Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Корепанов, Геометрические кручения и топологическая теория поля в стиле Атьи, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 3, 405–418

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 08:42:46

© 2009 г.

И. Г. Корепанов*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КРУЧЕНИЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В СТИЛЕ АТЬИ

Конструкция инвариантов трехмерных многообразий с триангулированным краем, ранее предложенная автором для случая, когда край состоит не более чем из одной связной компоненты, обобщается для любого числа компонент. Эти инварианты основаны на кручении ациклических комплексов геометрического происхождения. Адекватным инструментом для изучения таких инвариантов оказывается исчисление антикоммутирующих переменных Березина, с помощью которых, в частности, формулируется основная теорема о композиции инвариантов при склеивании многообразий. Показано, что теория удовлетворяет естественной модификации аксиом Атьи на случай антикоммутирующих переменных.

Ключевые слова: геометрические кручения, топологическая теория поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье завершается построение одной из версий инвариантов трехмерных многообразий с триангулированным краем, начатое в работе [1]. А именно, предъявлена конструкция этих инвариантов для компактного связного ориентированного трехмерного многообразия с произвольным числом компонент края, тогда как в работе [1] мы ограничивались не более чем одной компонентой.

Наши инварианты – мы называем их “геометрическими” – строятся на основе кручений ациклических комплексов векторных пространств, состоящих из дифференциалов геометрических величин, сопоставляемых симплексам триангуляции многообразия, т.е. вершинам, ребрам и т.д. У нас нет общего рецепта такой геометризации, но на практике оказывается, что точки по крайней мере очень многих однородных пространств групп Ли можно использовать как “координаты” вершин триангуляции и дальше строить комплекс, опираясь на интуитивные, но обычно не очень сложные соображения. В настоящей работе используются группа $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ и само это пространство в качестве однородного; из других геометрий, которые можно использовать для трехмерных триангулированных многообразий, отметим четырехмерную евклидову геометрию [2] и двумерную

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия.
E-mail: kig@susu.ac.ru

аффинную геометрию с сохранением объема [3], [4], также укажем статью [5], в которой используется группа $PSL(2, \mathbb{C})$ дробно-линейных преобразований комплексной плоскости. Есть и “некоммутативные” варианты некоторых теорий, в которых в качестве координат вершин используются элементы ассоциативной алгебры и требуется лишь обратимость некоторых комбинаций этих элементов. Для четырехмерных многообразий предложена конструкция комплекса, основанного на четырехмерной евклидовой геометрии [6]–[8], а также в работе [9] доказана формула, указывающая на возможность применения трехмерной аффинной геометрии с сохранением объемов.

Напомним, что *движения Пахнера* суть элементарные перестройки триангуляции кусочно-линейного многообразия. Применив достаточно длинную цепочку таких движений, можно перейти от одной триангуляции к любой другой. Замечательный факт, наблюдаемый в каждом конкретном случае и не получивший пока общего объяснения, состоит в том, что кручение ациклического комплекса геометрического происхождения преобразуется простым мультипликативным образом при движениях Пахнера. Типичным является случай, когда кручение умножается на некоторые степени объемов симплексов, возникающих при движении Пахнера, и делится на такие же степени объемов исчезающих симплексов. Поэтому кручение, деленное на те же степени объемов всех участвующих симплексов, является инвариантом всех движений Пахнера, примером чего в настоящей статье служат формулы (3) и (5). Напомним еще, что развиваемая здесь теория начиналась [10] именно с конкретных формул, связанных с движениями Пахнера, в первую очередь с движением $2 \rightarrow 3$ (два тетраэдра с общей гранью заменяются на три тетраэдра с общим ребром) для трехмерных триангулированных многообразий.

В работе [1] мы показали, как строить не один, а много алгебраических комплексов для многообразия с однокомпонентным краем, на котором (крае) задана фиксированная триангуляция. Такой комплекс зависит от двух произвольных множеств одинаковой мощности $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ ребер на крае; на примерах мы показали, что достаточно часто такой комплекс оказывается ациклическим (если же он не является ациклическим, его кручение считается равным нулю). При изменении триангуляции края инварианты претерпевают линейное преобразование. Более того, оказалось возможным выписать формулу, выражающую инвариант замкнутого многообразия, полученного склеиванием двух многообразий с краем (края одинаковые и одинаково триангулированы, но противоположно ориентированы), через инварианты склеиваемых многообразий. Формула имела вид скалярного произведения, что соответствует известным аксиомам Атья [11], [12] для топологической квантовой теории поля. Со случаем многокомпонентного края на момент написания статьи [1] справиться не удавалось.

В настоящей статье мы показываем, как преодолеть эту трудность (рассмотреть качания каждой компоненты края как целого, см. раздел 2). При этом становится ясно, что все инварианты удобно объединить в производящую функцию с участием антикоммутирующих (грассмановых) переменных: это, в частности, адекватно описывает перемену знака инварианта при перестановке порядка ребер. Настоящая же роль антикоммутирующих переменных проявляется, когда мы составляем формулу

для композиции инвариантов при склеивании многообразий по некоторым компонентам краев: результат равен, с точностью до множителя, интегралу Березина от произведения производящих функций для двух многообразий по переменным, отвечающим склеиваемым компонентам краев! Таким образом, получающаяся теория не удовлетворяет аксиомам Атьи буквально, но вполне удовлетворяет их естественной модификации на случай грассмановых переменных. Мы описываем эту модификацию аксиом. Интересным отличием грассманова случая от обычного оказывается связь между инвариантами пространств $\Sigma \times I$ и $\Sigma \times S^1$, где Σ – двумерная поверхность, $I = [0, 1]$ – отрезок, а S^1 – окружность, и размерностью линейного пространства, сопоставляемого Σ . Мы вкратце описываем эту связь, оставляя ее детальное изучение для отдельной работы.

