Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Ю. В. Павлов, Решения трех-
мерного уравнения синус-Гордон, *ТМФ*, 2009, том 158,
номер 3, 370–377

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:46:59

© 2009 г. Э. Л. Аэро*, А. Н. Булыгин*, Ю. В. Павлов*

РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН

Получены точные решения $U(x, y, z, t)$ трехмерного уравнения синус-Гордон в форме, которую ранее Лэм предложил для интегрирования двумерного уравнения синус-Гордон. Трехмерные решения зависят от произвольных функций $F(\alpha)$ и $\Phi(\alpha, \beta)$, аргументами которых являются функции $\alpha(x, y, z, t)$ и $\beta(x, y, z, t)$. Анзацы должны удовлетворять некоторым уравнениям. В случае одного анзаца – это система алгебраических уравнений. В случае двух анзацев к системе алгебраических уравнений добавляются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Найденные решения $U(x, y, z, t)$ обладают важным свойством; а именно, для функции $\text{tg}(U/4)$ выполняется принцип суперпозиции. Предложенный подход применим для решения обобщенного уравнения синус-Гордон, которое, в отличие от классического, дополнительно содержит частные производные первого порядка по переменным x, y, z, t , а также для интегрирования уравнения sh-Гордон. Предложенный подход допускает естественное обобщение на случай интегрирования перечисленных типов уравнений в пространстве любого числа измерений.

Ключевые слова: уравнение синус-Гордон, волновое уравнение, уравнение Гамильтона–Якоби, принцип суперпозиции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию уравнения синус-Гордон (СГ) посвящено большое число работ. Это связано с тем, что оно появляется во многих разделах механики, математики и теоретической физики. Уравнение СГ описывает дислокации в твердых телах [1], деформирование нелинейной кристаллической решетки [2], [3], свойства ферромагнетиков [4], распространение флюксонов в джозефсоновских линиях передач [5], фазовые переходы соизмеримость–несоизмеримость [6], распространение резонансных ультракоротких оптических импульсов [7], [8], ориентационную структуру жидких кристаллов [9] и т.д. Оно также возникает при моделировании волновых процессов в геологических средах [10], в молекулярной биологии [11], моделях теории поля [12] и физике элементарных частиц [13].

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: bulygina@mail.ru

Такие нелинейные возбуждения можно рассматривать как структурные параметры порядка. Подобные дефекты часто ассоциируются с механизмами скольжения или течения в конденсированных средах, что стимулирует построение прикладных моделей и разработку математических методов их реализации.

К настоящему времени разработаны весьма эффективные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе и уравнения СГ. Это метод Лэма, предложенный им для решения двумерного уравнения СГ [14], преобразование Беклунда [15], метод обратной задачи рассеяния [16], [17], метод Хироты [18] для нахождения явного вида многосолитонных решений, методы теории возмущений и др. Однако потребности развития теории нелинейных уравнений и задачи практического моделирования многочисленных физических явлений и технологических процессов стимулируют поиск новых методов решения нелинейных уравнений, в том числе и уравнения СГ.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СГ

Решения уравнения СГ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \sin U \quad (1)$$

будем искать в форме, которую предложил Лэм [14] для интегрирования двумерного уравнения СГ¹⁾:

$$U = 4 \arctg G(x, y, z, t). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что

$$\sin U = \frac{4G}{1+G^2} - \frac{8G^3}{(1+G^2)^2}, \quad (3)$$

получаем нелинейное дифференциальное уравнение для функции G

$$\begin{aligned} & \frac{4G}{1+G^2} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - G \right] - \\ & - \frac{8G}{(1+G^2)^2} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right)^2 - G^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (4) легко решается, если допустить, что функция G может одновременно удовлетворять двум уравнениям

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - G = 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right)^2 - G^2 = 0. \quad (6)$$

Пусть функция G имеет вид

$$G(x, y, z, t) = e^\varphi V(x, y, z, t), \quad \varphi = a_1 x + a_2 y + a_3 z - v^2 \sigma t, \quad (7)$$

¹⁾Ранее такая подстановка была использована в монографии [19].

