам совершить над оператором Лакса дополнительные калибровочные преобразования, матрица которых сингулярна в предельных точках (7), (13). Данная процедура, очевидно, без изменений переносится на случай произвольного ранга. Основная сложность при этом заключается в нахождении матриц дополнительного преобразования для $A^T(q)$ и $A^R(x)$ для алгебры $sl(2, \mathbb{C})$. Далее мы получаем данные матрицы и описываем соответствующие пределы.

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ $SL(N, \mathbb{C})$ -ВОЛЧОК

Начнем с описания эллиптического $sl(N, \mathbb{C})$ -волчка. Эта интегрируемая система определяется при помощи классического L -оператора Дринфельда–Белавина

$$L^{\text{ET}} = \sum_{n+m \neq 0}^{N-1} S_{mn} \varphi_{m,n}(z) E_{mn}, \quad (18)$$

где функции $\varphi_{m,n}(z)$ определяются через стандартные тета-функции с рациональными характеристиками (2):

$$\varphi_{m,n}(z) = e^{-2\pi i n z / N} \phi\left(-\frac{m+n\tau}{N}, z\right), \quad \phi(u, z) = \frac{\theta_{11}(u+z)\theta'_{11}(0)}{\theta_{11}(u)\theta_{11}(z)}. \quad (19)$$

Здесь S_{mn} являются динамическими переменными волчка, а $E_{mn} - (N \times N)$ -матрицы генераторов алгебры $sl(N, \mathbb{C})$ в фундаментальном представлении. Генераторы E_{mn} соответствуют так называемому базису синус-алгебры и строятся следующим образом:

$$E_{mn} = e^{\pi i m n / N} Q^m \Lambda^n, \quad m = 0, \dots, N-1, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad n+m \neq 0,$$

$$Q = \text{diag}[e^{2\pi i / N}, e^{4\pi i / N}, \dots, e^{2m\pi i / N}, \dots, 1], \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что данные операторы образуют базис в алгебре $sl(N, \mathbb{C})$, при этом они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[E_{sk}, E_{nj}] = 2i \sin\left(\frac{\pi}{N}(kn - sj)\right) E_{|s+n||k+j|}, \quad \text{Tr}(E_{sk} E_{nj}) = \delta_{s,-n} \delta_{k,-j} N. \quad (20)$$

Динамика эллиптического волчка определяется уравнением Лакса и вспомогательной эллиптической матрицей $M^E(z)$:

$$\partial_t L^E(z) = [M^E(z), L^E(z)], \quad M^E(z) = \sum_{n+m \neq 0}^{N-1} e^{-nz/N} f\left(\frac{-m+n\tau}{N}, z\right) S_{mn},$$

$$f(u, z) = \partial_u \phi(u, z).$$

Из уравнения Лакса можно получить явные уравнения движения:

$$\partial_t S_{mn} = \frac{N}{\pi} \sum_{k,l} S_{kl} S_{m-kn-l} \wp \left(\frac{m+n\tau}{N}, \tau \right) \sin \left(\frac{\pi}{N} (kn - ml) \right), \quad (21)$$

где $\wp(z, \tau)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса. Квадратичный гамильтониан системы определяется разложением

$$\frac{1}{N} \text{tr}(L^E(z))^2 = -2H^E + \Omega_2 \wp(z, \tau), \quad \Omega_2 = \sum_{n+m \neq 0}^{N-1} S_{nm}^2, \quad (22)$$

где

$$H^E = -\frac{1}{2} \sum_{m+n \neq 0}^{N-1} \wp \left(\frac{m+n\tau}{N}, \tau \right) S_{mn} S_{-m-n}. \quad (23)$$