Содержание работы следующее. В разделе 2 мы приводим нашу конструкцию для многообразия с любым числом компонент края, заодно напоминая необходимые основные понятия. В разделе 3 вводится производящая функция от грассмановых переменных для полученных инвариантов и показывается, что уже на этом этапе присутствует интеграл Березина. В разделе 4 доказана теорема о композиции инвариантов при склеивании многообразий. В разделе 5 мы рассматриваем модификацию аксиом Атьи. В разделе 6 обсуждаются результаты и планы дальнейших исследований.

2. КОМПЛЕКС И ИНВАРИАНТЫ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЯ С ЛЮБЫМ ЧИСЛОМ КОМПОНЕНТ КРАЯ

В этом разделе мы приводим конструкцию алгебраического комплекса и инвариантов для связного триангулированного компактного ориентированного трехмерного многообразия M , край которого имеет m связных компонент, $m = 0, 1, \dots$. Мы достаточно подробно излагаем новый по сравнению с работой [1] материал и лишь кратко напоминаем то, что уже изложено в статье [1], предлагая читателю обратиться к ней в необходимых случаях.

Начнем с геометризации симплексов триангуляции, конкретнее с приписывания каждой ее вершине A трех вещественных чисел x_A, y_A, z_A , которые будут называться ее невозмущенными евклидовыми координатами. Эти числа произвольны, от них требуется только, чтобы они находились в общем положении относительно всех дальнейших конструкций. Тем самым в каждый тетраэдр вводится евклидова геометрия, но это отнюдь не относится ко всему многообразию M , так как получающимся тетраэдрам в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ разрешено пересекаться.

В конструкции наших комплексов в качестве векторных пространств, в частности, используются:

- а) алгебра Ли $\mathfrak{e}(3)$ бесконечно малых изометрий пространства $\mathbb{R}^3$;
- б) пространство (dx) вектор-столбцов из дифференциалов координат вершин триангуляции;
- в) пространство (dl) вектор-столбцов из дифференциалов длин ребер;

г) пространство $(d\omega, d\alpha)$ вектор-столбцов из дифференциалов $d\omega$ углов дефекта при внутренних ребрах и дифференциалов $d\alpha$, взятых с обратным знаком внутренних двугранных углов при граничных ребрах. Какие именно вершины и ребра используются, мы уточним в каждом конкретном случае.

Нам понадобятся линейные отображения f_1 , f_2 и f_3 между этими векторными пространствами, которые являются дифференциалами “макроскопических” отображений с простым геометрическим смыслом: $f_1 = dF_1$, $f_2 = dF_2$, $f_3 = dF_3$, где F_1 показывает, как сдвигаются координаты вершин из их исходных невозмущенных положений под действием элемента группы изометрий $E(3)$ (так что F_1 действует из $E(3)$ в наборы координат, а невозмущенные координаты всех вершин являются параметрами теории), F_2 строит длины ребер по данным координатам вершин (“возмущенным”), F_3 строит углы дефекта и двугранные углы по данным длинам ребер.

В алгебре $\mathfrak{e}(3)$ как линейном пространстве можно выбрать естественный базис из трех бесконечно малых сдвигов и трех поворотов, что позволяет и ее, так же как и остальные используемые нами пространства, считать состоящей из вектор-столбцов, а отображения f_1 , f_2 и f_3 отождествить с матрицами. Если еще учесть, что частные производные, из которых состоит матрица f_3 , обладают свойствами симметрии [10]:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial l_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial l_i}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial l_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial l_i},$$

то цепочку из отображений f_1, f_2, f_3 можно продолжить и получить, например, алгебраический комплекс для многообразия без края (углы $d\alpha$ отсутствуют), выписанный в формуле (3) работы [1]:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{e}(3) \xrightarrow{f_1} (dx) \xrightarrow{f_2} (dl) \xrightarrow{f_3=f_3^T} (d\omega) \xrightarrow{f_4=-f_2^T} (dx^*) \xrightarrow{f_5=f_1^T} \mathfrak{e}(3)^* \longrightarrow 0. \quad (1)$$

Определив *кручение* комплекса (1) формулой

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{minor } f_1 \text{ minor } f_3 \text{ minor } f_5}{\text{minor } f_2 \text{ minor } f_4}, \quad (2)$$

где выбор миноров матриц объяснен в п. 2.2 работы [1]¹⁾, мы получим инвариант многообразия без края по формуле

$$I(M) = \frac{\tau \prod (-6V)}{\prod l^2}, \quad (3)$$

где произведение в числителе вычисляется по всем тетраэдрам, а в знаменателе – по всем ребрам; V – ориентированный объем тетраэдра, l – длина ребра.

Покажем, как обобщить эту конструкцию для многообразия с произвольным числом m компонент края. Главным оправданием именно такого обобщения будет то, что, как мы увидим в разделе 4, выполняется аналог теоремы 6 работы [1] о том,

¹⁾Ниже в этом разделе мы займемся подробно вопросами, связанными с выбором миноров, причем в более общем случае.

