Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, И. Н. Бозоров, Число связанных состояний
одночастичного гамильтониана на трехмерной решетке,
ТМФ, 2009, том 158, номер 3, 425–443

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6325>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 03:26:28

© 2009 г.

С. Н. Лакаев*, И. Н. Бозоров†

ЧИСЛО СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ОДНОЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА НА ТРЕХМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

Рассмотрен гамильтониан $\hat{h}_{\mu\lambda}$, $\mu, \lambda \geq 0$, описывающий движение одной квантовой частицы на трехмерной решетке во внешнем поле. Исследуются число собственных значений и их расположение в зависимости от значений энергии взаимодействия при $\mu \geq 0$ и $\lambda \geq 0$.

Ключевые слова: одночастичный гамильтониан, непрерывный спектр, виртуальный уровень, собственные значения, оператор Бирмана–Швингера, определитель Фредгольма.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важность пороговых виртуальных уровней гамильтонианов систем двух частиц и их роль в определении числа связанных состояний гамильтонианов систем трех квантовых частиц, движущихся в евклидовом пространстве, впервые указаны Ефимовым в работах [1], [2]. Понятие виртуальных уровней математически строго введено и применено для доказательства бесконечности числа трехчастичных связанных состояний (эффекта Ефимова) в работах [3], [4].

В работе [5] изучена роль виртуальных уровней гамильтонианов систем трех частиц, суженных на определенных подпространствах, удовлетворяющих условию симметрии. В частности, доказана конечность числа связанных состояний гамильтонианов систем трех одинаковых частиц (фермионов). Виртуальные уровни дискретных двухчастичных операторов Шредингера $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, на решетке $\mathbb{Z}^3$ при $k = 0 \in \mathbb{T}^3$ и их роль в определении числа трехчастичных связанных состояний дискретных трехчастичных операторов Шредингера $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^3$, ассоциированных с гамильтонианами систем трех одинаковых и произвольных частиц на решетке $\mathbb{Z}^3$, исследованы в работах [6], [7].

Спектральные свойства одночастичных гамильтонианов h , описывающих движение одной квантовой частицы в потенциальном поле $\hat{v}$, и двухчастичных дискретных

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: slakaev@mail.ru

†Самаркандское отделение АН Республики Узбекистан, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: islomnb@mail.ru

операторов Шредингера $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, ассоциированных с гамильтонианами системы двух одинаковых и произвольных частиц на решетке, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, изучены в работах [8], [9]. В работе [10] для некоторого класса трансфер-матриц гиббсовского поля исследовано существование связанных состояний при некоторых значениях квазиимпульса двух частиц. В работе [8] для широкого класса дискретных двухчастичных операторов Шредингера $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, получен следующий результат: если двухчастичный оператор $h(0)$ на пороге $z = \varepsilon_{\min}(0)$ существенного спектра имеет виртуальный уровень или собственное значение, то при всех $k \neq 0$ оператор $h(k)$ имеет собственное значение ниже порога существенного спектра.

В настоящей работе рассматривается гамильтониан $\hat{h}_{\mu\lambda}$, $\mu, \lambda \geq 0$, описывающий движение одной квантовой частицы на трехмерной решетке во внешнем поле. Полностью исследована зависимость числа собственных значений этого оператора от энергии взаимодействия при $\mu \geq 0$ и $\lambda \geq 0$. Показано, что все собственные значения возникают либо из порогового виртуального уровня (резонанса), либо из пороговых собственных значений при изменении энергии взаимодействия. Описываются также множества значений параметров $\mu, \lambda \geq 0$, где гамильтониан $\hat{h}_{\mu\lambda}$ имеет виртуальный уровень или собственное значение или же виртуальный уровень и собственное значение. Описано множество значений энергии взаимодействия (кривые, точка), где порог $z = 0$ является: а) регулярной точкой непрерывного спектра; б) виртуальным уровнем или двукратным собственным значением; в) и виртуальным уровнем, и собственным значением оператора $\hat{h}_{\mu\lambda}$.

Дано точное описание области значений энергии взаимодействия, где гамильтониан $\hat{h}_{\mu\lambda}$ либо не имеет, либо имеет одно, два, три или четыре собственных значений, лежащих ниже нижнего порога. Более того, доказано, что первое отрицательное собственное значение гамильтониана $\hat{h}_{\mu\lambda}$ возникает только из порогового виртуального уровня (резонанса) при изменении энергии взаимодействия. Этот результат для непрерывного двухчастичного оператора Шредингера был обнаружен Ньютоном (см. [11], с. 1353) и доказан Тамурой (см. лемму 1.1 в [4]) с помощью результата Саймона [12].

Отметим, что дискретный двухчастичный оператор Шредингера $h(0)$ унитарно эквивалентен одночастичному гамильтониану h , поэтому изучение спектральных свойств одночастичных операторов играет особую роль в спектральной теории многочастичных операторов на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2, \dots$.

2. КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАМИЛЬТОНИАНА ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

Пусть $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на трехмерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^3$. В координатном представлении свободный гамильтониан одной квантовой частицы, движущейся на решетке $\mathbb{Z}^3$, ассоциируется с ограниченным самосопряженным оператором, действующим в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ по формуле

$$(\hat{h}_0 \hat{\varphi})(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} \hat{\varepsilon}(x - s) \hat{\varphi}(s), \quad \hat{\varphi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^3),$$

где функция $\hat{\varepsilon}$ определена на решетке $\mathbb{Z}^3$ следующими соотношениями:

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} 3 & \text{при } |s| = 0, \\ -1/2 & \text{при } |s| = 1, \\ 0 & \text{при } |s| > 1, \end{cases}$$

$s = (s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}) \in \mathbb{Z}^3$, $|s| = |s^{(1)}| + |s^{(2)}| + |s^{(3)}|$.

В координатном представлении (полный) гамильтониан одной частицы в потенциальном поле $\hat{v}_{\mu\lambda}$ определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\hat{h}_0$:

$$\hat{h}_{\mu\lambda} = \hat{h}_0 - \hat{v}_{\mu\lambda},$$

где $\hat{v}_{\mu\lambda}$ – оператор умножения на функцию $\hat{v}_{\mu\lambda}$ в $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$, т.е.

$$(\hat{v}_{\mu\lambda}\hat{\varphi})(x) = \hat{v}_{\mu\lambda}(x)\hat{\varphi}(x), \quad \hat{\varphi} \in \ell^2(\mathbb{Z}^3).$$

Функция $\hat{v}_{\mu\lambda}$ определена на $\mathbb{Z}^3$ следующим образом:

$$\hat{v}_{\mu\lambda}(s) = \begin{cases} \mu & \text{при } |s| = 0, \\ \lambda/2 & \text{при } |s| = 1, \\ 0 & \text{при } |s| > 1, \end{cases}$$

где числа $\mu \geq 0$ и $\lambda \geq 0$ одновременно не равны нулю. Оператор $\hat{h}_{\mu\lambda}$ является ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$.

Пусть $\ell_e^2(\mathbb{Z}^3) \subset \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ – подпространство четных функций на $\mathbb{Z}^3$. Заметим, что гильбертово пространство $\ell_e^2(\mathbb{Z}^3)$ инвариантно относительно действия оператора $\hat{h}_{\mu\lambda}$. В дальнейшем сужение $\hat{h}_{\mu\lambda}|_{\ell_e^2(\mathbb{Z}^3)}$ оператора $\hat{h}_{\mu\lambda}$ на $\ell_e^2(\mathbb{Z}^3)$ обозначается также через $\hat{h}_{\mu\lambda}$.

3. ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАМИЛЬТОНИАНА ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

Пусть $\mathbb{T}^3 \equiv (-\pi; \pi]^3$ – трехмерный тор, т.е. куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Отметим, что операции сложения и умножения на действительное число элементов множества $\mathbb{T}^3 \subset \mathbb{R}^3$ понимаются как операции на $\mathbb{R}^3$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^3$.

Пусть $L^2(\mathbb{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$, и $L_e^2(\mathbb{T}^3) \subset L^2(\mathbb{T}^3)$ – подпространство четных функций. Пусть

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^3), \quad (\mathcal{F}\hat{f})(p) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} \hat{f}(s)e^{i(p,s)},$$

– стандартное преобразование Фурье. Заметим, что $\mathcal{F}(\ell_e^2(\mathbb{Z}^3)) \subset L_e^2(\mathbb{T}^3)$. Обозначим через $\mathcal{F}_e$ сужение $\mathcal{F}$ на $\ell_e^2(\mathbb{Z}^3)$. Легко проверить, что $\mathcal{F}_e(\ell_e^2(\mathbb{Z}^3)) = L_e^2(\mathbb{T}^3)$.

В импульсном представлении гамильтониан $h_{\mu\lambda} = \mathcal{F}_e \hat{h}_{\mu\lambda} \mathcal{F}_e^{-1}$ (см. [8]) является ограниченным самосопряженным оператором, действующим в гильбертовом пространстве $L_e^2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$h_{\mu\lambda} = h_0 - v_{\mu\lambda},$$

где h_0 – оператор умножения на функцию ε :

$$(h_0 f)(p) = \varepsilon(p)f(p), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^{(i)}), \quad f \in L_e^2(\mathbb{T}^3), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbb{T}^3,$$

$v_{\mu\lambda}$ – неотрицательный интегральный оператор и его ранг $r \leq 4$:

$$(v_{\mu\lambda} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \left(\mu + \lambda \sum_{i=1}^3 \cos p^{(i)} \cos t^{(i)} \right) f(t) dt, \quad f \in L_e^2(\mathbb{T}^3).$$

4. НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР И ВИРТУАЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Поскольку возмущенный оператор $v_{\mu\lambda}$ есть интегральный оператор и его ранг $r \leq 4$, согласно теореме Вейля (см. [13]) непрерывный спектр $\sigma_{\text{cont}}(h_{\mu\lambda})$ оператора $h_{\mu\lambda}$ не зависит от параметров $\mu, \lambda \geq 0$ и совпадает со спектром $\sigma(h_0)$ оператора h_0 . Таким образом, имеет место равенство

$$\sigma_{\text{cont}}(h_{\mu\lambda}) = \sigma(h_0) = [0, 6].$$

Рассмотрим следующую ортонормированную систему в пространстве $L_e^2(\mathbb{T}^3)$:

$$\alpha_0 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}, \quad \alpha_i(p) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{3/2}} \cos p^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Оператор $v_{\mu\lambda}$ представляется в виде

$$v_{\mu\lambda} f = \mu \alpha_0(f, \alpha_0) + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^3 (f, \alpha_i) \alpha_i,$$

где $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в $L_e^2(\mathbb{T}^3)$.

Из неотрицательности оператора $v_{\mu\lambda} \geq 0$ следует, что существует квадратный корень $v_{\mu\lambda}^{1/2} \geq 0$. Оператор $v_{\mu\lambda}^{1/2}$ действует в $L_e^2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$(v_{\mu\lambda}^{1/2} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{T}^3} v_{\mu\lambda}^{1/2}(p - q) f(q) dq,$$

где

$$v_{\mu\lambda}^{1/2}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} \hat{v}_{\mu\lambda}^{1/2}(s) e^{i(p,s)},$$

$\hat{v}_{\mu\lambda}^{1/2}$ – квадратный корень положительной функции $\hat{v}_{\mu\lambda}$.

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, а $r_0(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 6]$, – резольвента оператора h_0 .

Поскольку функция $\varepsilon(q) = \varepsilon(q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos q^{(i)})$ симметрична относительно перестановки переменных $q^{(i)}$ и $q^{(j)}$, $i, j = 1, 2, 3$, интегралы

$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q^{(i)} dq}{\varepsilon(q) - z}, \quad \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 q^{(i)} dq}{\varepsilon(q) - z}, \quad \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q^{(i)} \cos q^{(j)} dq}{\varepsilon(q) - z}$$

не зависят от $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$. Положим

$$\begin{aligned} a(z) &= (\alpha_0, r_0(z)\alpha_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{\varepsilon(q) - z}, \\ b(z) &= (\alpha_0, r_0(z)\alpha_i) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q^{(i)} dq}{\varepsilon(q) - z}, \\ c(z) &= (\alpha_i, r_0(z)\alpha_i) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 q^{(i)} dq}{\varepsilon(q) - z}, \\ d(z) &= (\alpha_i, r_0(z)\alpha_j) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q^{(i)} \cos q^{(j)} dq}{\varepsilon(q) - z}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$z < 0, i, j = 1, 2, 3, i \neq j$.

Для любых фиксированных $\mu, \lambda \geq 0$ и $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 6]$ определим конечномерный (ранга $r \leq 4$) интегральный оператор Бирмана–Швингера $G_{\mu\lambda}(z)$, действующий в пространстве $L_e^2(\mathbb{T}^3)$ по формуле $G_{\mu\lambda}(z) = v_{\mu\lambda}^{1/2} r_0(z) v_{\mu\lambda}^{1/2}$. Оператор $G_{\mu\lambda}(z)$ представим в виде

$$\begin{aligned} G_{\mu\lambda}(z)f &= \left(\mu a(z)(f, \alpha_0) + \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z) \sum_{i=1}^3 (f, \alpha_i) \right) \alpha_0 + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left[\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)(f, \alpha_0) + \frac{\lambda}{2} c(z)(f, \alpha_i) + \frac{\lambda}{2} d(z) \sum_{i \neq j=1}^3 (f, \alpha_j) \right] \alpha_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поскольку функция ε имеет невырожденный минимум в точке $q = 0$ и $\varepsilon(0) = \min_{q \in \mathbb{T}^3} \varepsilon(q)$, существуют следующие конечные пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0-} a(z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dq}{\varepsilon(q)}, & \lim_{z \rightarrow 0-} b(z) &= \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q^{(i)} dq}{\varepsilon(q)}, \\ \lim_{z \rightarrow 0-} c(z) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 q^{(i)} dq}{\varepsilon(q)}, & \lim_{z \rightarrow 0-} d(z) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q^{(i)} \cos q^{(j)} dq}{\varepsilon(q)}. \end{aligned}$$

Поэтому, хотя резольвента $r_0(z)$ не существует в точке $z = 0$, ограниченный самосопряженный оператор $G_{\mu\lambda}(0)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{\mu\lambda}(0)f &= \left(\mu a(0)(f, \alpha_0) + \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(0) \sum_{i=1}^3 (f, \alpha_i) \right) \alpha_0 + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left[\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(0)(f, \alpha_0) + \frac{\lambda}{2} c(0)(f, \alpha_i) + \frac{\lambda}{2} d(0) \sum_{i \neq j=1}^3 (f, \alpha_j) \right] \alpha_i. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет собственное значение $z \leq 0$, т.е. $\text{Ker}(h_{\mu\lambda} - zI) \neq 0$ тогда и только тогда, когда компактный оператор $G_{\mu\lambda}(z)$ в $L_e^2(\mathbb{T}^3)$ имеет собственное значение 1 и существует функция $\psi \in \text{Ker}(G_{\mu\lambda}(z) - I)$ такая, что

$$f(\cdot) = \frac{(v_{\mu\lambda}^{1/2} \psi)(\cdot)}{\varepsilon(\cdot) - z} \in L_e^2(\mathbb{T}^3).$$

