Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Синев, Квантовые траектории осциллятора, взаимодействующего с электромагнитным полем, классической силой и термостатом, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 3, 444–459

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:52:30

© 2009 г.

А. М. Синев*

КВАНТОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ ОСЦИЛЛЯТОРА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ, КЛАССИЧЕСКОЙ СИЛОЙ И ТЕРМОСТАТОМ

Рассмотрена точно решаемая задача об описании динамики квантового осциллятора, взаимодействующего с электромагнитным полем, классической силой и термостатом. Предложен общий метод решения уравнений марковской эволюции системы – метод квантовых траекторий. Построение стохастического оператора эволюции включает в себя вывод стохастического аналога формулы Бейкера–Хаусдорфа. Вычислена матрица плотности системы для произвольного начального состояния. В качестве физического приложения рассчитано влияние окружения при ненулевой температуре на точность измерений слабой классической силы интерференционным методом.

Ключевые слова: открытые квантовые системы, стохастические дифференциальные уравнения, квантовые измерения.

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании поведения квантовой системы с небольшим числом степеней свободы, взаимодействующей с окружением (системой большого числа степеней свободы), данная система понимается как открытая. На унитарную эволюцию системы накладывается квантовый шум от воздействия на нее окружения [1]. Таким образом, динамика открытой системы описывается с помощью либо квантовых уравнений Ланжевена и квантовых стохастических дифференциальных уравнений, либо управляющих уравнений для оператора плотности, что соответствует представлению Шредингера. Физические примеры эволюции открытых квантовых систем можно найти в работах [1], [2].

Концепция открытой квантовой системы широко применяется в теории квантовых измерений, где окружением является классический измерительный прибор, с которого считывается информация о системе. В этом случае важными оказываются так называемые апостериорные состояния, описываемые стохастическим уравнением Шредингера, которое рассмотрено в работах [3], [4].

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. E-mail: sansin@mail.ru

Среди неоператорных методов описания эволюции открытых квантовых систем отметим метод ограниченных интегралов по путям Менского (обобщение континуального интеграла Фейнмана) [5] и теорию квантовой томографии, которая основана на описании состояния системы с помощью функции Вигнера и с которой можно ознакомиться в работах [6], [7].

В настоящей работе мы рассматриваем модельное точно решаемое уравнение марковской эволюции, применяя метод квантовых траекторий [8], позволяющий представить решение задачи Коши

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \mathcal{L}(\rho_t), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0, \quad (1)$$

где $\mathcal{L}(\cdot)$ – генератор вполне положительной полугруппы $\mathcal{T}_t(\cdot): \rho_t = \mathcal{T}_t(\rho_0)$, сохраняющей след, в виде математического ожидания

$$\rho_t = \mathbb{M} u_t \rho_0 u_t^*, \quad (2)$$

где ρ_0 – начальное состояние системы (положительный оператор с единичным следом), u_t – стохастический оператор эволюции состояния системы (квантовая траектория), удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению Ито, сопоставляемому генератору $\mathcal{L}$ марковской эволюции таким образом, чтобы состояние квантовой системы ρ_t описывалось уравнением Линдблада

$$\begin{aligned} d\rho_t &= \mathbb{M} du_t \rho_0 u_t^* + \mathbb{M} u_t \rho_0 du_t^* + \mathbb{M} du_t \rho_0 du_t^* = \mathcal{L}(\rho_t) dt, \\ du_t &= (A dt + B dw_t) u_t, \end{aligned}$$

где $A, B = \{B_k\}$ – операторные коэффициенты, описывающие обратимые и необратимые процессы взаимодействия квантовой системы и ее окружения, $w_t = \{w_t^{(k)}\}$ – независимые стандартные винеровские процессы.

В разделе 2 рассматривается задача Коши для уравнения на матрицу плотности системы, представляющую собой квантовый одномерный гармонический осциллятор, взаимодействующий при ненулевой температуре с окружением, классической силой и с давлением света. Мы находим точное выражение для u_t , стохастическая часть которого удовлетворяет уравнению первого порядка относительно некоммутирующих операторов

$$du_t^{\text{stoch}} = (f_t dX_t + g_t dY_t + \alpha_t b dX_t + \beta_t b^\dagger dY_t) u_t^{\text{stoch}},$$

где $f_t, g_t, \alpha_t, \beta_t$ – заданные комплексные функции времени, $b^\dagger$ и b – операторы рождения и уничтожения с коммутатором $[b, b^\dagger] = I$, X_t, Y_t – независимые стандартные винеровские процессы:

$$\mathbb{M} dX_t = \mathbb{M} dY_t = \mathbb{M} dX_t dY_t = 0, \quad \mathbb{M} dX_t^2 = \mathbb{M} dY_t^2 = dt.$$

В разделе 3 вычисляется ρ_t для произвольного начального состояния, т.е. строится явный вид полугруппы $\mathcal{T}_t(\cdot)$. В разделе 4 вычисляется предельная эволюция оператора плотности осциллятора при $t \rightarrow \infty$. В разделе 5 рассматриваются интерференционный метод измерения классической силы и влияние ненулевой температуры окружения на точность измерений.

2. ГАМИЛЬТониан СИСТЕМЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ

Рассмотрим в пространстве l_2 генератор линдбладовского типа [9]

$$\mathcal{L}(\rho) = \frac{\lambda(\nu + 1)}{2} (2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b) + \frac{\lambda\nu}{2} (2b^\dagger \rho b - b b^\dagger \rho - \rho b b^\dagger), \quad (3)$$

где $b^\dagger$ и b – операторы рождения и уничтожения с коммутатором $[b, b^\dagger] = I$. Состояние Гиббса

$$\rho_\nu = (1 - c_\nu) \sum_n c_\nu^n |n\rangle \langle n|, \quad c_\nu = \frac{\nu}{\nu + 1},$$

является стационарным состоянием данного генератора, т.е. $\mathcal{L}(\rho_\nu) = 0$, так как для любого n константа $c = c_\nu$ удовлетворяет уравнению

$$(\nu + 1)\{(n + 1)c - n\} + \nu\{c^{-1}n - (n + 1)\} = 0.$$

Генератор (3), известный в квантовой оптике (см., например, [2]), описывает взаимодействие системы с окружением при ненулевой температуре, где $\lambda > 0$ характеризует интенсивность обмена энергией между системой и термостатом, а $\nu > 0$ выражается через его температуру T . Для одномерного осциллятора с частотой Ω температура T связана с параметром ν соотношением $\hbar\Omega/(kT) = \ln((\nu + 1)/\nu)$.

Системой, рассматриваемой в настоящей статье, является когерентное лазерное излучение с угловой частотой ω , заполняющее полость между закрепленным зеркалом и подвижным, которое описывается как одномерный квантовый осциллятор с собственной частотой Ω . Данная полость является частью интерферометра, позволяющего измерить малые перемещения подвижного зеркала при воздействии на него слабой классической силы. Гамильтониан системы “излучение–осциллятор” в пространстве $l_2 \otimes l_2$ имеет вид [10], [11]

$$H_t = \hbar[\omega a^\dagger a \otimes I + I \otimes \Omega b^\dagger b + (g a^\dagger a + f_t) \otimes (b^\dagger + b)], \quad (4)$$

где первые два слагаемых – собственная энергия лазерного излучения и осциллятора, $a^\dagger$, a , $b^\dagger$, b – операторы рождения и уничтожения в пространстве состояний излучения и осциллятора соответственно, а последнее слагаемое – энергия взаимодействия осциллятора с излучением (давление электромагнитного поля), где $g = -(\omega/L)\sqrt{\hbar/(2m\Omega)}$, m – масса осциллятора, L – расстояние между зеркалами, и с внешней силой $f_t = -F(t)/\sqrt{2m\Omega\hbar}$, где $F(t)$ – классическая сила.