В работе [4] при помощи методов алгебраической геометрии была продемонстрирована связь между эллиптическим волчком на алгебре $sl(N, \mathbb{C})$ и N -частичной системой КМ. Операторы Лакса двух систем оказываются связаны уравнением

$$L^{ET} = \Xi(z) L^{ECM}(z) (\Xi(z))^{-1}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} L^{ECM}(z) &= v_i \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \nu \phi(u_j - u_i, z), \\ \Xi(z) &= \Xi'(z) \text{diag} \left((-1)^l \left(\prod_{j < k, j, k \neq l} \theta_{11}(u_k - u_j, \tau) \right)^{-1} \right), \\ \Xi'(z)_{ij} &= \theta_{i/N-1/2, N/2}(z - Nu_j, N\tau). \end{aligned}$$

4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ЛАКСА

Тригонометрический предел соответствует переходу $\tau \rightarrow i\infty$. Можно убедиться, что в этом пределе правая часть уравнения (24) расходится, и точно так же, как в случае $sl(2, \mathbb{C})$, нам необходимо произвести некоторое дополнительное калибровочное преобразование с матрицей $A^T(q)$. Для того чтобы найти подходящую матрицу $A(q)$, рассмотрим, как ведут себя матричные элементы матриц $\Xi(z)$ и $\Xi^{-1}(z)$ вблизи точки $q = 0$. Несложное вычисление дает

$$\Xi_{ij} \sim q^{(N/2)(i/N-1/2)^2}, \quad \Xi_{ij}^{-1} \sim q^{-(N/2)(j/N-1/2)^2}, \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

Отсюда легко получаем порядки матричных элементов правой части уравнения (24):

$$R_{ij} = \Xi_{ik}(z) L_{ks}^{CM}(z) \Xi_{sj}^{-1}(z) \sim q^{(N/2)((i^2/N^2 - i/N) - (j^2/N^2 - j/N))}. \quad (25)$$

Предположим теперь, по аналогии с примером ранга 1, что матрица $A(q)$ является диагональной:

$$A(q) = \text{diag}[q^{a_1}, q^{a_2}, \dots, q^{a_N}].$$

Степени a_i при этом необходимо определить из условия, что после калибровочного преобразования в правой части уравнения (24) мы получаем конечные выражения. Применяя калибровочное преобразование к (25), находим

$$[A(q)RA^{-1}(q)]_{ij} \sim q^{a_i - a_j + (N/2)((i^2/N^2 - i/N) - (j^2/N^2 - j/N))}.$$

Таким образом, необходимое условие имеет вид

$$a_j - a_i = \frac{N}{2} \left(\left(\frac{i^2}{N^2} - \frac{i}{N} \right) - \left(\frac{j^2}{N^2} - \frac{j}{N} \right) \right). \quad (26)$$

Второе условие заключается в том, что матрица $A(q)$ принадлежит калибровочной группе для всех значений параметра q (группе $SL(N)$):

$$\det A(q) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^N a_i = 0. \quad (27)$$

Из условий (26) и (27) степени a_i определяются однозначно:

$$a_i = - \left(\frac{N}{2} \left(\frac{i^2}{N^2} - \frac{i}{N} \right) + \frac{N^2 - 1}{12N} \right). \quad (28)$$

Теперь, после того как матрица необходимого калибровочного преобразования найдена, можно найти соответствующий тригонометрический предел оператора Лакса волчка:

$$L^{\text{TT}}(z) = \lim_{q \rightarrow 0} A(q)L^{\text{ET}}(z)A^{-1}(q). \quad (29)$$

При этом точно так же, как в случае ранга 1, подразумевается, что преобразование также действует во внутреннем пространстве оператора Лакса. Вычисление предела (29) является довольно нетривиальным, и его легче провести в базисе алгебры $sl(N, \mathbb{C})$, который индуцируется вложением $sl(N, \mathbb{C}) \hookrightarrow gl(N, \mathbb{C})$. Связь между этим базисом и базисом синус-алгебры определяется следующим образом:

$$S_{nm} = \sum_{|b-a|=n} \exp \left(- \frac{\pi i m (|b-a| + 2|a|)}{N} \right) g_{a,b}, \quad \{g_{i,j}, g_{k,m}\} = \delta_{j,k} g_{i,m} - \delta_{i,m} g_{k,j}.$$