В этом случае $f \in \text{Ker}(h_{\mu\lambda} - zI)$. Кроме того, если $z < 0$, то

$$\dim \text{Ker}(h_{\mu\lambda} - zI) = \dim \text{Ker}(G_{\mu\lambda}(z) - I), \quad (4.3)$$

$$\text{Ker}(h_{\mu\lambda} - zI) = \left\{ f : f(\cdot) = \frac{(v_{\mu\lambda}^{1/2}\psi)(\cdot)}{\varepsilon(\cdot) - z}, \psi \in \text{Ker}(G_{\mu\lambda}(z) - I) \right\}.$$

В случае порогового собственного значения $z = 0$, равенство (4.3) необходимо заменить неравенством

$$\dim \text{Ker}(h_{\mu\lambda}) \leq \dim \text{Ker}(G_{\mu\lambda}(0) - I).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть порог $z = 0$ непрерывного спектра $\sigma_{\text{cont}}(h_{\mu\lambda})$ *особой точкой непрерывного спектра* (ОТНС) оператора $h_{\mu\lambda}$, если число 1 является собственным значением оператора $G_{\mu\lambda}(0)$. Если же число 1 не является собственным значением оператора $G_{\mu\lambda}(0)$, то точка $z = 0$ называется *регулярной точкой непрерывного спектра* (РТНС) оператора $h_{\mu\lambda}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет *виртуальный уровень* (в левом пороге непрерывного спектра), если число 1 является (простым или кратным) собственным значением оператора $G_{\mu\lambda}(0)$ и по крайней мере (с точностью до константы) одна из соответствующих собственных функций ψ удовлетворяет условию

$$\frac{v_{\mu\lambda}^{1/2}\psi}{\varepsilon} \in L_e^1(\mathbb{T}^3) \setminus L_e^2(\mathbb{T}^3).$$

Это означает, что

$$1 \leq \dim \text{Ker}(G_{\mu\lambda}(0) - I) \geq \dim \text{Ker}(h_{\mu\lambda}) + 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Наше определение виртуального уровня эквивалентно определению виртуального уровня двухчастичного оператора Шредингера в евклидовом пространстве и на решетке.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. По определению виртуальный уровень $z = 0$ является ОТНС оператора $h_{\mu\lambda}$. ОТНС может быть собственным значением (см. ниже утверждения В1 и В3 теоремы) оператора $h_{\mu\lambda}$. Более того, ОТНС может быть одновременно виртуальным уровнем и собственным значением (см. утверждение В2 теоремы) оператора $h_{\mu\lambda}$.

5. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для любых фиксированных параметров $\mu, \lambda \geq 0$ под определителем оператора $h_{\mu\lambda} - zI$ будем понимать определитель Фредгольма оператора $I - G_{\mu\lambda}(z)$:

$$\Delta(\mu, \lambda; z) := \det(h_{\mu\lambda} - zI) := \det(I - G_{\mu\lambda}(z)). \quad (5.1)$$

Очевидно, что для любых $\mu, \lambda \geq 0$ функция $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus [0, 6]$.

ЛЕММА 1. При всех $\mu, \lambda \geq 0$ и $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 6]$ справедливы следующие представления:

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) (\Delta^{(22)}(\lambda; z))^2, \quad (5.2)$$

$$\Delta(\mu, 0; z) = 1 - \mu a(z), \quad \Delta(0, \lambda; z) = \Delta^{(21)}(\lambda; z) (\Delta^{(22)}(\lambda; z))^2, \quad (5.3)$$

где

$$\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) = \Delta(\mu, 0; z) \Delta^{(21)}(\lambda; z) - \frac{3\mu\lambda}{2} b^2(z), \quad (5.4)$$

$$\Delta^{(21)}(\lambda; z) = 1 - \frac{\lambda}{2} (c(z) + 2d(z)), \quad \Delta^{(22)}(\lambda; z) = 1 - \frac{\lambda}{2} (c(z) - d(z)). \quad (5.5)$$

Пусть $\mu^0 = (a(0))^{-1}$, $\lambda_1^0 = (3\sqrt{2}b(0)/2)^{-1}$, $\lambda_2^0 = 2(c(0) - d(0))^{-1}$. Заметим, что $\lambda_2^0 > \lambda_1^0$ (см. ниже следствие 1).

Для каждого $\mu > \mu^0$ (соответственно $\lambda > \lambda_1^0$) оператор $h_{\mu 0}$ (соответственно $h_{0\lambda}$) имеет отрицательное собственное значение $\zeta_1(\mu)$ (соответственно $\zeta_2(\lambda)$) (см. ниже предложение 3). Положим $\zeta_{\min}(\mu, \lambda) = \min\{\zeta_1(\mu), \zeta_2(\lambda)\}$, $\zeta_{\max}(\mu, \lambda) = \max\{\zeta_1(\mu), \zeta_2(\lambda)\}$. Пусть (см. рисунок)

$$G_0 = \left\{ (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_+^2 : \Delta^{(1)}(\mu, \lambda) = 1 - \mu a(0) - \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda (3 - \mu) b(0) > 0, \right. \\ \left. 0 < \mu < \mu^0, 0 < \lambda < \lambda_1^0 \right\},$$

$$G_{11}^{(0)} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_+^2 : \Delta^{(1)}(\mu, \lambda) = 0, 0 < \mu < \mu^0, 0 < \lambda < \lambda_1^0\},$$

$$G_1 = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_+^2 : \Delta^{(1)}(\mu, \lambda) < 0\},$$

$$G_{12}^{(0)} = \left\{ (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_+^2 : \Delta^{(1)}(\mu, \lambda) = 0, \mu > 3, \lambda > \frac{\sqrt{2}a(0)}{b(0)} \right\},$$

$$G_2 = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_+^2 : \Delta^{(1)}(\mu, \lambda) > 0, \mu > \mu^0, \lambda > \lambda_1^0\}.$$

Следующая теорема дает полное представление о наличии и количестве виртуальных уровней или отрицательных собственных значений при всех $\mu, \lambda \geq 0$.

ТЕОРЕМА. *Имеют место следующие утверждения.*

A1. Пусть $0 < \lambda \leq \lambda_1^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_0$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений в интервале $(-\infty, 0)$ и точка $z = 0$ является РТНС оператора $h_{\mu\lambda}$.

A2. Пусть $0 < \lambda \leq \lambda_1^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{11}^{(0)}$. Тогда число $z = 0$ является виртуальным уровнем оператора $h_{\mu\lambda}$ и оператор $h_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений в интервале $(-\infty, 0)$.

A3. Пусть $0 < \lambda < \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_1$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет единственное собственное значение $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$. При этом выполняется неравенство $z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{\min}(\mu, \lambda)$ и точка $z = 0$ является РТНС оператора $h_{\mu\lambda}$.

B1. Пусть $\lambda_1^0 < \lambda < \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{12}^{(0)}$. Тогда число $z = 0$ является виртуальным уровнем оператора $h_{\mu\lambda}$. Кроме того, оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет единственное собственное значение $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$.