что инварианты результата склейки многообразий M_1 и M_2 по некоторым компонентам их краев могут быть получены из инвариантов M_1 и M_2 . Наша конструкция будет охватывать единообразно и случаи $m = 0$ и $m = 1$, которым в работе [1] были посвящены отдельные разделы. Наш алгебраический комплекс будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathfrak{e}(3) \xrightarrow{f_1} \left(\begin{array}{c} dx_{\text{внутр}} \\ \oplus \\ m\mathfrak{e}(3) \end{array} \right) \xrightarrow{f_2} (dl) \xrightarrow{f_3} \\ \xrightarrow{f_3} (d\omega, d\alpha) \xrightarrow{f_4} \left(\begin{array}{c} dx_{\text{внутр}}^* \\ \oplus \\ m\mathfrak{e}(3)^* \end{array} \right) \xrightarrow{f_5} \mathfrak{e}(3)^* \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Опишем подробно значение всех символов в комплексе (4). Алгебра $\mathfrak{e}(3)$ по-прежнему есть алгебра бесконечно малых движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. А вот в следующем члене $\left(\begin{array}{c} dx_{\text{внутр}} \\ \oplus \\ m\mathfrak{e}(3) \end{array} \right)$ появляется важное нововведение. Здесь $dx_{\text{внутр}}$ означает совокупность дифференциалов координат всех внутренних вершин, тогда как вершинам, лежащим на краю, по определению разрешены лишь евклидовы движения каждой компоненты края как целого. Мы называем такие движения *качаниями* компонент края. Бесконечно малому качанию каждой компоненты очевидным образом соответствует элемент все той же алгебры $\mathfrak{e}(3)$, отсюда наше обозначение $m\mathfrak{e}(3)$ для совокупности всех качаний. По определению отображение f_1 переводит элемент $a \in \mathfrak{e}(3)$ в m одинаковых качаний компонент края, задаваемых тем же элементом a , и в такие величины $dx_{\text{внутр}}$, которые являются смещениями вершин при бесконечно малом движении a .

Зададим теперь, как и в работе [1], два множества граничных ребер $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ одинаковой мощности (суммарной по компонентам края, но на каждой отдельной компоненте количества ребер в $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ могут различаться). Следующее векторное пространство (dl) в комплексе (4) по определению состоит из вектор-столбцов дифференциалов длин всех внутренних ребер, а также граничных ребер из множества $\mathcal{C}$. Отображение f_2 определяется геометрически: независимые перемещения dx внутренних вершин вместе с качаниями компонент края очевидным образом определяют изменения длин dl (при этом, разумеется, $dl_i = 0$, если ребро i лежит на краю).

Аналогично векторное пространство $(d\omega, d\alpha)$ по определению состоит из вектор-столбцов бесконечно малых углов дефекта $d\omega_j$ для всех внутренних ребер j и дифференциалов, взятых с обратным знаком двугранных углов $d\alpha_k$ для $k \in \mathcal{D}$.

Далее комплекс (4), аналогично комплексу (1), продолжается по симметрии; следует только учесть, что в качестве f_4 берется не просто $-f_2^T$, а нужно еще заменить множество ребер $\mathcal{C}$ на $\mathcal{D}$.

Следующая теорема обосновывает использование слов “алгебраический комплекс” к последовательности пространств и отображений (4).

ТЕОРЕМА 1. В последовательности (4) выполнены равенства

$$f_2 \circ f_1 = 0, \quad f_3 \circ f_2 = 0, \quad f_4 \circ f_3 = 0, \quad f_5 \circ f_4 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3 работы [1], но с одним новым моментом: в [1] композиция $f_3 \circ f_2$ давала нулевые $d\alpha$, потому что край оставался неподвижен, а теперь у нас получается то же в ситуации, когда каждая компонента края может двигаться, но лишь как целое. ■

Кручение τ комплекса (4) определяется по-прежнему формулой (2). Удобно считать, что мы выбираем в ней миноры (т.е. τ -цепь в комплексе (4)) некоторым стандартным образом, и ввести в связи с этим понятие *минимальной жесткой конструкции* из ребер триангуляции трехмерного многообразия с краем M . В дальнейшем нам также понадобится аналогичное понятие для связной поверхности – компоненты края M .

Выберем три внутренние вершины триангуляции²⁾ A, B и C . Возьмем для минора матрицы f_1 ее строки, соответствующие дифференциалам координат $dx_A, dy_A, dz_A, dy_B, dz_B, dz_C$. Симметрично поступим с f_5 , т.е. возьмем для минора этой матрицы столбцы, соответствующие тем же дифференциалам.

Далее нужно выбрать ребра, соответствующие строкам минора f_2 ; они же будут соответствовать столбцам минора f_4 . Это будет некоторый минимальный набор внутренних ребер, при фиксации длин которых и дополнительном условии жесткости компонент края все вершины многообразия M могут двигаться в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ лишь как целое (условие жесткости компонент края можно также понимать как фиксацию длин всех его ребер). Мы будем говорить, что такие ребра образуют минимальную жесткую конструкцию, и считать ее фиксированной для данного триангулированного многообразия M . Действуя таким способом, мы получаем все миноры, кроме, возможно, минора f_3 , ненулевыми. Минор f_3 приходится строить по остающимся внутренним ребрам и множествам $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, согласно изложенному выше; в случае, если комплекс не является ациклическим, $\min f_3 = 0$.