Для того чтобы описать предел (29), который является довольно громоздким, удобно разбить ответ на части. Недиagonalная часть оператора Лакса имеет вид

$$\begin{aligned}
 a < b : \quad L_{a,b}^{\text{TT}} &= \frac{N\pi}{\sin(\pi z)} e^{-(\pi iz/N)(N-2b+2a)} g_{a,b} - \\
 &\quad - 2\pi i N e^{2\pi i(b-a)z/N} \sum_{k=1}^{N-b} g_{a+k,b+k}, \\
 a > b, \quad a \neq N : \quad L_{a,b}^{\text{TT}} &= \frac{N\pi}{\sin(\pi z)} e^{-(\pi iz/N)(-N-2b+2a)} g_{a,b} + \\
 &\quad + 2\pi i N e^{-2\pi i(a-b)z/N} \sum_{k=1}^b g_{a-k,|b-k|}, \\
 a = N : \quad L_{N,b}^{\text{TT}} &= \frac{N\pi}{\sin(\pi z)} e^{-\pi i(N-2b)z/N} g_{N,b} - \\
 &\quad - 2\pi i N e^{2\pi i b z/N} \sum_{k=1}^{N-b} g_{k,b+k} + \\
 &\quad + 2\pi i N e^{2\pi i(b-N)z/N} \sum_{k=0}^{b-1} g_{|N-b+k|,|N+k|},
 \end{aligned} \tag{30}$$

диагональная часть

$$L_{a,a}^{\text{TT}} = \frac{\pi}{2 \sin(\pi z)} [A_a e^{-\pi i z} + B_a e^{\pi i z}], \tag{31}$$

где

$$A_a = \sum_{k=1}^N (N-1-2|k-a|) g_{k,k}, \quad B_a = \sum_{k=1}^N (N-1-2|a-k|) g_{k,k}, \tag{32}$$

$|a|$ означает число a , взятое по модулю N . Связь между тригонометрическим волчком и тригонометрической системой КМ теперь определяется стандартным уравнением, которое связывает операторы Лакса двух систем:

$$L^{\text{TT}}(z) = \Xi^{\text{T}}(z) L^{\text{TCM}}(z) (\Xi^{\text{T}}(z))^{-1}, \tag{33}$$

где $L^{\text{TCM}}(z)$ – оператор Лакса для N -частичной тригонометрической системы КМ:

$$L^{\text{TCM}}(u)_{ij} = v_i \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \nu \pi (\text{ctg}(\pi z) + \text{ctg}(\pi(u_i - u_j))). \tag{34}$$

Матрица $\Xi^{\text{T}}(z)$ определяется пределом:

$$\Xi^{\text{T}}(z) = \lim_{q \rightarrow 0} q^{(N^2-1)/(12N)} A^{\text{T}}(q) \Xi(z). \tag{35}$$

Явное выражение для этого предела довольно сложное, и мы его не приводим, поскольку не будем им пользоваться в дальнейшем. Гамильтониан тригонометрического волчка определяется стандартным образом:

$$H^{\text{T}} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\text{tr}(L^{\text{TT}}(z))^2}{z} dz.$$

При этом из уравнения (33) непосредственно получаем

$$\begin{aligned} H^T &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\operatorname{tr}(L^{TT}(z))^2}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\operatorname{tr}(L^{TCM}(z))^2}{z} dz = \\ &= \sum_{n=1}^N v_n^2 + \sum_{i \neq j}^N \frac{\pi^2 \nu^2}{\sin^2(\pi(u_i - u_j))} = H^{TCM}. \end{aligned} \quad (36)$$

Формула (36) доказывает эквивалентность систем тригонометрических волчков на алгебре $sl(N, \mathbb{C})$ и N -частичных систем КМ. Полученная формула для тригонометрического оператора Лакса кажется довольно сложной, поэтому в приложение к данной статье мы выносим явные выражения для этих операторов в случаях $N = 2, 3$. Там же мы приводим явные выражения для гамильтонианов в этих случаях и коммутирующих с ними интегралов движения.

5. РАЦИОНАЛЬНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ

Для перехода к рациональному случаю мы производим во всех формулах предыдущего раздела замену константы π на некоторый переменный параметр x , рациональное вырождение соответствует при этом точке $x = 0$. При устремлении x к нулю в правой части уравнения (33), мы получаем расходящиеся выражения. Поэтому так же, как и в тригонометрическом случае, перед предельным переходом мы должны произвести дополнительное калибровочное преобразование $A^R(x)$. По аналогии со случаем ранга 1 будем искать матрицу $A^R(x)$ в виде произведения

$$A^R(x) = S_2 S_1, \quad (37)$$

где матрица S_1 числовая (не зависит от x), нижнетреугольная, а матрица S_2 диагональная,

$$S_2 = \operatorname{diag}(x^{b_1}, x^{b_2}, \dots, x^{b_{N-1}}, x^{b_N}). \quad (38)$$

Коэффициенты матрицы S_1 , а также степени b_i в матрице S_2 необходимо подобрать из условия регулярности правой части уравнения (33), после применения калибровочного преобразования:

$$A^R(x) \Xi^T(u) L^{TCM}(z) (\Xi^T(u))^{-1} (A^R(x))^{-1}.$$

Вычисляя поведение данного выражения вблизи точки $x = 0$, аналогично тому, как это было сделано в тригонометрическом случае, мы получаем для матриц S_1 и S_2 следующие ответы:

$$b_i = -\frac{N(N-1)}{2N} + \frac{1-(i-1)N}{N}, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} S_{1ij} &= \frac{(i-1)!}{(j-i)!(j-1)!}, & i \neq N, \quad j \leq i, \\ S_{1Nj} &= \frac{N!}{i!(N-i)!}, & j \in (1, \dots, N), \\ S_{1ij} &= 0, & j > i. \end{aligned} \quad (40)$$

После того, как матрица дополнительного калибровочного преобразования найдена, мы можем перейти к вычислению соответствующих пределов. Рациональная версия уравнения (3) принимает вид

$$L^{\text{RT}}(z) = \Xi^{\text{R}}(u) L^{\text{RCM}}(z) (\Xi^{\text{R}}(u))^{-1}, \quad (41)$$

где $L^{\text{RCM}}(z)$ – оператор Лакса для N -частичной рациональной системы КМ,

$$L^{\text{RCM}}(u)_{ij} = v_i \delta_{ij} + \nu(1 - \delta_{ij}) \frac{\nu}{u_i - u_j}.$$

Матрицы $\Xi^{\text{R}}(z)$ и $L^{\text{RT}}(z)$ определяются пределами:

$$\Xi^{\text{R}}(z) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{K_N} A^{\text{R}}(x) \Xi(z), \quad L^{\text{RT}} = \lim_{x \rightarrow 0} A^{\text{R}}(x) L^{\text{TT}}(z) (A^{\text{R}}(x))^{-1},$$

где K_N – некоторая константа, получаемая из условия конечности предела для $\Xi^{\text{R}}(z)$. Гамильтониан рационального волчка определяется стандартным образом:

$$H^{\text{T}} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\text{tr}(L^{\text{TT}}(z))^2}{z} dz.$$