B2. Пусть $\lambda_1^0 < \lambda < \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_2$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет два собственных значения $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$ и $z^{(4)}(\mu, \lambda) < 0$. При этом выполняются соотношения

$$z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{\min}(\mu, \lambda) \leq \zeta_{\max}(\mu, \lambda) < z^{(4)}(\mu, \lambda)$$

и точка $z = 0$ является РТНС оператора $h_{\mu\lambda}$.

B1. Пусть $\lambda = \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_1$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет единственное собственное значение $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$ и нуль является двукратным собственным значением оператора $h_{\mu\lambda}$.

B2. Пусть $\lambda = \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{12}^{(0)}$. Тогда число $z = 0$ является виртуальным уровнем и двукратным собственным значением оператора $h_{\mu\lambda}$. Кроме того, оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет единственное собственное значение $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$.

B3. Пусть $\lambda = \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_2$. Тогда число $z = 0$ является двукратным собственным значением оператора $h_{\mu\lambda}$. Кроме того, оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет два собственных значения $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$ и $z^{(4)}(\mu, \lambda) < 0$. При этом выполняются соотношения

$$z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{\min}(\mu, \lambda) \leq \zeta_{\max}(\mu, \lambda) < z^{(4)}(\mu, \lambda).$$

G1. Пусть $\lambda > \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_1$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет три собственных значения (с учетом кратности) $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$ и $z^{(2)}(\lambda) = z^{(3)}(\lambda) < 0$. При этом $z^{(1)}(\mu, \lambda) < z^{(2)}(\lambda) = z^{(3)}(\lambda)$ и точка $z = 0$ является РТНС оператора $h_{\mu\lambda}$.

G2. Пусть $\lambda > \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{12}^{(0)}$. Тогда число $z = 0$ является виртуальным уровнем оператора $h_{\mu\lambda}$. Кроме того, оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет три собственных значения (с учетом кратности) $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$ и $z^{(2)}(\lambda) = z^{(3)}(\lambda) < 0$. При этом $z^{(1)}(\mu, \lambda) < z^{(2)}(\lambda) = z^{(3)}(\lambda)$.

G3. Пусть $\lambda > \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_2$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет четыре собственных значения (с учетом кратности) $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$, $z^{(2)}(\lambda) = z^{(3)}(\lambda) < 0$, $z^{(4)}(\mu, \lambda) < 0$.

При этом $z^{(1)}(\mu, \lambda) < z^{(2)}(\lambda) = z^{(3)}(\lambda)$, $z^{(1)}(\mu, \lambda) < z^{(4)}(\mu, \lambda)$ и точка $z = 0$ является РТНС оператора $h_{\mu\lambda}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В п. А2 теоремы утверждается, что порог $z = 0$ является виртуальным уровнем оператора $h_{\mu\lambda}$ при некоторых $\mu, \lambda \geq 0$. В п. В1 показано, что порог $z = 0$ является двукратным собственным значением, а в п. В2 показано, что порог $z = 0$ является одновременно и виртуальным уровнем, и собственным значением.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Утверждения п. А2 и А3 теоремы означают, что первое отрицательное собственное значение оператора $h_{\mu\lambda}$ рождается только из порогового виртуального уровня при изменении $\mu, \lambda \geq 0$. В п. В1 и В2 утверждается, что второе отрицательное собственное значение оператора $h_{\mu\lambda}$ также рождается из порогового виртуального уровня. Утверждения п. В3 и Г1 показывают, что отрицательные собственные значения оператора $h_{\mu\lambda}$ возникают из кратного порогового собственного значения $z = 0$ при изменении $\mu, \lambda \geq 0$. Утверждения п. В2, Г2 и Г3 указывают, что отрицательные собственные значения оператора $h_{\mu\lambda}$ появляются как из порогового виртуального уровня, так и из пороговых и собственных значений $z = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Кроме того, в теореме показано, что множество значений параметров $\mu, \lambda \geq 0$, где порог $z = 0$ является либо виртуальным уровнем, либо собственным значением, есть некоторая кривая. Множество значений параметров $\mu, \lambda \geq 0$, где порог $z = 0$ является и виртуальным уровнем, и собственным значением оператора $h_{\mu\lambda}$, есть единственная точка.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Аналогичная теорема описывает зависимость числа собственных значений и их расположения от параметров μ и λ при всех $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. При этом собственные значения оператора $h_{\mu\lambda}$ лежат как левее непрерывного спектра, так и правее его. В случае $\mu, \lambda \leq 0$ собственные значения оператора $h_{\mu\lambda}$ лежат только правее непрерывного спектра.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Дальнейшая часть работы посвящена доказательству теоремы.

Обозначим через $L_4 \subset L_e^2(\mathbb{T}^3)$ четырехмерное подпространство, натянутое на векторы 1 и $\cos p^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Заметим, что оператор $v_{\mu\lambda}$ отображает гильбертово пространство $L_e^2(\mathbb{T}^3)$ в подпространство L_4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Как следует из (4.2), оператор $G_{\mu\lambda}(z)$ отображает все пространство $L_e^2(\mathbb{T}^3)$ в подпространство L_4 , которое является инвариантным относительно оператора $G_{\mu\lambda}(z)$. Поэтому сужение $G_{\mu\lambda}(z)|_{L_4}$ оператора $G_{\mu\lambda}(z)$ на L_4 представляется в виде матрицы

$$G_{\mu\lambda}(z)|_{L_4} = \begin{pmatrix} \mu a(z) & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} b(z) & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} b(z) & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} b(z) \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} b(z) & \frac{\lambda}{2} c(z) & \frac{\lambda}{2} d(z) & \frac{\lambda}{2} d(z) \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} b(z) & \frac{\lambda}{2} d(z) & \frac{\lambda}{2} c(z) & \frac{\lambda}{2} d(z) \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} b(z) & \frac{\lambda}{2} d(z) & \frac{\lambda}{2} d(z) & \frac{\lambda}{2} c(z) \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что определитель Фредгольма оператора $(I - G_{\mu\lambda}(z))|_{L_4}$ имеет вид

$$\det((I - G_{\mu\lambda}(z))|_{L_4}) = \Delta(\mu, \lambda; z) = \begin{vmatrix} 1 - \mu a(z) & -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} b(z) & -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} b(z) & -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} b(z) \\ -\frac{\mu}{\sqrt{2}} b(z) & 1 - \frac{\lambda}{2} c(z) & -\frac{\lambda}{2} d(z) & -\frac{\lambda}{2} d(z) \\ -\frac{\mu}{\sqrt{2}} b(z) & -\frac{\lambda}{2} d(z) & 1 - \frac{\lambda}{2} c(z) & -\frac{\lambda}{2} d(z) \\ -\frac{\mu}{\sqrt{2}} b(z) & -\frac{\lambda}{2} d(z) & -\frac{\lambda}{2} d(z) & 1 - \frac{\lambda}{2} c(z) \end{vmatrix},$$

где I – единичный оператор в L_4 . Вычисляя этот определитель, получаем представление (5.2).

Связь между собственными значениями самосопряженного оператора $h_{\mu\lambda}$ и нулями определителя Фредгольма $\Delta(\mu, \lambda; z)$ устанавливается следующей леммой (см. [14]).

ЛЕММА 2. Для любых $\mu, \lambda \geq 0$ число $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 6]$ является m -кратным собственным значением оператора $h_{\mu\lambda}$ тогда и только тогда, когда оно является m -кратным нулем функции $\Delta(\mu, \lambda; z) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1. Функции a, b, c, d аналитичны в $\mathbb{C} \setminus [0, 6]$, положительны, монотонно возрастают в интервале $(-\infty, 0)$, и имеет место неравенство $c(z) > d(z)$ при $z \in (-\infty, 0)$.