Подвижное зеркало через подвес спонтанно обменивается энергией с окружением при ненулевой температуре. При этом состояние ρ_t системы определяется квантовым кинетическим уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_t}{dt} = & \frac{i}{\hbar} [\rho_t, H_t] + \frac{\lambda(\nu + 1)}{2} (2b\rho_t b^\dagger - b^\dagger b\rho_t - \rho_t b^\dagger b) + \\ & + \frac{\lambda\nu}{2} (2b^\dagger \rho_t b - b b^\dagger \rho_t - \rho_t b b^\dagger) \end{aligned} \quad (5)$$

с гамильтонианом (4) и заданным начальным состоянием ρ_0 .

Будем искать решение уравнения (5) в виде $\rho_t = M u_t \rho_0 u_t^*$, где u_t – стохастический оператор эволюции, удовлетворяющий уравнению

$$du_t = \left[-i\omega a^\dagger a dt - i\Omega b^\dagger b dt - i(ga^\dagger a + f_t)(b^\dagger + b) dt - \right. \\ \left. - \frac{\lambda(\nu+1)}{2} b^\dagger b dt - \frac{\lambda\nu}{2} bb^\dagger dt + \sqrt{\lambda(\nu+1)} b dX_t + \sqrt{\lambda\nu} b^\dagger dY_t \right] u_t \quad (6)$$

с $u_0 = I$. Здесь X_t, Y_t – независимые стандартные винеровские процессы. Формула (5) является следствием уравнения (6) и классической формулы дифференцирования Ито. Следует отметить, что операторнозначные коэффициенты в уравнении (6), действующие в пространстве состояний осциллятора, не коммутируют в различные моменты времени. Распутывая операторы при дифференциале dt по формуле Бейкера–Хаусдорфа [8], выделим стохастическую часть φ_t уравнения (6):

$$\varphi_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{\lambda\nu t/2} e^{i\omega a^\dagger a t} e^{C_t} e^{i\beta_t^- b} e^{i\beta_t^+ b^\dagger} e^{b^\dagger b(\lambda(2\nu+1)/2 + i\Omega)t} u_t, \quad (7)$$

$$d\varphi_t = [-iq_t\beta_t^+ dX_t + i\sigma_t\beta_t^- dY_t + q_t b dX_t + \sigma_t b^\dagger dY_t] \varphi_t, \quad \varphi_0 = I, \quad (8)$$

$$q_t = \sqrt{\lambda(\nu+1)} \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(2\nu+1)t - i\Omega t\right], \quad \sigma_t = \sqrt{\lambda\nu} \exp\left[\frac{\lambda}{2}(2\nu+1)t + i\Omega t\right], \quad (9)$$

$$\beta_t^\pm = \int_0^t A_\tau \exp\left[\pm\frac{\lambda}{2}(2\nu+1)\tau \pm i\Omega\tau\right] d\tau, \\ C_t = \int_0^t A_\tau \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(2\nu+1)\tau - i\Omega\tau\right] \beta_\tau^+ d\tau, \quad (10)$$

где $A_t = ga^\dagger a + f_t$.

Решение уравнения (8) использует стохастический аналог формулы Бейкера–Хаусдорфа. Поскольку уравнение (8) является стохастическим уравнением первого порядка относительно операторов b и $b^\dagger$, его решение имеет вид композиции экспонент от операторов второго порядка по b и $b^\dagger$:

$$\varphi_t = E_1 E_2 E_3 E_4, \\ E_1 = \exp\left[\int_0^t s_\tau dX_\tau + \int_0^t i\sigma_\tau \beta_\tau^- dY_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (s_\tau^2 - \sigma_\tau^2 \beta_\tau^{-2}) d\tau\right], \\ E_2 = \exp\left[b^\dagger \int_0^t (\mu_\tau dX_\tau + \sigma_\tau dY_\tau + k_\tau d\tau) - \frac{(b^\dagger)^2}{2} \int_0^t (\mu_\tau^2 + \sigma_\tau^2) d\tau\right], \quad (11)$$

$$E_3 = \exp\left[b^\dagger b \int_0^t \psi_\tau d\tau\right], \\ E_4 = \exp\left[b \int_0^t (\eta_\tau dX_\tau + h_\tau d\tau) - \frac{b^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau\right]. \quad (12)$$

Принимая во внимание многомерную формулу Ито (см., например, [12]) и коммутационные соотношения

$$e^{\alpha b^\dagger + \beta (b^\dagger)^2} b = (b - \alpha - 2\beta b^\dagger) e^{\alpha b^\dagger + \beta (b^\dagger)^2}, \quad e^{\alpha b^\dagger} b b = b e^{-\alpha} e^{\alpha b^\dagger b},$$

приравниваем коэффициенты в левой и правой частях уравнения (8) при соответствующих степенях операторов b , $b^\dagger$ и получаем систему уравнений для нахождения неизвестных функций s_t , μ_t , k_t , ψ_t , η_t , h_t

$$\mu_t = -q_t \int_0^t (\mu_\tau^2 + \sigma_\tau^2) d\tau, \quad (13)$$

$$\eta_t = q_t \exp \left[- \int_0^t q_\tau \mu_\tau d\tau \right], \quad \psi_t = -q_t \mu_t, \quad (14)$$

$$h_t = -\eta_t s_t, \quad k_t = -\mu_t s_t - i\sigma_t^2 \beta_t^-, \quad (15)$$

$$s_t = -iq_t \beta_t^+ + q_t \int_0^t (\mu_\tau dX_\tau + \sigma_\tau dY_\tau + k_\tau d\tau). \quad (16)$$

Функция μ_t удовлетворяет уравнению Риккати (13). После того, как найдено μ_t , определяются остальные функции. Для удобства введем одномерные диффузионные процессы в показателях экспонент (11), (12)

$$z_t = \int_0^t (\mu_\tau dX_\tau + \sigma_\tau dY_\tau + k_\tau d\tau), \quad w_t = \int_0^t (\eta_\tau dX_\tau + h_\tau d\tau). \quad (17)$$