В разделе 4 нам понадобится также аналогичная минимальная жесткая конструкция для триангулированной поверхности Γ – компоненты края многообразий M_1 и M_2 , по которой они склеиваются в новое многообразие M . По определению она состоит из минимального числа ребер Γ , при фиксации длин которых все вершины Γ могут двигаться в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ только как целое.

ЗАМЕЧАНИЕ. Разумеется, мы уже работали с минимальными жесткими конструкциями в работе [1], не называя их, однако, таким термином. Именно такая конструкция для трехмерного многообразия использовалась при описании миноров f_2 и f_4 между теоремами 3 и 4, а для однокомпонентного края – в разделе 5 работы [1].

Если множества ребер $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ совпадают, то не возникает проблем со знаком τ ввиду симметрии комплекса (ср. замечание 3 в работе [1]). Однако если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ различны, то знак зависит от порядка, в котором мы берем ребра из $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, поэтому эти множества надо считать упорядоченными. Изучение этого вопроса приводит к далеко идущим следствиям (см. ниже).

²⁾В практических вычислениях, например в работах [1], [13], могут использоваться триангуляции, не имеющие внутренних вершин. Однако наши инварианты не зависят от триангуляции внутренней поверхности многообразия, и это позволяет нам считать, что три внутренние вершины существуют.

Инвариант, соответствующий множествам ребер $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, определим формулой (10) из работы [1]:

$$I_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(M) = \frac{\tau \prod(-6V)}{\prod l^2}, \quad (5)$$

где произведение в числителе вычисляется по всем тетраэдрам, а в знаменателе – по внутренним ребрам. Нетрудно убедиться, что в случаях $m = 0$ и $m = 1$ формула (5) дает прежние инварианты из работы [1].

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ И ИСЧИСЛЕНИЕ АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ БЕРЕЗИНА

Напомним [14], что *грассманова алгебра* над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ есть ассоциативная алгебра с единицей, образующими a_i и соотношениями

$$a_i a_j = -a_j a_i, \quad a_i^2 = 0.$$

Любой элемент граассмановой алгебры – полином степени не выше первой по каждому a_i ; в частности, таковы встречающиеся ниже экспоненты, определяемые обычным рядом Тейлора, от которого остается лишь конечное число членов. Размерность граассмановой алгебры как линейного пространства равна 2^N , где N – число образующих, которое у нас всегда будет конечным.

Интеграл Березина [14] в граассмановой алгебре определяется равенствами

$$\int da_i = 0, \quad \int a_i da_i = 1, \quad \int gh da_i = g \int h da_i, \quad (6)$$

если g не зависит от a_i (т.е. образующая a_i не входит в выражение для g); кратный интеграл понимается как повторный.

Обратимся к формуле (5) для инварианта $I_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(M)$. Входящий в нее минор f_3 содержит столбцы и строки, соответствующие внутренним и граничным ребрам. Множество $\mathcal{E}_{\text{внутр}}$ таких внутренних ребер можно считать для данной триангуляции фиксированным (не зависящим от $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ и одинаковым для строк и столбцов) – это все внутренние ребра за вычетом тех, которые задействованы в минорах f_2 и f_4 согласно разделу 2, т.е. $\mathcal{E}_{\text{внутр}}$ состоит из внутренних ребер, не входящих в описанную там минимальную жесткую конструкцию. Мы рассмотрим также минимальную жесткую конструкцию на каждой компоненте края ∂M ³⁾. Множество не вошедших в нее ребер компоненты края обозначим $\mathcal{E}_{\text{край}}^{(k)}$, где k – номер компоненты, и в дальнейшем будем рассматривать в качестве множеств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ только подмножества объединения всех множеств $\mathcal{E}_{\text{край}}^{(k)}$.

Сопоставим каждому ребру i из объединения множеств

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{внутр}} \cup \bigcup_{k=1}^m \mathcal{E}_{\text{край}}^{(k)}$$

по две граассмановых образующих a_i и a_i^* . Обозначим подматрицу f_3 , строки и столбцы которой соответствуют ребрам из $\mathcal{E}$, через $\tilde{f}_3$. Образующие без звездочек будут

³⁾ Это потребуется нам в разделе 4 для склеивания многообразий по компонентам краев.

относиться к строкам $\tilde{f}_3$ (и соответственно к дифференциалам dl_i), а со звездочками – к столбцам (и соответственно к $d\omega_i$ или $d\alpha_i$). Составим билинейную форму

$$f(a, a^*) = \sum_{i,j} (\tilde{f}_3)_{ij} a_i a_j^*, \quad (7)$$

где a обозначает совокупность всех a_i , а a^* – всех a_j^* .

Нетрудно проверить, что минор $\tilde{f}_3$, состоящий из строк с номерами $i_1, \dots, i_n$ и столбцов $j_1, \dots, j_n$ (взятых именно в таком порядке), равен коэффициенту при $\prod_{k=1}^n a_{i_k} a_{j_k}^*$ в полиноме $e^{f(a, a^*)}$, и этот полином не содержит мономов другого вида. Поэтому его естественно назвать *производящей функцией* для миноров $\tilde{f}_3$.