где a_1, a_2, a_3, σ – произвольные постоянные. Подставив (7) в уравнения (5), (6), убеждаемся, что они выполняются, если постоянные a_1, a_2, a_3, σ связаны условием

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 + v^2 \sigma^2, \quad (8)$$

а функция $V(x, y, z, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$a_1 \frac{\partial V}{\partial x} + a_2 \frac{\partial V}{\partial y} + a_3 \frac{\partial V}{\partial z} + \sigma \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

уравнению Гамильтона–Якоби

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 = 0 \quad (10)$$

и волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (11)$$

Расщепление одного дифференциального уравнения на несколько уравнений оправдано, если существует конструктивный метод решения системы дифференциальных уравнений. Существует [20] несколько способов построения функции $V(x, y, z, t)$, удовлетворяющей системе уравнений (9)–(11).

2.1. Первый способ. Предположим, что $V(x, y, z, t)$ есть произвольная функция анзаца $\alpha(x, y, z, t)$, т.е.

$$V(x, y, z, t) = F(\alpha). \quad (12)$$

Произвольная функция $F(\alpha)$ будет удовлетворять уравнениям (9)–(11), если анзац $\alpha(x, y, z, t)$ будет решением таких же уравнений

$$a_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + a_3 \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

Выберем анзац $\alpha(x, y, z, t)$ из соотношения

$$xl(\alpha) + ym(\alpha) + zn(\alpha) - tv^2p(\alpha) + q(\alpha) = 0, \quad (16)$$

где $l(\alpha), m(\alpha), n(\alpha), p(\alpha), q(\alpha)$ – произвольные функции. Из (16) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= -\frac{l}{\lambda}, & \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= -\frac{m}{\lambda}, & \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= -\frac{n}{\lambda}, & \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= v^2 \frac{p}{\lambda}, \\ \lambda &= x \frac{dl}{d\alpha} + y \frac{dm}{d\alpha} + z \frac{dn}{d\alpha} - v^2 t \frac{dp}{d\alpha} + \frac{dq}{d\alpha}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \alpha}{dx^2} &= \frac{1}{\lambda^2} \left(2l \frac{dl}{d\alpha} - l^2 \frac{\nu}{\lambda} \right), \\
\frac{\partial^2 \alpha}{dy^2} &= \frac{1}{\lambda^2} \left(2m \frac{dm}{d\alpha} - m^2 \frac{\nu}{\lambda} \right), \\
\frac{\partial^2 \alpha}{dz^2} &= \frac{1}{\lambda^2} \left(2n \frac{dn}{d\alpha} - n^2 \frac{\nu}{\lambda} \right), \\
\frac{\partial^2 \alpha}{dt^2} &= \frac{v^4}{\lambda^2} \left(2p \frac{dp}{d\alpha} - p^2 \frac{\nu}{\lambda} \right),
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\nu = x \frac{d^2 l}{d\alpha^2} + y \frac{d^2 m}{d\alpha^2} + z \frac{d^2 n}{d\alpha^2} - v^2 t \frac{d^2 p}{d\alpha^2} + \frac{d^2 q}{d\alpha^2}. \tag{19}$$

Подставляя (17), (18) в уравнения (13)–(15), приходим к выводу, что эти уравнения будут выполняться, если функции l , m , n , p связаны условиями

$$\begin{aligned}
a_1 l + a_2 m + a_3 n &= v^2 \sigma p, \\
l^2 + m^2 + n^2 &= v^2 p^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

При этом мы учли, что соотношение

$$l \frac{dl}{d\alpha} + m \frac{dm}{d\alpha} + n \frac{dn}{d\alpha} = v^2 p \frac{dp}{d\alpha},$$

которое следует из (15), является следствием второго условия (20).

Легко видеть, что функцию $F(\alpha)$ можно записать в виде суммы произвольных функций анзаца $\alpha(x, y, z, t)$:

$$\operatorname{tg} \frac{U}{4} = e^\varphi [f_1(\alpha) + f_2(\alpha) + \dots + f_k(\alpha) + \dots], \tag{21}$$

т.е. $\operatorname{tg}(U/4)$ удовлетворяет принципу суперпозиции.

Для иллюстрации первого способа построения решения уравнения СГ рассмотрим простой случай. Примем, что функции $l(\alpha)$, $m(\alpha)$ и $n(\alpha)$ прямо пропорциональны $p(\alpha)$:

$$l = x_1 p, \quad m = x_2 p, \quad n = x_3 p. \tag{22}$$

Тогда функции $p(\alpha)$ и $q(\alpha)$ остаются произвольными, а уравнения (20) преобразуются в систему алгебраических уравнений для чисел x_1 , x_2 , x_3 :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \sigma v^2, \tag{23}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = v^2. \tag{24}$$

Уравнения (23), (24) имеют простой геометрический смысл. Они описывают взаимное расположение плоскости и сферы радиуса v . В нашем случае плоскость пересекает сферу. Действительно, расстояние плоскости (23) до начала координат равно

$$h = \frac{\sigma v^2}{\sqrt{1 + \sigma^2 v^2}}. \tag{25}$$

а

б

в

Из (25) видно, что h строго меньше радиуса сферы ($h/v < 1$) и, следовательно, плоскость пересекает сферу.