Используя уравнение (41), получаем

$$\begin{aligned} H^{\text{T}} &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\text{tr}(L^{\text{TT}}(z))^2}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\text{tr}(L^{\text{TCM}}(z))^2}{z} dz = \\ &= \sum_{n=1}^N v_n^2 + \sum_{i \neq j}^N \frac{\nu^2}{(u_i - u_j)^2} = H^{\text{CM}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Данное уравнение демонстрирует связь между системами в рациональном случае. В данном разделе мы не привели явное выражение для оператора $L^{\text{RT}}(z)$, поскольку в общем случае его вычисление оказывается слишком сложной задачей. Мы видели, что уже в тригонометрическом случае ответ для оператора $L^{\text{TT}}(z)$ получается довольно громоздким, в данном случае он будет еще сложнее. Тем не менее, зная матрицу дополнительного калибровочного преобразования $A^{\text{R}}(x)$, при помощи современных программ таких, как **Maple** или **Mathematica**, можно по формулам, приведенным в этом разделе, легко вычислить рациональные операторы Лакса для $N \leq 10$. В приложение к данной работе мы выносим результаты таких вычислений для $N = 2, 3$, там же мы приводим явные выражения для гамильтонианов рациональных волчков, а также первых интегралов движения, которые соответствуют этим случаям. Вычисления для случая $N = 4$ можно найти в работе [3].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Здесь мы приводим примеры вычислений тригонометрических операторов Лакса. Мы используем для удобства записи следующее соглашение:

$$L^{\text{TT}}(z) = \frac{\pi N}{\sin(\pi z)} L(z).$$

Оператор $L(z)$ для $N = 2$ имеет вид

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{1}{2} \cos(\pi z)(-g_{1,1} + g_{2,2}), \\ L_{12} &= g_{1,2}, \\ L_{21} &= -4g_{1,2} \cos^2(\pi z) + 4g_{1,2} + g_{2,1}, \\ L_{22} &= \frac{1}{2} \cos(\pi z)(-g_{1,1} + g_{2,2}), \end{aligned}$$

оператор $L(z)$ для $N = 3$ записывается в виде

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{1}{3} (-e^{-i\pi z} g_{3,3} + e^{-i\pi z} g_{1,1} - e^{i\pi z} g_{2,2} + e^{i\pi z} g_{1,1}), \\ L_{12} &= e^{-i\pi z/3} g_{1,2} - g_{2,3} e^{5i\pi z/3} + e^{-i\pi z/3} g_{2,3}, \\ L_{13} &= g_{1,3} e^{i\pi z/3}, \\ L_{21} &= g_{2,1} e^{i\pi z/3} + g_{1,3} e^{i\pi z/3} - e^{-5i\pi z/3} g_{1,3}, \\ L_{22} &= \frac{1}{3} (e^{-i\pi z} g_{2,2} - e^{-i\pi z} g_{1,1} - e^{i\pi z} g_{3,3} + e^{i\pi z} g_{2,2}), \\ L_{23} &= e^{-i\pi z/3} g_{2,3}, \\ L_{31} &= -g_{2,3} e^{5i\pi z/3} + e^{-i\pi z/3} g_{1,2} - g_{1,2} e^{5i\pi z/3} - \\ &\quad - e^{-7i\pi z/3} g_{2,3} + g_{3,1} e^{-i\pi z/3} + 2e^{-i\pi z/3} g_{2,3}, \\ L_{32} &= g_{3,2} e^{i\pi z/3} - g_{1,3} e^{7i\pi z/3} + 2g_{1,3} e^{i\pi z/3} - \\ &\quad - e^{-5i\pi z/3} g_{2,1} - e^{-5i\pi z/3} g_{1,3} + g_{2,1} e^{i\pi z/3}, \\ L_{33} &= \frac{1}{3} (-e^{i\pi z} g_{1,1} + e^{-i\pi z} g_{3,3} - e^{-i\pi z} g_{2,2} + e^{i\pi z} g_{3,3}). \end{aligned}$$