Тогда из (15), (16) следует, что $s_t = -iq_t \beta_t^+ + q_t z_t$, а процессы z_t и w_t удовлетворяют системе линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dz_t &= -(q_t \mu_t (z_t - i\beta_t^+) + i\sigma_t^2 \beta_t^-) dt + \mu_t dX_t + \sigma_t dY_t, & z_0 &= 0, \\ dw_t &= -q_t \eta_t (z_t - i\beta_t^+) dt + \eta_t dX_t, & w_0 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, решение уравнения (8) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \exp \left[\int_0^t q_\tau (z_\tau - i\beta_\tau^+) dX_\tau \right] \exp \left[i \int_0^t \sigma_\tau \beta_\tau^- dY_\tau \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t (q_\tau^2 (z_\tau - i\beta_\tau^+)^2 - \sigma_\tau^2 (\beta_\tau^-)^2) d\tau \right] \times \\ &\times \exp \left[b^\dagger z_t - \frac{(b^\dagger)^2}{2} \int_0^t (\mu_\tau^2 + \sigma_\tau^2) d\tau \right] \times \\ &\times \exp \left[-b^\dagger b \int_0^t q_\tau \mu_\tau d\tau \right] \exp \left[bw_t - \frac{b^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая (7), окончательно запишем решение уравнения (6) в виде композиции экспонент от операторов b и $b^\dagger$:

$$\begin{aligned} u_t = & e^{-\lambda \nu t/2} \exp \left[\int_0^t q_\tau (z_\tau - i\beta_\tau^+) dX_\tau \right] \exp \left[i \int_0^t \sigma_\tau \beta_\tau^- dY_\tau \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t (q_\tau^2 (z_\tau - i\beta_\tau^+)^2 - \sigma_\tau^2 (\beta_\tau^-)^2) d\tau \right] \times \\ & \times e^{-i\omega a^\dagger a t} e^{-Ct} e^{-b^\dagger b (\lambda(2\nu+1)/2 + i\Omega)t} e^{-i\beta_t^+ b^\dagger} e^{-i\beta_t^- b} \times \\ & \times \exp \left[b^\dagger z_t - \frac{(b^\dagger)^2}{2} \int_0^t (\mu_\tau^2 + \sigma_\tau^2) d\tau \right] \times \\ & \times \exp \left[-b^\dagger b \int_0^t q_\tau \mu_\tau d\tau \right] \exp \left[bw_t - \frac{b^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

3. СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ В ПРОИЗВОЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Построим решение уравнения (5) $\rho_t = M u_t \rho_0 u_t^*$, где u_t определена в формуле (20), не конкретизируя начальное состояние ρ_0 . Вычисление данного математического ожидания не является тривиальной задачей, так как процесс $\int_0^t q_\tau z_\tau dX_\tau$, входящий в u_t (20), не гауссовский.

Рассмотрим в пространстве состояний осциллятора нормальный символ $\phi_t(\bar{g}, g, \bar{h}, h)$ супероператора $\varphi_t(\cdot)\varphi_t^*$, действующего на $\rho_0 = |h\rangle\langle h|_{\text{osc}} \otimes \rho_0^{\text{las}}$, где $|h\rangle = e^{-|h|^2/2}(1, h, h^2/\sqrt{2!}, \dots, h^n/\sqrt{n!}, \dots)$ – нормированный когерентный вектор из пространства состояний осциллятора l_2 , $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, с функцией φ_t , определенной в (19). Кроме того, операторнозначные функции z_t , w_t и $\beta_t^\pm$, действующие в пространстве состояний лазерного излучения, коммутируют друг с другом в соответствии с (10), (18). Их расположение относительно ρ_0^{las} отметим стрелкой, например $\vec{z}_t$ ($\overleftarrow{z}_t$) означает, что z_t действует слева (справа) на ρ_0^{las} . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \phi_t \stackrel{\text{def}}{=} & e^{|g|^2} e^{|h|^2} \langle g | \varphi_t(|h\rangle\langle h|_{\text{osc}} \otimes \rho_0^{\text{las}}) \varphi_t^* | g \rangle = \exp \left[\int_0^t [q_\tau (\vec{z}_\tau - i\vec{\beta}_\tau^+) + \text{э.с.}] dX_\tau \right] \times \\ & \times \exp \left[\int_0^t [i\sigma_\tau \vec{\beta}_\tau^- + \text{э.с.}] dY_\tau \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t [q_\tau^2 (\vec{z}_\tau - i\vec{\beta}_\tau^+)^2 - \sigma_\tau^2 (\vec{\beta}_\tau^-)^2 + \text{э.с.}] d\tau \right] \times \\ & \times \exp \left[\bar{g} \vec{z}_t - \frac{\bar{g}^2}{2} \int_0^t (\mu_\tau^2 + \sigma_\tau^2) d\tau + \text{э.с.} \right] \exp \left[\bar{g} h (e^{-\int_0^t q_\tau \mu_\tau d\tau} - 1) + \text{э.с.} \right] \times \\ & \times \exp \left[h \vec{w}_t - \frac{h^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau + \text{э.с.} \right] \rho_0^{\text{las}}, \end{aligned} \quad (21)$$

где операция эрмитова сопряжения $*$ действует с изменением расположения операторов относительно ρ_0^{las} . При переходе от (19) к (21) использована известная формула упорядочивания

$$e^{-\lambda b^\dagger b} = e^{b_2^\dagger b_1 (e^{-\lambda} - 1)}.$$

Поскольку множество когерентных векторов всюду плотно в пространстве l_2 , то ϕ_t однозначно определяет вид супероператора $\varphi_t(\cdot)\varphi_t^*$, действующего на произвольное состояние $\rho_0 = \rho_0^{\text{osc}} \otimes \rho_0^{\text{las}}$:

$$\phi_t(\bar{g}, g, \bar{h}, h) \longrightarrow \varphi_t \rho_0 \varphi_t^* = \phi_t(\bar{b}_2^\dagger, \bar{b}_2, \bar{b}_1^\dagger, \bar{b}_1) \rho_0^{\text{osc}}, \quad (22)$$

где индексы и стрелки указывают порядок действия и расположение операторов относительно ρ_0^{osc} . Например, стрелка и индекс $\bar{b}_2^\dagger$ означают, что оператор $b^\dagger$ действует на ρ_0^{osc} слева вторым.

В (21) выполним сдвиг $\{\vec{z}_t, \overleftarrow{z}_t^*, \vec{w}_t, \overleftarrow{w}_t^*\} \rightarrow \{\zeta_t, \zeta_t^*, \xi_t, \xi_t^*\}$ такой, что

$$\begin{aligned} d\zeta_t &= -(q_t \mu_t (\zeta_t - i \vec{\beta}_t^+) + i \sigma_t^2 \vec{\beta}_t^-) dt + \mu_t dX_t + \sigma_t dY_t + f_\zeta dt, \\ d\xi_t &= -q_t \eta_t (\zeta_t - i \vec{\beta}_t^+) dt + \eta_t dX_t + f_\xi dt. \end{aligned}$$