Вообще, производящей функцией в этой статье мы называем полином от двух наборов грассмановых образующих $a_1, \dots, a_N$ и $a_1^*, \dots, a_N^*$, коэффициент которого при $\prod_{k=1}^n a_{i_k} a_{j_k}^*$ равен интересующей нас величине, сопоставленной упорядоченным множествам $\mathcal{C} = (i_1, \dots, i_n)$ и $\mathcal{D} = (j_1, \dots, j_n)$, а коэффициенты при мономах с разным числом a и a^* нулевые. Если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – множества только граничных ребер, как в разделе 2, и требуется составить производящую функцию $\Phi(a_{\text{край}}, a_{\text{край}}^*)$ миноров $\tilde{f}_3$, содержащих все строки и столбцы из $\mathcal{E}_{\text{внутр}}$, а также столбцы из $\mathcal{C}$ и строки из $\mathcal{D}$, то это можно сделать, исключив зависимость от переменных на внутренних ребрах с помощью интеграла Березина:

$$\Phi(a_{\text{край}}, a_{\text{край}}^*) = \int e^{f(a, a^*)} \prod_{i \in \mathcal{E}_{\text{внутр}}} da_i^* da_i. \quad (8)$$

Справедливость соотношения (8) легко проверяется с помощью (6).

Подводя итоги этого раздела, выпишем в следующей теореме производящую функцию для инвариантов (5).

ТЕОРЕМА 2. *Производящая функция инвариантов $I_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(M)$ равна*

$$\mathbf{I}_M(a_{\text{край}}, a_{\text{край}}^*) = \frac{\text{minor } f_1 \text{ minor } f_5}{\text{minor } f_2 \text{ minor } f_4} \frac{\prod (-6V)}{\prod l^2} \Phi(a_{\text{край}}, a_{\text{край}}^*), \quad (9)$$

где вновь произведение в числителе вычисляется по всем тетраэдрам, а в знаменателе – по внутренним ребрам; $\Phi(a_{\text{край}}, a_{\text{край}}^*)$ определяется формулами (8) и (7).

4. ТЕОРЕМА О КОМПОЗИЦИИ ИНВАРИАНТОВ ПРИ СКЛЕИВАНИИ МНОГООБРАЗИЙ

Общий случай склеивания нескольких многообразий по некоторым компонентам их границ может быть сведен к цепочке из следующих двух операций:

- 1) склеивание двух связанных многообразий по одной компоненте края;
- 2) склеивание двух идентичных, но противоположно ориентированных компонент края у одного связанного многообразия.

Напомним, что мы считаем многообразия компактными и ориентированными.

Рассмотрим первую операцию. Пусть многообразия M_1 и M_2 склеиваются в многообразии M по общей компоненте края Γ . Рассмотрим, что при этом происходит

с матрицами, из которых состоят комплексы (4) для M_1 и M_2 . Начнем с того, что матрицы частных производных ($\partial\omega_i/\partial l_j$ или $\partial\alpha_i/\partial l_j$) складываются, при этом каждая из матриц, выписанных для M_1 и M_2 , дополняется нулями в строках и столбцах, отвечающих ребрам, не содержащимся в соответствующем многообразии. Это обусловлено тем, что величины $(\alpha_i)_{M_1}$ и $(\alpha_i)_{M_2}$ — взятые с противоположным знаком двугранные углы, относящиеся к одному ребру i , лежащему в Γ , но к разным многообразиям M_1 и M_2 , — складываются в угол дефекта ω_i (а к каждому углу дефекта добавляется вышеупомянутый нуль). В свою очередь, это вскоре приведет к возникновению интеграла Березина по переменным, отвечающим ребрам из $\mathcal{E}_\Gamma$, где $\mathcal{E}_\Gamma$ — множество всех ребер Γ за вычетом минимальной жесткой конструкции.

Строки подматрицы матрицы f_2 , от которой берется минор в комплексе типа (4), всегда относятся к минимальной жесткой конструкции из внутренних ребер, соединяющей все внутренние вершины и по три вершины на каждой компоненте края, как объяснено в разделе 2. Столбцы указанной подматрицы f_2 соответствуют всем координатам внутренних вершин, кроме шести, и всем качаниям компонент края (см. раздел 2). Минимальная жесткая конструкция для M получается объединением минимальных жестких конструкций для M_1 и M_2 и для Γ . Таким образом, минор f_2 для M содержит те же строки, что и миноры для M_1 и M_2 , а также строки, отвечающие ребрам из Γ . Столбцы минора для M тоже поделим на три группы. Первая отвечает всем дифференциалам координат вершин из Γ , кроме шести: поверхность Γ лежит внутри M , и мы имеем право выбрать шесть координат, столбцы которых не входят в минор f_2 , относящимися к вершинам из Γ . Пусть это будут $dx_A, dy_A, dz_A, dy_B, dz_B, dz_C$. Вторая группа отвечает всем дифференциалам координат внутренних вершин M_1 и качаниям всех компонент края M_1 , кроме Γ . Аналогичные столбцы, относящиеся к M_2 , образуют третью группу.

Блочная структура для минора f_2 , входящего в формулу (9), приведена в таблице.