Если (22) подставить в (16) и принять, что $q(\alpha)/p(\alpha) = -\alpha$, то для анзаца получаем выражение

$$\alpha = xx_1 + yx_2 + zx_3 - v^2t. \quad (26)$$

На рисунке показаны решения уравнения СГ при $F(\alpha) = \cos \alpha$ (а), $F(\alpha) = \operatorname{th} \alpha$ (б) и $F(\alpha) = \cos \alpha + \operatorname{th} \alpha$ (в). Расчеты выполнены для следующих значений параметров: $v = 1$, $\sigma = 1$, $a_1 = 1/\sqrt{2}$, $a_2 = 1/\sqrt{2}$, $a_3 = 1$ и $x_1 \approx 0.774$, $x_2 \approx 0.633$, $x_3 \approx 0.005$, удовлетворяющих системе (23), (24). Значения z , t на рисунке положены равными нулю.

2.2. Второй способ. Пусть $V(x, y, z, t)$ – произвольная функция двух анзацев $\alpha(x, y, z, t)$ и $\beta(x, y, z, t)$, т.е.

$$V(x, y, z, t) = \Phi(\alpha, \beta). \quad (27)$$

Если (27) подставить в (9)–(11), то убедимся, что произвольная функция $\Phi(\alpha, \beta)$ удовлетворяет уравнениям (9)–(11), если анзацы α , β являются решением системы

уравнений

$$\begin{aligned}
 a_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + a_3 \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= 0, \\
 a_1 \frac{\partial \beta}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \beta}{\partial y} + a_3 \frac{\partial \beta}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \beta}{\partial t} &= 0, \\
 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 &= 0, \\
 \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 &= 0, \\
 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial t} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Предположим, что анзацы α , β найдены из соотношений

$$\begin{aligned}
 xl(\alpha) + ym(\alpha) + zn(\alpha) - tv^2p(\alpha) + q(\alpha) &= 0, \\
 \beta = xL(\alpha) + yM(\alpha) + zN(\alpha) - tv^2P(\alpha) + Q(\alpha),
 \end{aligned} \tag{29}$$

где $l(\alpha)$, $m(\alpha)$, $n(\alpha)$, $p(\alpha)$, $q(\alpha)$, $L(\alpha)$, $M(\alpha)$, $N(\alpha)$, $P(\alpha)$ и $Q(\alpha)$ – произвольные функции. Если из соотношений (29) найти частные производные от α и β по x , y , z , t и найденные выражения подставить в (28), то убедимся, что уравнения (28) выполняются, если функции l , m , n , p , q , L , M , N , P , Q удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
 a_1 l + a_2 m + a_3 n &= v^2 \sigma p, \\
 a_1 L + a_2 M + a_3 N &= v^2 \sigma P, \\
 l^2 + m^2 + n^2 &= v^2 p^2, \\
 L^2 + M^2 + N^2 &= v^2 P^2, \\
 lL + mM + nN &= v^2 pP, \\
 l \frac{dL}{d\alpha} + m \frac{dM}{d\alpha} + n \frac{dN}{d\alpha} &= v^2 p \frac{dP}{d\alpha},
 \end{aligned} \tag{30}$$

а постоянные a_1 , a_2 , a_3 , σ – условию (8).

Функцию $\Phi(\alpha, \beta)$, как и в первом случае, можно записать в виде суммы произвольных функций:

$$\text{tg} \frac{U}{4} = e^\varphi [f_1(\alpha, \beta) + f_2(\alpha, \beta) + \dots + f_k(\alpha, \beta) + \dots], \tag{31}$$

т.е. второе решение, зависящее от двух анзацев, также удовлетворяет принципу суперпозиции.