Процессы $d\zeta_t$ и $d\xi_t$ отличаются от dz_t , dw_t (18) на слагаемое $f dt$:

$$\begin{aligned} f &= \begin{pmatrix} f_\zeta \\ f_{\zeta^*} \\ f_\xi \\ f_{\xi^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_t & \sigma_t \\ \mu_t^* & \sigma_t^* \\ \eta_t & 0 \\ \eta_t^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_t(\zeta_t - i \vec{\beta}_t^+) + q_t^*(\zeta_t^* + i \overleftarrow{\beta}_t^{+*}) \\ i \sigma_t \vec{\beta}_t^- - i \sigma_t^* \overleftarrow{\beta}_t^{-*} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mu_t q_t (\zeta_t - i \vec{\beta}_t^+) + \mu_t q_t^* (\zeta_t^* + i \overleftarrow{\beta}_t^{+*}) + i \sigma_t^2 \vec{\beta}_t^- - i |\sigma_t|^2 \overleftarrow{\beta}_t^{-*} \\ \mu_t^* q_t (\zeta_t - i \vec{\beta}_t^+) + \mu_t^* q_t^* (\zeta_t^* + i \overleftarrow{\beta}_t^{+*}) + i |\sigma_t|^2 \vec{\beta}_t^- - i \sigma_t^{*2} \overleftarrow{\beta}_t^{-*} \\ q_t \eta_t (\zeta_t - i \vec{\beta}_t^+) + q_t^* \eta_t (\zeta_t^* + i \overleftarrow{\beta}_t^{+*}) \\ q_t \eta_t^* (\zeta_t - i \vec{\beta}_t^+) + q_t^* \eta_t^* (\zeta_t^* + i \overleftarrow{\beta}_t^{+*}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Согласно теореме Гирсанова меры $m_{\zeta, \zeta^*, \xi, \xi^*}$ и m_{z, z^*, w, w^*} абсолютно непрерывны друг относительно друга, а производная Радона–Никодима $dm_{\zeta, \zeta^*, \xi, \xi^*} / dm_{z, z^*, w, w^*}$ имеет вид [13]

$$\begin{aligned} \frac{dm_{\zeta, \zeta^*, \xi, \xi^*}}{dm_{z, z^*, w, w^*}}(\vec{z}_t, \overleftarrow{z}_t^*, \vec{w}_t, \overleftarrow{w}_t^*) &= \exp \left[\int_0^t (q_\tau (\vec{z}_\tau - i \vec{\beta}_\tau^+) + \text{э.с.}) dX_\tau \right] \times \\ &\times \exp \left[\int_0^t (i \sigma_\tau \vec{\beta}_\tau^- + \text{э.с.}) dY_\tau \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t (q_\tau (\vec{z}_\tau - i \vec{\beta}_\tau^+) + \text{э.с.})^2 d\tau \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t (i \sigma_\tau \vec{\beta}_\tau^- + \text{э.с.})^2 d\tau \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место равенство $M\phi_t = M\psi_t$, где

$$\begin{aligned} \psi_t &\stackrel{\text{def}}{=} \exp \left[\int_0^t |q_\tau (\zeta_\tau - i \vec{\beta}_\tau^+)|^2 d\tau \right] \exp \left[\int_0^t |\sigma_\tau \vec{\beta}_\tau^-|^2 d\tau \right] \times \\ &\times \exp \left[\bar{g} \zeta_t - \frac{\bar{g}^2}{2} \int_0^t (\mu_\tau^2 + \sigma_\tau^2) d\tau + \text{э.с.} \right] \times \\ &\times \exp \left[\bar{g} h (e^{-\int_0^t q_\tau \mu_\tau d\tau} - 1) + \text{э.с.} \right] \exp \left[h \xi_t - \frac{h^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau + \text{э.с.} \right] \rho_0^{\text{las}}, \quad (23) \end{aligned}$$

а процессы ζ_t , ξ_t удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} d\zeta_t &= \mu_t q_t^* (\zeta_t^* + i \overleftarrow{\beta}_t^{+*}) dt - i |\sigma_t|^2 \overleftarrow{\beta}_t^{-*} dt + \mu_t dX_t + \sigma_t dY_t, & \zeta_0 &= 0, \\ d\xi_t &= q_t^* \eta_t (\zeta_t^* + i \overleftarrow{\beta}_t^{+*}) dt + \eta_t dX_t, & \xi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Соответственно ζ_t^* и ξ_t^* эрмитово сопряжены ζ_t и ξ_t с учетом изменения расположения операторов относительно ρ_0^{las} .

Рассмотрим математическое ожидание $M\psi_t$ (23). Введем для этого случайную функцию времени

$$v = v_t^{\alpha, \beta} = \exp \left[\int_0^t |q_\tau|^2 (i \overleftarrow{\beta}_\tau^{+*} \zeta_\tau - i \overrightarrow{\beta}_\tau^+ \zeta_\tau^* + \zeta_\tau \zeta_\tau^*) d\tau \right] e^{\alpha \bar{g} \zeta_t} e^{\beta g \zeta_t^*} e^{h \xi_t} e^{\bar{h} \xi_t^*},$$

зависящую от параметров α и β . При этом $M\psi_t$ принимает вид

$$\begin{aligned} M\psi_t &= \exp \left[\int_0^t (|q_\tau \overrightarrow{\beta}_\tau^+|^2 + |\sigma_\tau \overrightarrow{\beta}_\tau^-|^2) d\tau \right] \exp \left[-\frac{\bar{g}^2}{2} \int_0^t (\mu_\tau^2 + \sigma_\tau^2) d\tau + \text{э.с.} \right] \times \\ &\times \exp \left[\bar{g} h \left(\exp \left[-\int_0^t q_\tau \mu_\tau d\tau \right] - 1 \right) + \text{э.с.} \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{h^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau + \text{э.с.} \right] M \left\{ v_t^{\alpha, \beta} \Big|_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}} \right\} \rho_0^{\text{las}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения для $M\{v_t^{\alpha, \beta}\}$. Заметим, что

$$M\{\zeta_t v\} = \frac{1}{g} \frac{\partial M\{v\}}{\partial \alpha}, \quad M\{\zeta_t^* v\} = \frac{1}{g} \frac{\partial M\{v\}}{\partial \beta}, \quad M\{\zeta_t \zeta_t^* v\} = \frac{1}{|g|^2} \frac{\partial^2 M\{v\}}{\partial \alpha \partial \beta}$$

и в соответствии с определениями процессов ζ_t , ξ_t (24) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial M\{v\}}{\partial t} &= \frac{|q_t|^2}{|g|^2} \frac{\partial^2 M\{v\}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{i |q_t|^2 \overleftarrow{\beta}_t^{+*}}{\bar{g}} \frac{\partial M\{v\}}{\partial \alpha} - \frac{i |q_t|^2 \overrightarrow{\beta}_t^+}{g} \frac{\partial M\{v\}}{\partial \beta} + \\ &+ \alpha \bar{g} \left((i \mu_t q_t^* \overleftarrow{\beta}_t^{+*} - i |\sigma_t|^2 \overleftarrow{\beta}_t^{-*}) M\{v\} + \frac{\mu_t q_t^*}{g} \frac{\partial M\{v\}}{\partial \beta} \right) + \\ &+ \frac{\alpha^2}{2} \bar{g}^2 (\mu_t^2 + \sigma_t^2) M\{v\} + h q_t^* \eta_t \left(i \overleftarrow{\beta}_t^{+*} M\{v\} + \frac{1}{g} \frac{\partial M\{v\}}{\partial \beta} \right) + \\ &+ \beta g \left((-i \mu_t^* q_t \overrightarrow{\beta}_t^+ + i |\sigma_t|^2 \overrightarrow{\beta}_t^-) M\{v\} + \frac{\mu_t^* q_t}{\bar{g}} \frac{\partial M\{v\}}{\partial \alpha} \right) + \\ &+ \frac{\beta^2}{2} g^2 (\mu_t^{*2} + \sigma_t^{*2}) M\{v\} + \bar{h} q_t \eta_t^* \left(-i \overrightarrow{\beta}_t^+ M\{v\} + \frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial M\{v\}}{\partial \alpha} \right) + \\ &+ \alpha \beta |g|^2 (|\mu_t|^2 + |\sigma_t|^2) M\{v\} + h^2 \frac{\eta_t^2}{2} M\{v\} + \bar{h}^2 \frac{\eta_t^{*2}}{2} M\{v\} + \\ &+ |h|^2 |\eta_t|^2 M\{v\} + \alpha \bar{g} h \mu_t \eta_t M\{v\} + \alpha \bar{g} \bar{h} \mu_t \eta_t^* M\{v\} + \\ &+ \beta h g \mu_t^* \eta_t M\{v\} + \beta \bar{h} g \mu_t^{*} \eta_t^* M\{v\}. \end{aligned}$$