	Все координаты вершин в Γ , кроме $dx_A, dy_A,$ $dz_A, dy_B, dz_B,$ dz_C	Координаты внутренних вер- шин M_1 и кача- ния компонент края M_1 , кроме Γ	Координаты внутренних вер- шин M_2 и кача- ния компонент края M_2 , кроме Γ
Минимальная жесткая конструкция в Γ	*	0	0
Минимальная жесткая конструкция в M_1	*	*	0
Минимальная жесткая конструкция в M_2	*	0	*

Второй и третий диагональные блоки в таблице могут быть выбраны в качестве миноров f_2 в комплексах (4) для M_1 и M_2 . Этот выбор миноров несколько отличается от “стандартного”, описанного после теоремы 1; соответствующие подматрицы матриц f_1 , от которых нужно брать миноры, при этом тождественны: переводят $a \in \mathfrak{e}(3)$ в такой же элемент a , понимаемый как качание Γ . Разумеется, для f_4 и f_5 выбираем симметричные миноры. После этого нетрудно проверить формулу для производящей функции инвариантов M через функции для M_1 и M_2 , которая может быть сформулирована в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Производящая функция инвариантов многообразия M – результата склейки многообразий M_1 и M_2 по общей компоненте края Γ – задается формулой

$$\mathbf{I}_M = \frac{(-1)^{N_\Gamma} \tau_\Gamma^2}{\prod l^2} \int \mathbf{I}_{M_1} \mathbf{I}_{M_2} \prod_{i \in \mathcal{E}_\Gamma} da_i^* da_i, \quad (10)$$

где произведение в знаменателе вычисляется по ребрам из Γ ; $\tau_\Gamma = \text{minor } g_1 / \text{minor } g_2$ – кручение ациклического комплекса

$$0 \longrightarrow \epsilon(3) \xrightarrow{g_1} (dx)_\Gamma \xrightarrow{g_2} (dl)_{\text{по м.ж.к. в } \Gamma} \longrightarrow 0,$$

N_Γ – число вершин в Γ , “м.ж.к. в Γ ” – используемая нами минимальная жесткая конструкция в Γ , а $\mathcal{E}_\Gamma$ – множество не вошедших в нее ребер из Γ .

Теперь рассмотрим вторую операцию, а именно склеивание двух компонент края одного многообразия, еще одну элементарную операцию склеивания, указанную в начале этого раздела.

ЛЕММА 1. Производящая функция (9) инвариантов многообразия M , полученного в результате второй операции, равна тождественно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма следует из того, что комплекс (4) не может быть точным в члене (dl) (т.е. образ отображения f_2 не может совпадать с ядром отображения f_3), потому что существуют нетривиальные изменения длин ребер, оставляющие нулевыми углы дефекта ω и неизменными величины α , т.е. взятые с противоположным знаком двугранные углы при граничных ребрах, но не получаемые ни из каких смещений координат вершин и/или качаний компонент края M . Эти изменения длин ребер строятся следующим образом. Для любой (замкнутой) петли в M определен ее целочисленный индекс пересечения с Γ , где поверхность Γ теперь представляет собой результат склеивания двух компонент края, взятый с произвольной фиксированной ориентацией. Нетрудно предъявить петлю, для которой этот индекс пересечения равен единице. Таким образом, индекс пересечения определяет эпиморфизм $\pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$. Рассмотрим соответствующее ему накрытие $\widetilde{M}$ многообразия M . На нем естественно действует группа $\mathbb{Z}$. Разместим вершины $\widetilde{M}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ так, чтобы положение любой вершины A' триангуляции $\widetilde{M}$, полученной из другой вершины A действием элемента $1 \in \mathbb{Z}$, получалось из положения A общим для всех вершин евклидовым движением $g \in E(3)$ и чтобы любая компонента $\partial \widetilde{M}$ по сравнению со своим “невозмущенным” положением (обусловленным исходным расположением в $\mathbb{R}^3$ вершин M) была подвергнута евклидову движению только как целое. Изменяя g , получаем нужные нетривиальные изменения длин ребер. ■

В согласии с леммой 1 естественный аналог формулы (10) также дает нулевой результат, как показывает следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть две (изоморфные, одинаково триангулированные, но противоположно ориентированные) компоненты края многообразия M' склеены в одну поверхность Γ , которая лежит в многообразии M – результате склейки M' . Тогда

аналог формулы (10) дает нуль:

$$\mathbf{I}_M = \frac{(-1)^{N_\Gamma} \tau_\Gamma^2}{\prod l^2} \int \mathbf{I}_{M'} \prod_{i \in \mathcal{E}_\Gamma} da_i^* da_i \equiv 0, \quad (11)$$

где произведение в знаменателе вычисляется по ребрам из Γ и считается, что грассмановы переменные на ребрах двух компонент края M' также отождествлены при склеивании этих компонент в одну поверхность Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться, что функция Φ , соответствующая нашей производящей функции $\mathbf{I}_M$ (напомним, что связь между ними определена формулой (9)), является производящей для миноров f_3 , по которым вычисляется кручение такого же комплекса (4), как в доказательстве леммы 1 (для строк минора f_2 берутся ребра из объединения минимальных жестких конструкций для M' и Γ). Поскольку согласно упомянутому доказательству этот комплекс не является ациклическим, все миноры f_3 , а с ними и $\mathbf{I}_M$, обращаются в нуль.

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ И МОДИФИКАЦИЯ АКСИОМ АТЫИ ДЛЯ АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Сравним свойства нашей теории с аксиомами, предложенными Атьей [11], [12] для топологической квантовой теории поля. Как отмечено во введении, наиболее интересное отличие от понимаемых буквально аксиом Атьи возникает, когда мы склеиваем цилиндр $\Sigma \times I$, где Σ – двумерная поверхность, а $I = [0, 1]$, в замкнутое многообразие $\Sigma \times S^1$.