Гамильтонианы и интегралы движения. Для вычисления гамильтонианов и высших интегралов движения мы используем следующее соглашение:

$$H_k = \frac{1}{2k\pi i} \oint \frac{\text{tr}(L^{\text{TT}}(z))^k}{z} dz. \quad (43)$$

При этом H_2 отождествляется с гамильтонианом, а H_k для $k > 2$ – это высшие интегралы движения. Проверка коммутативности проводится для канонической скобки на алгебре $gl(N, \mathbb{C})$:

$$\{A, B\}_N = \sum_{i,j,k=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial g_{i,j}} \frac{\partial B}{\partial g_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial g_{i,j}} \frac{\partial A}{\partial g_{j,k}} \right) g_{i,k}. \quad (44)$$

В случае $N = 2$

$$H_2 = \frac{1}{2} (g_{2,2} - g_{1,1} + 4g_{1,2})(g_{2,2} - g_{1,1} - 4g_{1,2})\pi^2,$$

в случае $N = 3$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= 2(g_{2,2}^2 - g_{2,2}g_{3,3} - 9g_{2,3}g_{2,1} - g_{1,1}g_{3,3} - \\
 &\quad - 9g_{1,2}g_{1,3} + g_{1,1}^2 - 27g_{1,3}g_{2,3} - g_{1,1}g_{2,2} + g_{3,3}^2)\pi^2, \\
 H_3 &= g_{1,1}^2g_{2,2} + 27g_{1,3}^2g_{2,1} - g_{1,1}^2g_{3,3} + g_{2,2}^2g_{3,3} - 9g_{1,2}g_{2,2}g_{1,3} - \\
 &\quad - 27g_{2,3}^3 + 9g_{2,3}g_{2,1}g_{1,1} - g_{1,1}g_{2,2}^2 + g_{1,1}g_{3,3}^2 + 27g_{1,3}^3 - \\
 &\quad - 27g_{2,3}^2g_{1,2} - 9g_{3,3}g_{2,3}g_{2,1} + 9g_{1,2}g_{1,3}g_{3,3} - g_{2,2}g_{3,3}^2.
 \end{aligned}$$

При этом выполняется тождество

$$\{H_2, H_3\}_3 = 0. \quad (45)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Здесь мы приводим примеры вычислений в рациональном случае, при этом мы используем следующее соглашение:

$$L^{\text{RT}}(z) = \frac{N}{z} L(z).$$

Оператор $L(z)$ для $N = 2$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{1}{2}(g_{1,1} - g_{2,2}), \\
 L_{12} &= g_{1,2}, \\
 L_{21} &= g_{2,1} + \frac{z^3}{2}(g_{1,1} - g_{2,2}), \\
 L_{22} &= -\frac{1}{2}(g_{1,1} - g_{2,2}),
 \end{aligned}$$

оператор $L(z)$ для $N = 3$ записывается в виде

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{16}{27}iz^3g_{1,3} - \frac{4}{3}z^2g_{2,3} - \frac{1}{3}g_{2,2} + \frac{2}{3}g_{1,1} - \frac{1}{3}g_{3,3} + \frac{2}{3}izg_{1,2}, \\
 L_{12} &= -\frac{4}{3}z^2g_{1,3} - 2izg_{2,3} + g_{1,2}, \\
 L_{13} &= g_{1,3}, \\
 L_{21} &= -\frac{32}{81}z^4g_{1,3} - \frac{8}{27}iz^3g_{2,3} - \frac{8}{9}z^2g_{1,2} + \left(-\frac{2}{3}ig_{1,1} + \frac{2}{3}ig_{3,3}\right)z + g_{2,1}, \\
 L_{22} &= -\frac{8}{9}iz^3g_{1,3} + \frac{2}{3}g_{2,2} - \frac{1}{3}g_{1,1} - \frac{1}{3}g_{3,3}, \\
 L_{23} &= \frac{2}{3}izg_{1,3} + g_{2,3}, \\
 L_{31} &= -\frac{128}{729}z^6g_{1,3} + \frac{32}{81}iz^5g_{2,3} - \frac{32}{81}z^4g_{1,2} + \\
 &\quad + \left(-\frac{16}{27}ig_{1,1} - \frac{8}{27}ig_{3,3} + \frac{8}{9}ig_{2,2}\right)z^3 - \frac{4}{3}z^2g_{2,1} - \frac{2}{3}izg_{3,2} + g_{3,1},
 \end{aligned}$$