Поскольку при вычислении $M\psi_t$ (25) параметры α и β полагаются равными единице, нас будет интересовать частное решение этого уравнения, которое имеет вид экспоненты от квадратичной функции переменных g и h . После нескольких подстановок

с учетом (13), (14) и (25) для математического ожидания $M\psi_t$ получаем

$$\begin{aligned} M\psi_t = & \exp \left[\int_0^t (|q_\tau \overrightarrow{\beta}_\tau^+|^2 + |\sigma_\tau \overrightarrow{\beta}_\tau^-|^2 + |q_\tau f_2(\tau)|^2 + |q_\tau|^2 f_1(\tau)) d\tau \right] \times \\ & \times \exp \left[\int_0^t (i|q_\tau|^2 \overleftarrow{\beta}_\tau^{+*} f_2(\tau) + \text{э.с.}) d\tau \right] \times \\ & \times e^{|g|^2 f_1(t)} e^{\bar{g} f_2(t) + \text{э.с.}} \exp \left[(\bar{g}h + \text{э.с.}) (e^{\int_0^t |q_\tau|^2 f_1(\tau) d\tau} - 1) \right] \times \\ & \times \exp \left[h \int_0^t |q_\tau|^2 e^{\int_0^\tau |q_s|^2 f_1(s) ds} (f_2^*(\tau) + i \overleftarrow{\beta}_\tau^{+*}) d\tau + \text{э.с.} \right] \times \\ & \times \exp \left[|h|^2 \int_0^t |q_\tau|^2 e^{2 \int_0^\tau |q_s|^2 f_1(s) ds} d\tau \right] \rho_0^{\text{las}}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$f_1(t) = \frac{\nu(1 - e^{-\lambda t})}{\nu + 1 - \nu e^{-\lambda t}} e^{\lambda(2\nu+1)t}, \quad (27)$$

$$f_2(t) = -i \int_0^t \exp \left[\int_\tau^t |q_s|^2 f_1(s) ds \right] (|q_\tau|^2 f_1(\tau) \overrightarrow{\beta}_\tau^+ + |\sigma_\tau|^2 \overleftarrow{\beta}_\tau^{+*}) d\tau, \quad (28)$$

причем с учетом (9) $|q_t|^2 = \lambda(\nu + 1)e^{-\lambda(2\nu+1)t}$ и $|\sigma_t|^2 = \lambda\nu e^{\lambda(2\nu+1)t}$.

По определению (22) вид супероператора $M\varphi_t(\cdot)\varphi_t^*$, действующего на произвольное состояние ρ_0 , восстанавливается из $M\psi_t$ (26) с помощью подстановки

$$\{\bar{g}, g, \bar{h}, h\} \rightarrow \{\overrightarrow{b}_2^\dagger, \overleftarrow{b}_2, \overleftarrow{b}_1^\dagger, \overrightarrow{b}_1\}.$$

В силу (19) и (20) после коммутаций и подстановки функций $\beta_t^\pm$, C_t (10), $f_1(t)$ (27) и $f_2(t)$ (28) получаем упорядоченное решение уравнения (5)

$$\begin{aligned} \rho_t = & Mu_t \rho_0 u_t^* = e^{-\lambda \nu t} e^{-i\omega a^\dagger a t} e^{-C_t} \exp \left[-b^\dagger b \left(\frac{\lambda}{2} (2\nu + 1) + i\Omega \right) t \right] e^{-ib^\dagger \beta_t^+} e^{-i\beta_t^- b} \times \\ & \times M\psi_t(\overrightarrow{b}_2^\dagger, \overrightarrow{b}_1, \overleftarrow{b}_1^\dagger, \overleftarrow{b}_2) \rho_0^{\text{osc}} e^{i\beta_t^{+*} b^\dagger} e^{i\beta_t^{+*} b} \times \\ & \times \exp \left[-b^\dagger b \left(\frac{\lambda}{2} (2\nu + 1) - i\Omega \right) t \right] e^{-C_t^*} e^{i\omega a^\dagger a t} = \\ = & \frac{1}{\alpha_t} e^{-i\omega (\overrightarrow{a^\dagger a} - \overleftarrow{a^\dagger a}) t} e^{-|\beta_t|^2 / \alpha_t} \exp \left[g(\overleftarrow{a^\dagger a} - \overrightarrow{a^\dagger a}) \int_0^t (\beta_\tau - \beta_\tau^*) d\tau \right] e^{\overrightarrow{b}_3^\dagger \overleftarrow{b}_3 (1-1/\alpha_t)} \times \\ & \times \exp \left[-i \overrightarrow{b}_3^\dagger \frac{\beta_t}{\alpha_t} + i \overleftarrow{b}_3 \frac{\beta_t^*}{\alpha_t} \right] \times \\ & \times \exp \left[-(\overrightarrow{b^\dagger b}_2 + \overleftarrow{b^\dagger b}_2) \left(\frac{\lambda t}{2} + \ln \alpha_t \right) - i\Omega (\overrightarrow{b^\dagger b}_2 - \overleftarrow{b^\dagger b}_2) t \right] \times \\ & \times \exp \left[\overrightarrow{b}_1 \overleftarrow{b}_1^\dagger \left(1 - \frac{e^{-\lambda t}}{\alpha_t} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[-i \overrightarrow{b}_1 \left(\frac{\beta_t^*}{\alpha_t} e^{-(i\Omega + \lambda/2)t} + g(\overrightarrow{a^\dagger a} - \overleftarrow{a^\dagger a}) \frac{e^{-(i\Omega + \lambda/2)t} - 1}{-i\Omega - \lambda/2} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[i \overleftarrow{b}_1^\dagger \left(\frac{\beta_t}{\alpha_t} e^{(i\Omega - \lambda/2)t} - g(\overrightarrow{a^\dagger a} - \overleftarrow{a^\dagger a}) \frac{e^{(i\Omega - \lambda/2)t} - 1}{i\Omega - \lambda/2} \right) \right] \rho_0, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \nu + 1 - \nu e^{-\lambda t}, \\ \beta_t &= e^{-(i\Omega + \lambda/2)t} \int_0^t \left(g \overleftarrow{a^\dagger} a + f_\tau + g \left(\overrightarrow{a^\dagger} a - \overleftarrow{a^\dagger} a \right) \alpha_\tau \right) e^{(i\Omega + \lambda/2)\tau} d\tau.\end{aligned}\quad (30)$$

Таким образом, формула (29) задает явный вид полугруппы $T_t(\cdot)$: $\rho_t = \mathcal{T}_t(\rho_0)$ для уравнения (5).