2.3. Третий способ. Анзацы α , β можно определить из более общих соотношений, чем (29), а именно

$$\begin{aligned} xl(\alpha, \beta) + ym(\alpha, \beta) + zn(\alpha, \beta) - tv^2p(\alpha, \beta) + q(\alpha, \beta) &= 0, \\ xL(\alpha, \beta) + yM(\alpha, \beta) + zN(\alpha, \beta) - tv^2P(\alpha, \beta) + Q(\alpha, \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнения (32) неявным образом задают α и β как функции независимых переменных x , y , z , t . Если из (32) найти соответствующие частные производные первого и второго порядков от α и β по переменным x , y , z , t и подставить их в уравнения (28), то окончательно получаем, что уравнения (28) выполняются, если наряду с условием (8) выполняются условия (30) и дополнительное уравнение

$$l \frac{dL}{d\beta} + m \frac{dM}{d\beta} + n \frac{dN}{d\beta} = v^2 p \frac{dP}{d\beta}. \quad (33)$$

Решения третьего типа также удовлетворяют принципу суперпозиции.

Отметим, что, как и для первого способа, построение решений вторым и третьим способами существенно упрощается, если наряду с (22) предположить, что

$$L = y_1 P, \quad M = y_2 P, \quad N = y_3 P, \quad (34)$$

где y_1 , y_2 , y_3 – произвольные постоянные.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе подход сводит проблему интегрирования уравнения СГ к нахождению неизвестных функций из системы алгебраических уравнений (первый способ) или смешанной системы, содержащей алгебраические и линейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка (второй и третий способы).

Нахождение одного (α) или двух (α , β) анзацев из соответствующих систем уравнений и выбор произвольных функций $F(\alpha)$ или $\Phi(\alpha, \beta)$ фактически означает нахождение частного решения, удовлетворяющего определенным начальным и граничным условиям. Такие задачи возникают при моделировании конкретных физических явлений или технологических процессов и заслуживают специальных исследований.

В заключение сделаем следующие замечания. Предложенный подход можно использовать для интегрирования обобщенного уравнения СГ, которое, в отличие от классического, дополнительно содержит частные производные первого порядка по переменным x , y , z , t . В этом случае функция $V(x, y, z, t)$ дополнительно должна удовлетворять дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, а произвольные функции, определяющие анзацы, – дополнительным алгебраическим уравнениям.

Такой подход позволяет решить и уравнение sh-Гордон. В этом случае решение нужно искать в виде

$$U = 4 \operatorname{Arth} G(x, y, z, t). \quad (35)$$

Предложенный в работе подход допускает естественное обобщение на случай интегрирования перечисленных уравнений в пространстве любого числа измерений.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (гранты № 07-01-00213_а, № 06-08-00910_а).

Список литературы

- [1] J. Frenkel, T. Kontorova, *J. Phys. Acad. Sci. USSR*, **1** (1939), 137–149.
- [2] Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, *Изв. РАН. Сер. Механика твердого тела*, 2007, № 5, 170–187.
- [3] E. L. Aero, *J. Engrg. Math.*, **55**:1–4 (2006), 81–95.
- [4] P. Gueret, *IEEE Trans. Magnetics*, **11**:2 (1975), 751–754.
- [5] К. Лонгрен, Э. Скотт (ред.), *Солитоны в действии*, Мир, М., 1981.
- [6] W. L. McMillan, *Phys. Rev. B*, **14**:4 (1976), 1496–1502.
- [7] G. L. Lamb Jr., *Phys. Lett. A*, **25**:3 (1967), 181–182.
- [8] Р. Буллаф, Ф. Кодри (ред.), *Солитоны*, Мир, М., 1983.
- [9] П. де Жен, *Физика жидких кристаллов*, Мир, М., 1977.
- [10] В. Г. Быков, *Нелинейные волновые процессы в геологических средах*, Дальнаука, Владивосток, 2000.
- [11] А. С. Давыдов, *Солитоны в биоэнергетике*, Наукова думка, Киев, 1986.
- [12] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [13] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **21**:2 (1974), 160–174.
- [14] G. L. Lamb Jr., *Rev. Modern Phys.*, **43**:2 (1971), 99–124.
- [15] R. M. Miura (ed.), *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and their Applications*, Lecture Notes in Math., **515**, Springer, Berlin, 1976.
- [16] M. J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM Stud. Appl. Math., **4**, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [17] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [18] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **33**:5 (1972), 1459–1463.
- [19] R. Steuerwald, *Abh. Bayer. Akad. Wiss., N. F.*, 1936, № 40, 1–106.
- [20] Г. Бейтмен, *Математическая теория распространения электромагнитных волн*, Наука, М., 1958.

Поступила в редакцию 23.05.2008