$$L_{32} = -\frac{32}{81} iz^5 g_{1,3} - \frac{32}{27} z^4 g_{2,3} + \frac{8}{27} iz^3 g_{1,2} + \left(-\frac{4}{3} g_{1,1} + \frac{4}{3} g_{3,3} \right) z^2 + 2izg_{2,1} + g_{3,2},$$

$$L_{33} = \frac{4}{3} z^2 g_{2,3} + \frac{2}{3} g_{3,3} - \frac{1}{3} g_{1,1} + \frac{8}{27} iz^3 g_{1,3} - \frac{1}{3} g_{2,2} - \frac{2}{3} izg_{1,2}.$$

Гамильтонианы и старшие интегралы движения. Для вычисления гамильтонианов и высших интегралов движения, как и в приложении А, мы используем соглашение (43). При этом H_2 отождествляется с гамильтонианом, а H_k для $k > 2$ — это интегралы движения. Проверка коммутативности проводится для канонической скобки на алгебре $gl(N, \mathbb{C})$ (см. (44)).

В случае $N = 2$

$$H_2 = 2g_{1,2}(g_{1,1} - g_{2,2}),$$

в случае $N = 3$

$$H_2 = -g_{1,2}^2 + 3g_{3,3}g_{2,3} - 3g_{2,3}g_{1,1} - 3g_{2,1}g_{1,3},$$

$$H_3 = 3g_{3,3}g_{2,3}g_{1,2} - 3g_{2,3}g_{2,2}g_{1,2} + \frac{2}{3}g_{1,2}^3 -$$

$$- 2g_{3,3}^2g_{1,3} + g_{2,2}^2g_{1,3} - 9g_{2,3}^2g_{2,1} + 5g_{3,3}g_{1,1}g_{1,3} -$$

$$- g_{2,2}g_{1,1}g_{1,3} + 3g_{1,3}g_{2,1}g_{1,2} - 2g_{1,1}^2g_{1,3} - g_{3,3}g_{2,2}g_{1,3}.$$

При этом выполняется условие интегрируемости волчка (45).

Благодарности. Автор благодарит М. А. Ольшанецкого, А. М. Левина, А. В. Зотова за ценные обсуждения и интерес к работе, а также А. В. Слепцова за полезные замечания. Работа была частично поддержана Федеральным агентством РФ по атомной энергии, РФФИ (гранты № 06-02-17382, № 06-01-92054-КЕ_а), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-8004.2006.2).

Список литературы

- [1] A. Smirnov, *Two-body systems from $sl(2, \mathbb{C})$ -tops*, [arXiv: 0711.2432](#).
- [2] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.
- [3] A. Smirnov, *Correspondece between Calogero–Moser systems and integrable $SL(N, \mathbb{C})$ Euler–Arnold tops*, [arXiv: 0809.2187](#).
- [4] A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, A. Zotov, *Comm. Math. Phys.*, **236**:1 (2003), 93–133.
- [5] N. Hitchin, *Duke Math. J.*, **54**:1 (1987), 91–114.
- [6] A. Antonov, K. Hasegawa, A. Zabrodin, *Nucl. Phys. B*, **503**:3 (1997), 747–770; [arXiv: hep-th/9704074](#).
- [7] A. Gorsky, A. Zabrodin, *J. Phys. A*, **26**:15 (1993), L635–L640; [arXiv: hep-th/9303026](#).

Поступила в редакцию 6.06.2008