4. РЕДУЦИРОВАННЫЕ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ ОСЦИЛЛЯТОРА И ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим решение (29), полученное в разделе 3. В наиболее простом случае свободного осциллятора, $H = \hbar\Omega b^\dagger b$, матрица плотности ρ_t принимает вид

$$\begin{aligned}\rho_t &= \frac{1}{\alpha_t} \exp \left[\overrightarrow{b^\dagger}_3 \overleftarrow{b}_3 \left(1 - \frac{1}{\alpha_t} \right) \right] \exp \left[- \left(\overrightarrow{b^\dagger} b_2 + \overleftarrow{b^\dagger} b_2 \right) \left(\frac{\lambda t}{2} + \ln \alpha_t \right) - i\Omega \left(\overrightarrow{b^\dagger} b_2 - \overleftarrow{b^\dagger} b_2 \right) t \right] \times \\ &\times \exp \left[\overrightarrow{b}_1 \overleftarrow{b^\dagger}_1 \left(1 - \frac{e^{-\lambda t}}{\alpha_t} \right) \right] \rho_0.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\lambda t}{2} + \ln \alpha_t = \frac{\lambda t}{2} + \ln \{ 1 + \nu - \nu e^{-\lambda t} \} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Следовательно, множитель $\exp \left[- \left(\overrightarrow{b^\dagger} b_2 + \overleftarrow{b^\dagger} b_2 \right) \left(\lambda t / 2 + \ln \alpha_t \right) \right]$ переводит любое состояние с течением времени в вакуумное, и состояние осциллятора становится стационарным гиббсовским:

$$\begin{aligned}\rho_\infty &= \frac{1}{\alpha_t} e^{\overrightarrow{b^\dagger} \overleftarrow{b} (1 - 1/\alpha_t)} |0\rangle \langle 0| = \frac{1}{\alpha_t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - 1/\alpha_t)^n}{n!} (b^\dagger)^n |0\rangle \langle 0| b^n = \\ &= \frac{1}{\nu + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\nu + 1} \right)^n |n\rangle \langle n| \quad \text{при } \lambda t \gg 1.\end{aligned}\quad (31)$$

При этом, как отмечалось в разделе 1, параметр λ характеризует величину связи осциллятора с термостатом.

Поскольку в состоянии равновесия температура осциллятора и окружения равны, параметр ν характеризует температуру окружения T :

$$\frac{\nu}{\nu + 1} = e^{-\hbar\Omega/(kT)}, \quad \nu = \frac{1}{e^{\hbar\Omega/(kT)} - 1}. \quad (32)$$

Точнее говоря, ν с точностью до размерного множителя имеет смысл средней энергии свободного осциллятора в состоянии равновесия с окружением

$$\langle b^\dagger b \rangle = \text{Tr}(b^\dagger b \rho_\infty) = \nu.$$

Вернемся к исходной модели. Состояние осциллятора есть частичный след оператора ρ_t (29) по состояниям лазерного излучения:

$$\begin{aligned} \rho_t^{\text{osc}} = \text{Tr}_{\text{las}}(\rho_t) &= \frac{1}{\alpha_t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\beta_n(t)|^2/\alpha_t} e^{\vec{b}^\dagger_3 \overleftarrow{b}_3 (1-1/\alpha_t)} \exp \left[-i \vec{b}^\dagger_3 \frac{\beta_n(t)}{\alpha_t} + i \overleftarrow{b}_3 \frac{\beta_n^*(t)}{\alpha_t} \right] \times \\ &\times \exp \left[-\left(\vec{b}^\dagger b_2 + \overleftarrow{b}^\dagger \overleftarrow{b}_2 \right) \left(\frac{\lambda t}{2} + \ln \alpha_t \right) - i \Omega \left(\vec{b}^\dagger b_2 - \overleftarrow{b}^\dagger \overleftarrow{b}_2 \right) t \right] e^{\vec{b}_1 \overleftarrow{b}_1^\dagger (1-e^{-\lambda t}/\alpha_t)} \times \\ &\times \exp \left[-i \vec{b}_1 \frac{\beta_n^*(t)}{\alpha_t} e^{-(i\Omega+\lambda/2)t} + i \overleftarrow{b}_1^\dagger \frac{\beta_n(t)}{\alpha_t} e^{(i\Omega-\lambda/2)t} \right] \rho_0^{\text{osc}} \rho_{nn}^{\text{las}}(0), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\beta_n(t) = e^{-(i\Omega+\lambda/2)t} \int_0^t (gn + f_\tau) e^{(i\Omega+\lambda/2)\tau} d\tau, \quad (34)$$

а начальное состояние системы “осциллятор–электромагнитное поле” имеет вид тензорного произведения: $\rho_0 = \rho_0^{\text{osc}} \otimes \rho_0^{\text{las}}$ с диагональными элементами матрицы плотности электромагнитного поля $\rho_{nn}^{\text{las}}(0)$. Выполним преобразование формулы (33). Изменим порядок следования операторов

$$\exp \left[-i \vec{b}_1 \frac{\beta_n^*(t)}{\alpha_t} e^{-(i\Omega+\lambda/2)t} + i \overleftarrow{b}_1^\dagger \frac{\beta_n(t)}{\alpha_t} e^{(i\Omega-\lambda/2)t} \right]$$

и

$$e^{\vec{b}^\dagger_3 \overleftarrow{b}_3 (1-1/\alpha_t)} \exp \left[-\left(\vec{b}^\dagger b_2 + \overleftarrow{b}^\dagger \overleftarrow{b}_2 \right) \left(\frac{\lambda t}{2} + \ln \alpha_t \right) - i \Omega \left(\vec{b}^\dagger b_2 - \overleftarrow{b}^\dagger \overleftarrow{b}_2 \right) t \right].$$

Полагая

$$U_n = e^{-i b \beta_n^*(t) - i b^\dagger \beta_n(t)},$$

имеем

$$\begin{aligned} \rho_t^{\text{osc}} &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{1}{\alpha_t} e^{\vec{b}^\dagger_3 \overleftarrow{b}_3 (1-1/\alpha_t)} \exp \left[-\left(\vec{b}^\dagger b_2 + \overleftarrow{b}^\dagger \overleftarrow{b}_2 \right) \left(\frac{\lambda t}{2} + \ln \alpha_t \right) \right] \times \\ &\times e^{-i \Omega \left(\vec{b}^\dagger b_2 - \overleftarrow{b}^\dagger \overleftarrow{b}_2 \right) t} e^{\vec{b}_1 \overleftarrow{b}_1^\dagger (1-e^{-\lambda t}/\alpha_t)} \rho_0^{\text{osc}} U_n^\dagger \rho_{nn}^{\text{las}}(0). \end{aligned}$$

При больших временах $\lambda t \gg 1$ состояние осциллятора представляет собой унитарное преобразование (вращение) стационарного гиббсовского состояния

$$\rho_\infty^{\text{osc}} = \sum_{n,m=0}^{\infty} U_n \frac{1}{\nu+1} \left(\frac{\nu}{\nu+1} \right)^m |m\rangle_{\text{osc}} \langle m| U_n^\dagger \rho_{nn}^{\text{las}}(0), \quad (35)$$

Заметим, что U_n зависит от внешней силы f_t и давления электромагнитного поля на осциллятор, но не зависит от температуры окружения.