2. Для функций a, b, c и d имеют место следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} a(z) &= a(0) - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sqrt{-z} + O(-z), & z \rightarrow 0-, \\ b(z) &= b(0) - \frac{1}{2\pi} \sqrt{-z} + O(-z), & z \rightarrow 0-, \\ c(z) &= c(0) - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{-z} + O(-z), & z \rightarrow 0-, \\ d(z) &= d(0) - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sqrt{-z} + O(-z), & z \rightarrow 0-. \end{aligned} \tag{6.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Положительность функций a и c , определяемых (4.1), непосредственно вытекает из неотрицательности подынтегральных функций и монотонности интеграла Лебега.

Представим функции b и d в виде

$$\begin{aligned} b(z) &= \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos q^{(1)}}{A - \cos q^{(1)}} dq^{(1)} \right] dq^{(2)} dq^{(3)}, \\ d(z) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos q^{(1)} \cos q^{(2)} dq^{(1)} dq^{(2)}}{B - (\cos q^{(1)} + \cos q^{(2)})} \right] dq^{(3)}, \end{aligned}$$

где $A = 3 - \cos q^{(2)} - \cos q^{(3)} - z > 0$, $B = 3 - \cos q^{(3)} - z > 0$. Представляя интегралы в квадратных скобках как сумму интегралов по отрезкам $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$,

делая замену переменных $q^{(1)} := q^{(1)} - \pi$, $q^{(2)} := q^{(2)} - \pi$ и используя тождество $\cos(x - \pi) = -\cos x$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos q^{(1)} dq^{(1)}}{A - \cos q^{(1)}} &= \int_0^{\pi} \frac{2 \cos^2 q^{(1)} dq^{(1)}}{A^2 - \cos^2 q^{(1)}} > 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos q^{(1)} \cos q^{(2)} dq^{(1)} dq^{(2)}}{B - (\cos q^{(1)} + \cos q^{(2)})} &= \\ = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{8B \cos^2 q^{(1)} \cos^2 q^{(2)} dq^{(1)} dq^{(2)}}{[B^2 - (\cos q^{(1)} + \cos q^{(2)})^2][B^2 - (\cos q^{(1)} - \cos q^{(2)})^2]} > 0. \end{aligned}$$

Из неотрицательности подынтегральной функции и монотонности интеграла Лебега вытекают положительность функций b и d .

Неравенство $c(z) > d(z)$ вытекает из неравенства Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} d(z) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q^{(1)} \cos q^{(2)} dq}{\varepsilon(q) - z} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon(q)} - z} \frac{\cos q^{(2)}}{\sqrt{\varepsilon(q)} - z} dq < \\ &< \frac{2}{(2\pi)^3} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 q^{(1)} dq}{\varepsilon(q) - z} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 q^{(2)} dq}{\varepsilon(q) - z} \right)^{1/2} = c(z). \end{aligned}$$

Производные функций a , b , c и d положительны. Поэтому эти функции являются монотонно возрастающими в интервале $(-\infty, 0)$.

Доказательство п. 2 аналогично доказательству леммы 3.5 из работы [15].

Из утверждений предложения 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Функции $c - d$ и $c + 2d$ положительны, монотонно возрастают в интервале $(-\infty, 0)$, и для любых $\mu, \lambda \geq 0$ имеют место равенства (асимптотические разложения)*

$$\Delta^{(22)}(\lambda; z) = \Delta^{(22)}(\lambda; 0) + O(-z), \quad z \rightarrow 0-, \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) &= 1 - \mu a(0) - \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda (3 - \mu) b(0) + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4\pi} [\mu + 3\lambda - \mu\lambda] \sqrt{-z} + O(-z), \quad z \rightarrow 0-. \end{aligned} \quad (6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из положительности функций c , d и неравенства $c(z) > d(z)$ вытекает положительность функций $c - d$ и $c + 2d$ в интервале $(-\infty, 0)$. Поскольку производные функций $c - d$ и $c + 2d$ положительны, эти функции являются монотонно возрастающими в интервале $(-\infty, 0)$.

Из формул (5.5) и (6.1) получаем (6.2), а из формул (5.4) и (6.1) имеем

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) &= (1 - \mu a(0)) \left(1 - \frac{\lambda}{2} (c(0) + 2d(0)) \right) - \frac{3\mu\lambda}{2} b^2(0) + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \left[(\mu + 3\lambda) - \left(3a(0) - 3\sqrt{2}b(0) + \frac{1}{2} (c(0) + 2d(0)) \right) \mu\lambda \right] \sqrt{-z} + \end{aligned}$$

$$+ O(-z), \quad z \rightarrow 0-. \quad (6.4)$$

Из равенств (4.1) и (6.1) следуют равенства

$$\begin{aligned} a(0) - \frac{\sqrt{2}}{2}b(0) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1 - \cos q^{(i)} dq}{\varepsilon(q)} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sum_{i=1}^3 (1 - \cos q^{(i)}) dq}{\varepsilon(q)} = \frac{1}{3}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} c(0) + 2d(0) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 q^{(1)} + 2 \cos q^{(1)} \cos q^{(2)} dq}{\varepsilon(q)} = \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos^2 q^{(1)} + \cos q^{(1)} \cos q^{(2)} + \cos q^{(1)} \cos q^{(3)} dq}{\varepsilon(q)} = \\ &= -\frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q^{(1)} (3 - \cos q^{(1)} - \cos q^{(2)} - \cos q^{(3)} - 3) dq}{\varepsilon(q)} = \\ &= -\frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \cos q^{(1)} dq + 3 \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q^{(1)} dq}{\varepsilon(q)} = 3\sqrt{2}b(0). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Пользуясь равенствами (6.4)–(6.6), получаем (6.3).

Заметим, что в силу леммы 2 и представления (5.2) исследование нулей функции $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ сводится к изучению нулей функций $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ и $\Delta^{(22)}(\lambda; \cdot)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1. Пусть $0 < \lambda < \lambda_2^0$. Тогда функция $\Delta^{(22)}(\lambda; \cdot)$ не имеет нулей на интервале $(-\infty, 0]$.

2. Пусть $\lambda = \lambda_2^0$. Тогда $z = 0$ – единственный нуль функции $\Delta^{(22)}(\lambda; \cdot)$ на интервале $(-\infty, 0]$.

3. Пусть $\lambda > \lambda_2^0$. Тогда $\Delta^{(22)}(\lambda; \cdot)$ имеет единственный нуль $z^{(2)}(\lambda) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. В силу предложения 1 при фиксированном $\lambda > 0$ функция $\Delta^{(22)}(\lambda; \cdot)$ непрерывна и монотонно убывает на интервале $(-\infty, 0]$. Кроме того, имеют место равенства

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta^{(22)}(\lambda; z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow 0-} \Delta^{(22)}(\lambda; z) = \Delta^{(22)}(\lambda; 0) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_2^0}.$$

Следовательно, $\Delta^{(22)}(\lambda; 0) > 0$ при $0 < \lambda < \lambda_2^0$. Отсюда для любого $z \leq 0$ имеем

$$\Delta^{(22)}(\lambda; z) \geq \Delta^{(22)}(\lambda; 0) > 0.$$

2. Пусть $\lambda = \lambda_2^0$. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0-} \Delta^{(22)}(\lambda; z) &= \Delta^{(22)}(\lambda; 0) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_2^0} = 0, \\ \Delta^{(22)}(\lambda; z) &> \Delta^{(22)}(\lambda; 0) = 0 \quad \text{при всех } z < 0. \end{aligned}$$

3. Пусть $\lambda > \lambda_2^0$. Функция $\Delta^{(22)}(\lambda; \cdot)$ непрерывна, монотонно убывает на интервале $(-\infty, 0]$ и выполняются соотношения

$$\lim_{z \rightarrow 0-} \Delta^{(22)}(\lambda; z) = \Delta^{(22)}(\lambda; 0) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_2^0} < 0.$$

Тогда существует единственное число $z^{(2)}(\lambda) < 0$ такое, что

$$\Delta^{(22)}(\lambda; z^{(2)}(\lambda)) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1. Пусть $0 < \mu < \mu^0$ (соответственно $0 < \lambda < \lambda_1^0$). Тогда функция $\Delta(\mu, 0; \cdot)$ (соответственно $\Delta^{(21)}(\lambda; \cdot)$) не имеет нулей на интервале $(-\infty, 0]$.