Аксиоматика Атьи в применении к трехмерным многообразиям требует, чтобы каждому двумерному многообразию Σ , которое может играть роль края некоторого трехмерного многообразия M , было сопоставлено векторное пространство V , а каждое многообразие M с краем Σ должно определять вектор в этом пространстве; при этом должны соблюдаться некоторые весьма естественные с точки зрения математической физики требования, описанные ниже.

В изложенной в настоящей статье теории Σ является замкнутым триангулированным ориентированным многообразием, снабженным к тому же параметрами – евклидовыми координатами граничных вершин. Дополнительно мы выбираем на каждой компоненте связности поверхности Σ минимальную жесткую конструкцию из ребер, каждому из оставшихся ребер i сопоставляем пару грассмановых переменных a_i, a_i^* и строим производящую функцию инвариантов M от этих переменных. Разумеется, можно было бы и не удалять минимальную жесткую конструкцию и рассматривать функции от грассмановых переменных, соответствующих всем граничным ребрам, но это выглядит излишним: в разделе 4 мы увидели, что наши производящие функции обеспечивают главную операцию, с которой имеют дело аксиомы Атьи, – склеивание многообразий. Ничто не мешает считать производящую функцию элементом (конечномерного) векторного пространства всех функций от всех a_i, a_i^* . Что касается зависимости от триангуляции, то согласно разделу 4 работы [1] переход к другой триангуляции описывается линейным преобразованием производящих функций. Можно показать, что и изменение минимальной жесткой

конструкции приводит к их линейному преобразованию. Поэтому можно считать, что выбор конкретных триангуляции и минимальной жесткой конструкции соответствует выбору базиса в V .

Далее, согласно аксиомам Атьи, если Σ есть несвязная сумма Σ_1 и Σ_2 , то векторное пространство V равно тензорному произведению соответствующих пространств $V_1 \otimes V_2$. Аналогом этому в нашей теории служит то, что при взятии несвязной суммы множества грассмановых образующих свободно объединяются. Если $\Sigma_1 = \partial M_1$ и $\Sigma_2 = \partial M_2$, то вектор, соответствующий свободному объединению M_1 и M_2 , равен по Атье тензорному произведению векторов для M_1 и M_2 . В нашей теории он получается также без проблем как произведение двух производящих функций – четных (это видно из формул (8) и (9)) элементов грассмановой алгебры.

Следующие две аксиомы Атьи находят параллель в нашей формуле (10). Это, в первую очередь, аксиома инволютивности, согласно которой векторное пространство V заменяется на двойственное пространство V^* при изменении ориентации компоненты края Σ . Естественное билинейное спаривание между пространствами V и V^* используется далее в аксиоме мультипликативности, описывающей поведение инвариантов при композиции кобордизмов. Формула (10), явно описывающая поведение наших инвариантов при композиции кобордизмов, выполняет, таким образом, роль обеих упомянутых аксиом.

Для $\Sigma = \emptyset$ (замкнутое многообразие M) пространство V одномерно. Это находится в согласии с одной из аксиом Атьи, обеспечивающих нетривиальность теории⁴⁾.

Еще одна аксиома Атьи о нетривиальности утверждает, что цилиндру $\Sigma \times I$ должен соответствовать единичный оператор в V , ибо приклеивание такого цилиндра к многообразию не должно менять его инвариантов. Отсюда Атья выводит, что инвариант для $\Sigma \times S^1$ должен быть следом единичного оператора, т.е. размерностью V . В нашей же теории формула (10) никак не может быть сведена к произведению линейных операторов, а (11) – к взятию следа линейного оператора, и, более того, согласно лемме 2 формула (11) всегда дает нуль. Можно ли узнать размерность векторного пространства производящих функций для Σ в нашей теории?

Обозначить подход к решению этой задачи позволяет следующая лемма.

ЛЕММА 3. Пусть $a = (a_1, \dots, a_{2n})$ и $b = (b_1, \dots, b_{2n})$ – непересекающиеся наборы из одинакового четного числа $2n$ грассмановых образующих. Рассмотрим линейный оператор

$$A: f(b) \mapsto \int f(a) K(a, b) da_{2n} \dots da_1, \quad (12)$$

где ядро K – произвольная функция от a и b . Тогда след

$$\text{Tr } A = \int K(a, -a) da_{2n} \dots da_1. \quad (13)$$

⁴⁾ Согласно гипотезе Мартюшева [15] наш инвариант для замкнутого многообразия M выражается через группу гомологий $H_1(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить лемму для функций $K(a, b)$, имеющих вид мономов от a и b . Это делается несложным прямым вычислением. Проиллюстрируем это на следующем примере: если $K(a, b) = a_2 a_3 \dots a_{2n} b_1$, то единственный ненулевой диагональный матричный элемент A возникает для $f(b) = b_1$, причем этот элемент равен единице согласно как (12), так и (13). ■