Лазерный луч, отражаясь от подвижного зеркала, несет информацию о его состоянии. В экспериментах измеряется фаза излучения на выходе из полости. Для теоретического расчета результатов измерений необходимо вычислить редуцированную матрицу плотности лазерного излучения. Рассчитаем ее для начального состояния

$\rho_0 = |0\rangle\langle 0|_{\text{osc}} \otimes \rho_{\text{las}}(0)$, не конкретизируя начальное состояние лазерного излучения на входе в полость. При этом

$$\rho_t = \frac{1}{\alpha_t} \exp \left[-i \overleftarrow{b}^\dagger \frac{\beta_t}{\alpha_t} + i \overleftarrow{b} \frac{\beta_t^*}{\alpha_t} \right] e^{\overleftarrow{b}^\dagger \overleftarrow{b} (1-1/\alpha_t)} e^{-i\omega (\overrightarrow{a}^\dagger a - \overleftarrow{a}^\dagger a) t} e^{-|\beta_t|^2/\alpha_t} \times \\ \times \exp \left[g \left(\overleftarrow{a}^\dagger a - \overrightarrow{a}^\dagger a \right) \int_0^t (\beta_\tau - \beta_\tau^*) d\tau \right] |0\rangle\langle 0|_{\text{osc}} \otimes \rho(0)_{\text{las}}.$$

Частичный след ρ_t по состояниям осциллятора $\rho_{\text{las}} = \text{Tr}_{\text{osc}}(\rho_t)$ можно вычислить с помощью производящей функции полиномов Лагерра [14]:

$$\text{Tr}(e^{z \overleftarrow{b}^\dagger + z^* \overleftarrow{b}} e^{c \overleftarrow{b}^\dagger \overleftarrow{b}} |0\rangle\langle 0|) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \langle m | e^{z \overleftarrow{b}^\dagger} | n \rangle c^n \langle n | e^{z^* \overleftarrow{b}} | m \rangle = \\ = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,k'=0}^m \left\langle m-k' \left| \frac{z^{k'}}{k'!} \sqrt{\frac{m!}{(m-k')!}} \right| n \right\rangle c^n \left\langle n \left| \frac{(z^*)^k}{k!} \sqrt{\frac{m!}{(m-k)!}} \right| m-k \right\rangle = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{|z|^{2k}}{c^k} c^m \frac{m!}{(m-k)! k! k!} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m \left(-\frac{|z|^2}{c} \right) c^m = \frac{e^{|z|^2/(1-c)}}{1-c}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\rho(t)_{\text{las}} = e^{-i\omega (\overrightarrow{a}^\dagger a - \overleftarrow{a}^\dagger a) t} \exp \left[g \left(\overleftarrow{a}^\dagger a - \overrightarrow{a}^\dagger a \right) \int_0^t (\beta_\tau - \beta_\tau^*) d\tau \right] \rho(0)_{\text{las}}, \quad (36)$$

где

$$\beta_t = e^{-(i\Omega + \lambda/2)t} \int_0^t (g \overleftarrow{a}^\dagger a + f_\tau + g (\overrightarrow{a}^\dagger a - \overleftarrow{a}^\dagger a) \alpha_\tau) e^{(i\Omega + \lambda/2)\tau} d\tau.$$

Информация о состоянии осциллятора записывается во внедиагональные элементы матрицы плотности $\rho(t)_{\text{las}}$. При определенном способе измерения фазы волны, например с помощью интерференционного метода, можно рассчитать сигнал на выходе из полости.

5. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ФАЗЫ

Рассмотрим интерференцию электромагнитного излучения, выходящего из двух полостей с подвижными отражающими стенками (см. рисунок). Лазерное излучение попадает на сплиттер (BS1), делящий пучок в отношении 50/50, и распадается на два луча. В отраженный и прошедший лучи помещены полости с подвижными стенками. На втором сплиттере (BS2), который также делит пучок в отношении 50/50, лучи складываются. Предварительно фаза волны в первом луче сдвигается на 90° . За вторым сплиттером на выходе интерферометра (PD1, PD2 – фотодетекторы) измеряется разность интенсивностей двух лучей.

Унитарные матрицы рассеяния первого и второго сплиттеров имеют вид [15] $S_{1,2} = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Если на входе интерферометра излучение находится в когерентном состоянии

$$|\psi\rangle = |z\rangle = e^{-|z|^2/2} \left(1, z, \frac{z^2}{\sqrt{2!}}, \dots, \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \dots \right)$$

Ход лучей и эволюции состояния лазерного излучения в двухплечевом интерферометре.

с амплитудой $z \in \mathbb{C}$ и средним числом фотонов $N = |z|^2$, то после первого сплиттера на входе в полости отраженный и прошедший лучи будут находиться в состояниях

$$\rho(0)_1 = \left| \frac{iz}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle -\frac{iz}{\sqrt{2}} \right|, \quad \rho(0)_2 = \left| \frac{z}{\sqrt{2}} \right\rangle \left\langle \frac{z}{\sqrt{2}} \right|. \quad (37)$$

Состояние излучения в полостях представляется оператором (36). Для дальнейших вычислений удобно записать матрицу плотности системы в каноническом базисе:

$$\begin{aligned} \rho_1(t) = & e^{-N/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |n\rangle_1 \langle m| \frac{(iz)^n (-iz^*)^m}{2^{n/2} 2^{m/2} \sqrt{n! m!}} e^{-i\omega(n-m)t} \times \\ & \times \exp \left[g^2(m-n) \int_0^t \int_0^\tau d\tau ds \left(m e^{(i\Omega + \lambda/2)(s-\tau)} - n e^{(-i\Omega + \lambda/2)(s-\tau)} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[-2g^2(m-n)^2 \int_0^t \int_0^\tau d\tau ds \alpha_s e^{\lambda(s-\tau)/2} \cos \Omega(s-\tau) \right] \times \\ & \times \exp \left[2ig(m-n) \int_0^t \int_0^\tau d\tau ds f_s e^{\lambda(s-\tau)/2} \sin \Omega(s-\tau) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Будем считать, что сила $F(t)$ действует на стенку второй полости в противофазе с такой же силой $F(t)$, действующей на стенку первой полости. Тогда с точностью до преобразования $z \rightarrow iz$ (см. (37)) состояние $\rho_2(t)$ излучения во второй полости определяется формулой (38) со знаком минус перед f_t .