2. Пусть $\mu = \mu^0$ (соответственно $\lambda = \lambda_1^0$). Тогда $z = 0$ является единственным нулем функции $\Delta(\mu, 0; \cdot)$ (соответственно $\Delta^{(21)}(\lambda; \cdot)$) на $(-\infty, 0]$.

3. Пусть $\mu > \mu^0$ (соответственно $\lambda > \lambda_1^0$). Тогда функция $\Delta(\mu, 0; \cdot)$ (соответственно $\Delta^{(21)}(\lambda; \cdot)$) имеет единственный нуль $\zeta_1(\mu) < 0$ (соответственно $\zeta_2(\lambda) < 0$), т.е.

$$\Delta(\mu, 0; \zeta_1(\mu)) = 0 \quad (\text{соответственно } \Delta^{(21)}(\lambda; \zeta_2(\lambda)) = 0). \quad (6.7)$$

Доказательство предложения 3 аналогично доказательству предложения 2.

ЛЕММА 3. Оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет не более четырех собственных значений (с учетом кратности), которые лежат левее точки $z = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0 \in (-\infty, 0)$. Область значений оператора $G_{\mu\lambda}(z_0)$ есть подпространство L_4 и его размерность не превосходит 4. Поэтому он имеет не более четырех собственных значений (с учетом кратности), лежащих в интервале $(1, +\infty)$. В силу принципа Бирмана–Швингера число собственных значений оператора $h_{\mu\lambda}$, лежащих левее точки $z < 0$, совпадает с числом собственных значений оператора $G_{\mu\lambda}(z)$, лежащих правее точки 1 (см. [16], [17]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любых $\mu, \lambda \geq 0$ функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ имеет не более двух нулей, лежащих на интервале $(-\infty, 0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждений лемм 2 и 3 следует, что для любых фиксированных $\mu, \lambda \geq 0$ число нулей функции $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ на интервале $(-\infty, 0]$ не превосходит 4, а из равенства (5.5) и предложения 2 следует, что $\Delta^{(22)}(\lambda; \cdot)$ может иметь единственный нуль на интервале $(-\infty, 0]$. Из равенств (5.2), (5.4) и (5.5) следует, что функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ может иметь два нуля на интервале $(-\infty, 0]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1. Пусть $(\mu, \lambda) \in G_0$. Тогда функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ не имеет нулей на интервале $(-\infty, 0]$.

2. Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{11}^{(0)}$. Тогда $z = 0$ является единственным нулем функции $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ на интервале $(-\infty, 0]$.

3. Пусть $(\mu, \lambda) \in G_1$. Тогда функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ имеет единственный нуль $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$. При этом $z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{\min}(\mu, \lambda)$.

4. Пусть $(\mu, \lambda) \in G_{12}^{(0)}$. Тогда функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ имеет только два нуля $z = 0$ и $z = z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$.

5. Пусть $(\mu, \lambda) \in G_2$. Тогда функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ имеет только два нуля $z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$ и $z^{(4)}(\mu, \lambda) < 0$. При этом выполняются соотношения

$$z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{\min}(\mu, \lambda) \leq \zeta_{\max}(\mu, \lambda) < z^{(4)}(\mu, \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $z \leq 0$. Функции $\Delta(\mu, 0; \cdot)$ и $\Delta^{(21)}(\lambda; \cdot)$ монотонно убывают на интервале $(-\infty, 0]$ и в силу предложения 3 имеют место неравенства

$$\Delta(\mu, 0; z) \geq \Delta(\mu, 0; 0) > 0, \quad \Delta^{(21)}(\lambda; z) \geq \Delta^{(21)}(\lambda; 0) > 0 \quad \text{и} \quad b(z) \leq b(0).$$

Отсюда, из (5.4), а также в силу условия 1 предложения имеем

$$\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) \geq \Delta(\mu, 0; 0)\Delta^{(21)}(\lambda; 0) - \frac{3\mu\lambda}{2}b^2(0) = \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; 0) > 0.$$

Следовательно, функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ не имеет нулей на интервале $(-\infty, 0]$.

2. Из разложения (6.3) и в силу условия 2 предложения выполняется равенство

$$\lim_{z \rightarrow 0-} \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) = \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; 0) = 0.$$

Из доказательства п. 1 имеем

$$\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) > \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; 0) = 0 \quad \text{при} \quad z \in (-\infty, 0).$$

Следовательно, функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ не имеет нулей на интервале $(-\infty, 0)$.

3. Пусть $z \leq 0$. Функции $\Delta(\mu, 0; \cdot)$ и $\Delta^{(21)}(\lambda; \cdot)$ монотонно убывают на $(-\infty, 0]$, поэтому для любого $z < \zeta_{\min}(\mu, \lambda)$ имеем

$$\Delta(\mu, 0; z) > \Delta(\mu, 0; \zeta_1(\mu)) = 0, \quad \Delta^{(21)}(\lambda; z) > \Delta^{(21)}(\lambda; \zeta_2(\lambda)) = 0.$$

Отсюда и из предложения 1 следует, что неравенство

$$\frac{\partial \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z)}{\partial z} = -\mu a'(z)\Delta^{(21)}(\lambda; z) - \frac{\lambda}{2}(c'(z) + 2d'(z))\Delta(\mu, 0; z) - 3\mu\lambda b(z)b'(z) < 0$$

выполняется при всех $z < \zeta_{\min}(\mu, \lambda)$, т.е. функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ монотонно убывает на интервале $(-\infty, \zeta_{\min}(\mu, \lambda))$. Из равенств (5.3), (5.5) и (6.7) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \zeta_{\min}(\mu, \lambda)) &= -\frac{3\mu\lambda}{2}b^2(\zeta_{\min}(\mu, \lambda)) < 0, \\ \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \zeta_{\max}(\mu, \lambda)) &= -\frac{3\mu\lambda}{2}b^2(\zeta_{\max}(\mu, \lambda)) < 0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Из равенств (5.3)–(5.5) и (4.1) вытекает равенство

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) = 1.$$

Поэтому существует единственное число $z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{\min}(\mu, \lambda) < 0$ такое, что

$$\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z^{(1)}(\mu, \lambda)) = 0.$$

Для доказательства п. 3 покажем, что функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ не имеет нулей на отрезке $[\zeta_{\min}(\mu, \lambda), 0]$, а именно

$$\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) < 0 \quad \text{при} \quad z \in [\zeta_{\min}(\mu, \lambda), 0]. \tag{6.9}$$

Предположим противное, т.е. пусть выполняется неравенство $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \zeta) \geq 0$ для некоторого $\zeta \in [\zeta_{\min}(\mu, \lambda), 0]$. Тогда в силу аналитичности функции $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ и неравенства (6.8) функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ имела бы не менее двух нулей (с учетом кратности) на отрезке $[\zeta_{\min}(\mu, \lambda), 0]$, а в силу (5.4) функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ имела бы не менее трех нулей на интервале $(-\infty, 0]$, что противоречит утверждению следствия 2.