Таким образом, чтобы найти размерность векторного пространства производящих функций, нужно каким-то образом поменять знаки у переменных на верхнем основании цилиндра $\Sigma \times \{1\} \subset \Sigma \times I$. Оказывается, это вполне осмысленная операция: можно предъявить алгебраический комплекс, инвариант которого, вычисленный по формуле (3), даст желаемое. Подробное изложение этого, вместе с довольно сложными явными вычислениями для конкретных поверхностей Σ рода $1, 2, \dots$, заслуживает, по нашему мнению, отдельной статьи. Здесь мы укажем, что такой комплекс будет подкрученным [15], [16]. Конкретно, этот комплекс использует подкрутку своих дифференциалов следующим представлением группы $\pi_1(\Sigma \times S^1)$: если проекция петли на S^1 делает нечетное число оборотов, то дифференциалы меняют знаки.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Напомним, что с алгебраической точки зрения наши инварианты опираются, с одной стороны, на довольно загадочные дифференциальные формулы, по своей структуре имитирующие движения Пахнера. Эти формулы выписаны во многих наших работах; наиболее поразительной выглядит формула, доказанная в работе [9] с помощью компьютерной алгебры. С другой стороны, мы опираемся на алгебраическую теорию кручений Райдемайстера. Отметим, что и другие авторы указывали на связь кручений Райдемайстера и квантовой теории поля (хотя, насколько известно, на нестрогом математическом уровне): достаточно вспомнить цитируемые Атьей лекции Джонсона [17] или недавнюю работу Барретта и Наиш-Гузман [18].

Что касается результатов настоящей статьи, то представляется интересным с физической точки зрения, как рассмотрение кручений ациклических комплексов геометрического происхождения приводит к появлению антикоммутирующих переменных, т.е., по существу, фермионов. В этом можно увидеть совокупное действие двух причин. Во-первых, каждое граничное ребро либо входит, либо не входит в каждое из множеств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, по которым мы строим инвариант, аналогично фермиону, который либо присутствует в данном состоянии, либо нет. Во-вторых, наши инварианты основаны на кручениях, т.е. на обобщении определителя. Главную роль играют миноры матрицы f_3 , причем при склеивании многообразий эти матрицы складываются. То, что при этом происходит с минорами, не укладывается в рамки простого умножения операторов, ибо тогда возникли бы проблемы со знаками отдельных слагаемых в сумме произведений миноров. Эти знаки, однако, сами собой учитываются, если ввести производящие функции от грассмановых переменных и брать интеграл Березина по переменным, отвечающим склеиваемым ребрам.

Таким образом, мы получаем модификацию аксиом Атьи, которую можно назвать аксиомами Атьи–Березина. Заметим, что сам Атья вполне допускает различные модификации своих аксиом.

В плане дальнейшей работы видятся, с одной стороны, такие большие задачи, как построение дискретного аналога инвариантов Черна–Саймонса, причем в многообразиях любой размерности (напомним еще раз о статьях [6]–[8], посвященных четырехмерным многообразиям, а также о том, что алгебраические комплексы нашего типа можно строить отнюдь не только с помощью евклидовой геометрии [4], [5], [9]). С другой стороны, следует провести массу конкретных вычислений, например тех, о которых упоминалось в конце раздела 5 и которые вполне могут привести к более глубокому пониманию теории.

Благодарности. Я хотел бы вспомнить добрым словом моего научного руководителя, создателя исчисления антикоммутирующих переменных – Феликса Александровича Березина, указавшего мне на широко понимаемую интегрируемость как поле научной деятельности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-96005-р_урал_а).

Список литературы

- [1] И. Г. Корепанов, *ТМФ*, **158**:1 (2009), 98–114.
- [2] I. G. Korepanov, *Invariants of three-dimensional manifolds from four-dimensional Euclidean geometry*, [arXiv: math/0611325](https://arxiv.org/abs/math/0611325).
- [3] И. Г. Корепанов, Е. В. Мартюшев, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 14–19.
- [4] И. Г. Корепанов, *ТМФ*, **138**:1 (2004), 23–34.
- [5] R. M. Kashaev, I. G. Korepanov, E. V. Martyshev, *A finite-dimensional TQFT for three-manifolds based on group $PSL(2, \mathbb{C})$ and cross-ratios*, [arXiv: 0809.4239](https://arxiv.org/abs/0809.4239).
- [6] И. Г. Корепанов, *ТМФ*, **131**:3 (2002), 377–388.
- [7] И. Г. Корепанов, *ТМФ*, **133**:1 (2002), 24–35.
- [8] И. Г. Корепанов, *ТМФ*, **135**:2 (2003), 179–195.
- [9] I. G. Korepanov, *SIGMA*, **1** (2005), 021.
- [10] I. G. Korepanov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**:2 (2001), 196–210.
- [11] M. F. Atiyah, *Publ. Math. IHES*, 1988, № 68, 175–186.
- [12] М. Атья, *Геометрия и физика узлов*, Мир, М., 1995.
- [13] J. Dubois, I. G. Korepanov, E. V. Martyshev, *Euclidean geometric invariant of framed knots in manifolds*, [arXiv: math/0605164](https://arxiv.org/abs/math/0605164).
- [14] Ф. А. Березин, *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*, Изд-во МГУ, М., 1983.
- [15] Е. В. Мартюшев, *Геометрические инварианты трехмерных многообразий, узлов и зацеплений*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ЮУрГУ, Челябинск, 2007; <http://www.susu.ac.ru/file/thesis.pdf>.
- [16] E. V. Martyshev, *Изв. Челябинск. научн. центра*, 2003, № 2(19), 1–5.
- [17] D. Johnson, *A geometric form of Casson's invariant and its connection to Reidemeister torsion*, unpublished.
- [18] J. W. Barrett, I. Naish-Guzman, *The Ponzano–Regge model*, [arXiv: 0803.3319](https://arxiv.org/abs/0803.3319).

Поступила в редакцию 15.06.2008