Наблюдаемая, описывающая сигнал на выходе, с точностью до размерного числового множителя равна

$$\hat{I} = c^\dagger c - d^\dagger d,$$

где операторы c и d соответствуют выходящим лучам и выражаются, с учетом дополнительного сдвига фазы на 90° , через операторы, описывающие излучение внутри интерферометра:

$$c = \frac{i}{\sqrt{2}} (a_1 + a_2), \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}} (-a_1 + a_2),$$

где операторы a_1 и a_2 соответствуют излучению в первой и второй полостях. Следовательно, наблюдаемая выходного сигнала, выраженная через операторы, действующие в пространстве состояний лучей внутри интерферометра, равна

$$\hat{I} = a_1^\dagger \otimes a_2 + a_1 \otimes a_2^\dagger. \quad (39)$$

Среднее значение наблюдаемой (39) и ее дисперсия имеют вид

$$I(t) = \text{Tr}(\hat{I}\rho_t), \quad D(t) = \text{Tr}(\hat{I}^2\rho_t) - I^2(t),$$

$$\hat{I}^2 = (a_1^\dagger)^2 \otimes (a_2)^2 + 2a_1^\dagger a_1 \otimes a_2^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_1 + (a_1)^2 \otimes (a_2^\dagger)^2,$$

где $\rho_t = \rho_1(t) \otimes \rho_2(t)$ (38) – состояние излучения внутри интерферометра, и вычисляются явно:

$$I(t) = N \exp[-2g^2 c_t^\nu - 2N \sin^2(g^2 s_t)] \sin(4g\theta_t) \approx 4Ng\theta_t, \quad (40)$$

$$D(t) = N + \frac{N^2}{2} - \frac{N^2}{2} \exp[-8g^2 c_t^\nu - 2N \sin^2(2g^2 s_t)] \cos(8g\theta_t) - I(t)^2 \approx$$

$$\approx N + 4N^2 g^2 c_t^\nu + 4N^3 g^4 s_t^2, \quad (41)$$

где

$$\theta_t = \int_0^t \int_0^\tau d\tau ds f_s e^{\lambda(s-\tau)/2} \sin \Omega(s - \tau), \quad (42)$$

$$c_t^\nu = \int_0^t \int_0^\tau d\tau ds (2\alpha_s - 1) e^{\lambda(s-\tau)/2} \cos \Omega(s - \tau), \quad (43)$$

$$s_t = \int_0^t \int_0^\tau d\tau ds e^{\lambda(s-\tau)/2} \sin \Omega(s - \tau). \quad (44)$$

Приближенные выражения для (40), (41) справедливы при учете малости силы $g\theta_t \ll 1$ и малости константы взаимодействия лазерного луча и осциллятора $g^2 c_t^\nu \ll 1$, $g^2 s_t \ll 1$. Характерно, что в этом приближении среднее значение сигнала определяется только воздействием силы f_t на осциллятор (см. (40), (42)). Однако, как следует из (44), функция $|s_t|$ является возрастающей функцией времени, поэтому в области $Ng^4 s_t^2 \gg 1$ разложения (40), (41) неприменимы, и $I(t) \rightarrow 0$, $D(t) \rightarrow N^2/2$ экспоненциально по $Ng^4 s_t^2$.

Рассмотрим относительную дисперсию $\sigma_t^2 = D(t)/I^2(t)$; если $\sigma_t^2 \leq 1$, то сигнал может быть обнаружен на фоне шума. Из формул (40), (41) следует, что квадрат относительных флуктуаций состоит из трех слагаемых

$$\sigma^2(t) = \frac{D(t)}{I^2(t)} \approx \frac{1}{16g^2\theta_t^2 N} + \frac{c_t^\nu}{4\theta_t^2} + \frac{g^2 s_t^2 N}{4\theta_t^2} \leq 1. \quad (45)$$

Анализ первого и третьего слагаемых приведен в работе [16]. Температура окружения влияет только на второй член в σ^2 , не зависящий от числа фотонов в полости и ее параметров, т.е. на стандартный квантовый предел [17].

В разложении по малому параметру λ функции α_t , которая входит в c_t^ν (см. (4)), с учетом (32) имеем

$$\alpha_t = \nu + 1 - \nu e^{-\lambda t} \approx 1 + \lambda \nu t = 1 + \frac{kT\lambda t}{\hbar\Omega} \quad \text{при} \quad \lambda t \ll 1$$

для собственной частоты колебаний макроскопического маятника $\Omega/(2\pi) \sim O(1)\text{с}^{-1}$. Следовательно, температура окружения не будет влиять на точность измерений, если выполнено условие

$$\frac{kT\lambda t}{\hbar\Omega} \ll 1,$$

которое для температуры $T \sim 100\text{К}$ означает, что $\lambda t \ll 10^{-12}$, где λ – обратное время релаксации маятника, t – время измерения.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрели частный случай стохастической формулы Бейкера–Хаусдорфа (8), в котором фигурируют две независимые компоненты винеровского процесса, причем оператор рождения входит в одну компоненту, а уничтожения – в другую. Более общий случай n -мерного винеровского процесса рассмотрен в работе [18].

Вычисленный в явном виде стохастический оператор эволюции u_t (20) позволяет находить состояние системы ρ_t (29) для произвольного начального состояния ρ_0 . Формулы (31), (35) описывают поведение ρ_t при $t \rightarrow \infty$.

Наконец, рассмотрев хорошо известную модель интерференционного метода измерения координаты подвижного зеркала, мы показали, что температура окружения измеряемой системы (осциллятора) в первом приближении по константе связи влияет только на второе слагаемое в формуле для относительных флуктуаций (45), которое не зависит от характеристик сенсора – лазерного излучения, падающего на осциллятор, и имеет смысл температурного стандартного квантового предела.

Список литературы

- [1] C. W. Gardiner, P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer Ser. Synergetics, Springer, Berlin, 2004.
- [2] H. J. Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*, Springer, Berlin, 1993.
- [3] V. P. Belavkin, A. Barchielli, *J. Phys. A*, **24**:7 (1991), 1495–1514.
- [4] В. П. Белавкин, *ТВП*, **38**:4 (1993), 742–757.
- [5] М. Б. Менский, *Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология*, Физматлит, М., 2001.
- [6] V. I. Man'ko, V. A. Sharapov, E. V. Shchukin, *Probability representation of kinetic equation for open quantum system*, [arXiv:quant-ph/0305119](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0305119).
- [7] M. Caponigro, S. Mancini, V. I. Man'ko, *Fortschr. Phys.*, **54**:7 (2006), 602–612.
- [8] A. M. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*, Math. Contrib. Texts, **14**, SMM, México, 2000.
- [9] G. Lindblad, *Comm. Math. Phys.*, **48**:2 (1976), 119–130.

- [10] S. Bose, K. Jacobs, P. L. Knight, *Phys. Rev. A*, **56**:5 (1997), 4175–4186.
- [11] C. Brif, A. Mann, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **2**:1 (2000), 53–61.
- [12] А. Д. Вентцель, М. И. Фрейндлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, Наука, М., 1979.
- [13] И. В. Гирсанов, *ТВП*, **5**:3 (1960), 314–330.
- [14] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, М., 1977.
- [15] H. A. Haus, *Electromagnetic Noise and Quantum Optical Measurements*, Springer, Berlin, 2000.
- [16] A. M. Sinev, *On a quantum model of a laser-interferometer measuring a weak classical force*, [arXiv:0806.3212](https://arxiv.org/abs/0806.3212).
- [17] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky, F. Ya. Khalili, *Phys. Lett. A*, **246**:6 (1998), 485–497.
- [18] А. М. Синев, *Матем. заметки*, **84**:3 (2008), 395–408.

Поступила в редакцию 14.07.2008