В силу следствия 2 из неравенства (6.9) вытекает, что функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ не имеет нулей на отрезке $[\zeta_{\min}(\mu, \lambda), 0]$, что доказывает утверждение 3 предложения.

4. Аналогично доказательству п. 2 и в силу условия 4 предложения имеем

$$\lim_{z \rightarrow 0-} \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) = \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; 0) = 0.$$

Функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ имеет единственный нуль $z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{\min}(\mu, \lambda)$ на интервале $(-\infty, 0)$.

5. Выше мы уже доказали, что функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ (см. доказательство п. 3) имеет единственный нуль на интервале $(-\infty, \zeta_{\min}(\mu, \lambda))$. Из условия п. 5 имеем

$$\lim_{z \rightarrow 0-} \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) > 0.$$

Отсюда и из (6.7), рассуждая как выше, приходим к заключению, что функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ на интервале $(\zeta_{\max}(\mu, \lambda), 0]$ имеет единственный нуль $z^{(4)}(\mu, \lambda)$ (если бы она имела больше одного нуля, это противоречило бы следствию 2).

Таким образом, $z^{(1)}(\mu, \lambda)$ и $z^{(4)}(\mu, \lambda)$ являются нулями функции $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ на $(-\infty, 0]$, что доказывает утверждение 5.

Следующая лемма важна для доказательства существования виртуальных уровней оператора $h_{\mu\lambda}$.

ЛЕММА 4. Собственные функции f_1, f_2, f_3, f_4 оператора $h_{\mu\lambda}$, соответствующие собственным значениям $z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}, z^{(4)}$ ($z^{(2)} = z^{(3)}$), имеют вид

$$f_1(p) = \frac{(\sqrt{\mu} \alpha_0 + \sqrt{\lambda/2} k(z^{(1)}) \sum_{i=1}^3 \alpha_i(p)) C}{\varepsilon(p) - z^{(1)}}, \quad (6.10)$$

$$f_2(p) = \frac{(\alpha_1(p) - \alpha_2(p)) C}{\varepsilon(p) - z^{(2)}}, \quad f_3(p) = \frac{(\alpha_2(p) - \alpha_3(p)) C}{\varepsilon(p) - z^{(2)}}, \quad (6.11)$$

$$f_4(p) = \frac{(\sqrt{\mu} \alpha_0 + \sqrt{\lambda/2} k(z^{(4)}) \sum_{i=1}^3 \alpha_i(p)) C}{\varepsilon(p) - z^{(4)}}, \quad (6.12)$$

где $C = \text{const} \neq 0$, $k(z) = \Delta(\mu, 0; z) / (3\sqrt{\mu\lambda/2} b(z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу принципа Бирмана–Швингера оператор $h_{\mu\lambda}$, $\mu, \lambda \geq 0$, имеет собственное значение тогда и только тогда, когда однородное уравнение

$$G_{\mu\lambda}(z)\psi = \psi, \quad \text{или} \quad (I - G_{\mu\lambda}(z))|_{L_4} \psi = 0, \quad \psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathbb{C}^4 \quad (6.13)$$

имеет ненулевое решение, где $\psi_i = (\psi, \alpha_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$. Это уравнение эквивалентно следующей системе однородных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta(\mu, 0; z)\psi_0 - \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)\psi_1 - \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)\psi_2 - \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)\psi_3 &= 0, \\ -\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)\psi_0 + \left(1 - \frac{\lambda}{2} c(z)\right)\psi_1 - \frac{\lambda}{2} d(z)\psi_2 - \frac{\lambda}{2} d(z)\psi_3 &= 0, \\ -\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)\psi_0 - \frac{\lambda}{2} d(z)\psi_1 + \left(1 - \frac{\lambda}{2} c(z)\right)\psi_2 - \frac{\lambda}{2} d(z)\psi_3 &= 0, \\ -\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)\psi_0 - \frac{\lambda}{2} d(z)\psi_1 - \frac{\lambda}{2} d(z)\psi_2 + \left(1 - \frac{\lambda}{2} c(z)\right)\psi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Следовательно, при $\mu, \lambda \geq 0$ система (6.14) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{aligned} \Delta(\mu, 0; z)\psi_0 - \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)\psi_1 - \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)\psi_2 - \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)\psi_3 &= 0, \\ -\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z)\psi_0 + \left(1 - \frac{\lambda}{2} c(z)\right)\psi_1 - \frac{\lambda}{2} d(z)\psi_2 - \frac{\lambda}{2} d(z)\psi_3 &= 0, \\ \Delta^{(22)}(\lambda; z)\psi_1 - \Delta^{(22)}(\lambda; z)\psi_2 &= 0, \quad \Delta^{(22)}(\lambda; z)\psi_2 - \Delta^{(22)}(\lambda; z)\psi_3 = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

имеет ненулевое решение.

Пусть $\lambda \geq \lambda_2^0$. Тогда (см. п. 2, 3 предложения 2) функция $\Delta^{(22)}(\lambda; \cdot)$ имеет единственный нуль $z = z^{(2)}(\lambda)$ на интервале $(-\infty, 0]$, т.е. $\Delta^{(22)}(\lambda; z^{(2)}(\lambda)) = 0$, а в силу утверждений предложения 4 $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z^{(2)}(\lambda)) \neq 0$. Поэтому система уравнений (6.15) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta(\mu, 0; z^{(2)}(\lambda))\psi_0 - \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z^{(2)}(\lambda))\psi_1 - \\ - \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z^{(2)}(\lambda))\psi_2 - \sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z^{(2)}(\lambda))\psi_3 &= 0, \\ -\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z^{(2)}(\lambda))\psi_0 - \frac{\lambda}{2} d(z^{(2)}(\lambda))\psi_1 - \\ - \frac{\lambda}{2} d(z^{(2)}(\lambda))\psi_2 - \frac{\lambda}{2} d(z^{(2)}(\lambda))\psi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Поскольку $d(z^{(2)}(\lambda)) > 0$, система (6.16) эквивалентна следующему уравнению:

$$\left(\Delta(\mu, 0; z^{(2)}(\lambda)) + \mu \frac{b^2(z^{(2)}(\lambda))}{d(z^{(2)}(\lambda))} \right) \psi_0 = 0$$

при всех $\mu, \lambda \geq 0$.

Учитывая, что

$$\Delta(\mu, 0; z^{(2)}(\lambda)) + \mu \frac{b^2(z^{(2)}(\lambda))}{d(z^{(2)}(\lambda))} \neq 0$$

(см. утверждение 1 предложения 1 и предложение 4) при

$$\mu \neq \frac{d(z^{(2)}(\lambda))}{a(z^{(2)}(\lambda))d(z^{(2)}(\lambda)) - b(z^{(2)}(\lambda))},$$

имеем $\psi_0 = 0$. Тогда из первого уравнения (6.14) получаем

$$-\sqrt{\frac{\mu\lambda}{2}} b(z^{(2)}(\lambda))(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = 0.$$

Из утверждения 1 предложения 1 следует, что $b(z^{(2)}(\lambda)) > 0$. Поэтому

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0, \quad \text{или} \quad \psi_1 = -(\psi_2 + \psi_3) \quad \text{для всех} \quad \psi_2, \psi_3 \in \mathbb{C}. \quad (6.17)$$

В силу равенств (4.2), (6.17) и с учетом обозначений $\psi_i = (\psi, \alpha_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, общее решение уравнения (6.13) принимает вид

$$\psi(p) = \sum_{i=1}^3 \psi_i \alpha_i(p) = (\alpha_2(p) - \alpha_1(p))\psi_2 + (\alpha_3(p) - \alpha_1(p))\psi_3. \quad (6.18)$$

Пусть $\psi_3 = 0$. Тогда из (6.17) имеем $\psi_1 = -\psi_2$, и из (6.18) следует

$$\psi_2(p) = (\alpha_1(p) - \alpha_2(p))C, \quad C = \text{const} \neq 0. \quad (6.19)$$

Пусть $\psi_1 = 0$. Рассуждая аналогично, получаем

$$\psi_3(p) = (\alpha_2(p) - \alpha_3(p))C, \quad C = \text{const} \neq 0. \quad (6.20)$$

Пусть $0 < \lambda < \lambda_2^0$ и $(\mu, \lambda) \in G_{11}^{(0)} \cup G_1$ (соответственно $(\mu, \lambda) \in G_{12}^{(0)} \cup G_2$). Тогда (см. п. 2–5 предложения 4) функция $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; \cdot)$ имеет нули $z = z^{(1)}(\mu, \lambda) \leq 0$ (соответственно $z = z^{(1)}(\mu, \lambda) < 0$, $z = z^{(4)}(\mu, \lambda) \leq 0$) на интервале $(-\infty, 0]$, т.е. $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z^{(1)}(\mu, \lambda)) = \Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z^{(4)}(\mu, \lambda)) = 0$. В силу утверждения 1 предложения 2 $\Delta^{(22)}(\lambda; z^{(1)}(\mu, \lambda)) > 0$ (соответственно $\Delta^{(22)}(\lambda; z^{(4)}(\mu, \lambda)) > 0$). Из (6.15) вытекает, что

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \frac{\Delta(\mu, 0; z)}{3\sqrt{\mu\lambda/2}b(z)}\psi_0.$$

Рассуждая как в случае $\lambda \geq \lambda_2^0$, убедимся, что при $z = z^{(1)}(\mu, \lambda)$ собственные функции оператора $G_{\mu\lambda}(z)$, соответствующие собственному значению 1, имеют вид

$$\psi_1(p) = \left(\alpha_0 + k(z^{(1)}) \sum_{i=1}^3 \alpha_i(p) \right) C, \quad C = \text{const} \neq 0, \quad (6.21)$$

а при $z = z^{(4)}(\mu, \lambda)$

$$\psi_4(p) = \left(\alpha_0 + k(z^{(4)}) \sum_{i=1}^3 \alpha_i(p) \right) C, \quad C = \text{const} \neq 0, \quad k(z) = \frac{\Delta(\mu, 0; z)}{3\sqrt{\mu\lambda/2}b(z)}. \quad (6.22)$$

Согласно замечанию 1 собственная функция оператора $h_{\mu\lambda}$, соответствующая собственному значению $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 6]$, имеет вид

$$f(p) = \frac{(v_{\mu\lambda}^{1/2} \psi)(p)}{\varepsilon(p) - z}, \quad p \in \mathbb{T}^3.$$

Отсюда в силу равенства (6.21) и

$$(\alpha_0, 1) = \frac{1}{\alpha_0}, \quad (\alpha_i, 1) = 0, \quad (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

получаем равенство (6.10).

Аналогично проверяются равенства (6.11) и (6.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Из равенств (6.5), (6.6) и (6.10)–(6.12) при $z = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} f_1(0) = f_4(0) &= \frac{3 - \mu}{3\sqrt{\mu}b(0)\varepsilon(0)} C \neq 0, & C \neq 0, \\ f_2(0) = f_3(0) &= 0. \end{aligned} \tag{6.23}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. А1. Пусть $z \leq 0$. Тогда в силу условия А1 теоремы и из утверждений 1 предложений 2, 4 выполняются неравенства $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z) > 0$, $\Delta^{(22)}(\lambda; z) > 0$. Отсюда и из (5.2) имеем $\Delta(\mu, \lambda; z) > 0$.

В силу леммы 2 оператор $h_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений на интервале $(-\infty, 0)$, и точка $z = 0$ является РТНС оператора $h_{\mu\lambda}$.

А2. Пусть $z = 0$. Из утверждения 2 предложения 4 вытекает, что $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; 0) = 0$ и решение (6.10) уравнения $h_{\mu\lambda}f = 0$ в силу (6.23) удовлетворяет условию

$$f_1(0) = \frac{3 - \mu}{3\sqrt{\mu}b(0)\varepsilon(0)} C \neq 0, \quad C \neq 0,$$

поэтому $f_1 \in L_e^1(\mathbb{T}^3) \setminus L_e^2(\mathbb{T}^3)$.

Из утверждения 1 предложения 2 имеем $\Delta^{(22)}(\lambda; z) > 0$, а из (5.2) и в силу леммы 2 следует, что оператор $h_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений на интервале $(-\infty, 0)$.

А3. Пусть $z \leq 0$. Согласно утверждению 3 предложения 4 существует единственное число $z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{\min}(\mu, \lambda) < 0$ такое, что $\Delta^{(1)}(\mu, \lambda; z^{(1)}(\mu, \lambda)) = 0$, а из утверждения 1 предложения 2 имеем $\Delta^{(22)}(\lambda; z) > 0$.

В силу леммы 2 из представления (5.2) следует, что оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет единственное собственное значение $z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{\min}(\mu, \lambda) < 0$.

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично доказательству А1–А3.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность Р. А. Минлосу и З. Э. Муминову за внимание к работе и рецензенту за ценные критические замечания. Работа поддержана грантом ФА-Ф1-Ф045 АН РУз.

Список литературы

- [1] В. Ефимов, *ЯФ*, **12** (1970), 1080–1091.
- [2] V. Efimov, *Phys. Lett. B*, **33**:8 (1970), 563–564.
- [3] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593.
- [4] H. Tamura, *Nagoya Math. J.*, **130** (1993), 55–83.
- [5] S. A. Vugal'ter, G. M. Zhislin, *Comm. Math. Phys.*, **87**:1 (1982), 89–103.
- [6] С. Н. Лакаев, *Функц. анализ. и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28.
- [7] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [8] S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 91–115.
- [9] С. Н. Лакаев, Ш. М. Тилавова, *ТМФ*, **101**:2 (1994), 235–251.
- [10] Е. Л. Лакштанов, Р. А. Минлос, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 39–55.
- [11] R. G. Newton, *J. Math. Phys.*, **18**:7 (1977), 1348–1357.
- [12] B. Simon, *J. Funct. Anal.*, **40**:1 (1981), 66–83.
- [13] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [14] С. Альбеверьо, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, М., 1991.
- [15] S. Albeverio, S. N. Lakaev, T. H. Rasulov, *J. Statist. Phys.*, **127**:2 (2007), 191–220.
- [16] М. Ш. Бирман, *Вестн. ЛГУ*, **16**:13 (1961), 163–166.
- [17] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **47**:1 (1961), 122–129.

Поступила в редакцию 15.04.2008,
после доработки 23.06.2008