Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, П. Б. Гольдин, Т. Л. Ким,
М. В. Компаниец, Ренормализационная группа в теории
турбулентности: трехпетлевое приближение при $d \rightarrow \infty$,
ТМФ, 2009, том 158, номер 3, 460–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:10:02

© 2009 г.

Л. Ц. Аджемян*, Н. В. Антонов*,
П. Б. Гольдин*, Т. Л. Ким*, М. В. Компаниец*

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: ТРЕХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРИ $d \rightarrow \infty$

Метод ренормализационной группы применяется для исследования стохастического уравнения Навье–Стокса с коррелятором случайной силы вида $k^{4-d-2\varepsilon}$ в пространстве d измерений в связи с проблемой построения разложения по $1/d$ и выхода за рамки стандартного ε -разложения в теории развитой гидродинамической турбулентности. Обнаружено, что число диаграмм теории возмущений для функции Грина в пределе больших d резко сокращается. Разработана техника аналитического вычисления диаграмм. Практический расчет основных ингредиентов ренормгруппового подхода – константы ренормировки, β -функции, координаты неподвижной точки и ультрафиолетового поправочного индекса ω – выполнен в порядке ε^3 (трехпетлевое приближение). На основе полученных результатов предложены гипотетические точные (т.е. не в форме ε -разложений) выражения для неподвижной точки и индекса ω .

Ключевые слова: ренормализационная группа, развитая турбулентность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое описание развитой гидродинамической турбулентности часто называют последней нерешенной проблемой классической физики [1]. Одной из конкретных задач является обоснование в рамках микроскопической динамической модели явления аномального скейлинга для корреляционных функций поля скорости и вычисление соответствующих аномальных показателей в форме рядов последовательной теории возмущений, подобных известным ε - или $1/N$ -разложениям критических индексов в теории критических явлений (см., например, [2], [3]).

Первая встречающаяся при решении этой задачи трудность состоит в том, что обычная теория возмущений – разложение по нелинейному параметру для стохастического уравнения Навье–Стокса – является фактически разложением по числу Рейнольдса, т.е. по параметру, стремящемуся к бесконечности для развитой турбулентности. Возникает необходимость каким-либо образом перестроить (пересуммировать) ряды обычной теории возмущений. Подобная проблема известна и в теории

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: Loran.Adzheмян@pobox.spbu.ru

критического поведения, где она решается с помощью метода ренормализационной группы (РГ), что приводит к представлению критических индексов в виде рядов по параметру $\varepsilon = 4 - d$ – отклонению размерности пространства d от верхней критической размерности $d = 4$, выше которой критическое поведение тривиализуется. Альтернативный подход основан на использовании уравнений самосогласования со скелетными диаграммами (бутстрап) и приводит к $1/N$ -разложениям, где N – число компонент параметра порядка. Однако применение этих методов к развитой турбулентности не привело до сих пор к окончательному решению проблемы аномального скейлинга.

Важно отметить, что для турбулентности (точнее говоря, для стохастического уравнения Навье–Стокса) не существует верхней критической размерности, и параметр разложения ε в теоретико-полево РГ-подходе имеет совершенно иной физический смысл: корреляционная функция случайной силы, моделирующей “накачку” энергии в систему от внешнего источника, выбирается в степенном виде [4]:

$$\langle ff \rangle \propto k^{4-d-2\varepsilon}, \quad (1)$$

где k – волновое число. Подробное обсуждение этого выбора можно найти в работах [3], [5], [6]. Физическое значение $\varepsilon = 2$ отвечает накачке вихрями бесконечно большого размера: $\langle ff \rangle \propto \delta(\mathbf{k})$. При этом размерность пространства d остается свободным параметром и может изменяться независимо от ε . Общей чертой данного подхода с моделями критического поведения является то, что предел $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствует логарифмической (точно ренормируемой) теоретико-полевой модели, а ультрафиолетовые (УФ) расходимости проявляются как полюсы по ε в диаграммах теории возмущений. По этой причине мы используем тот же символ ε и для стохастического уравнения Навье–Стокса; в литературе иногда вместо ε используют обозначение $y/2$ [4].

Результаты РГ-подхода к модели (1) внутренне непротиворечивы и надежны при асимптотически малых ε , тогда как возможность их экстраполяции к физическому (не малому) значению $\varepsilon = 2$ далеко не очевидна. Разумеется, физическое значение $\varepsilon = 4 - d = 1$ в теории критических явлений также отнюдь не мало, но в этом случае нет конкретных оснований ожидать появления каких-либо качественных изменений в поведении системы при увеличении ε и переходе из области малых значений $\varepsilon \ll 1$ к реальным конечным $\varepsilon \sim 1$, так что возможность такой экстраполяции обычно не подвергается сомнению.

Для стохастического уравнения Навье–Стокса с накачкой (1) ситуация заведомо более сложная. С ростом ε возникают новые качественные эффекты, которые легко могут быть потеряны, если ε -разложение используется некритично или неосторожно. Один из таких эффектов, возникающий при $\varepsilon \geq 3/2$, связан с известным явлением переноса турбулентных вихрей как целого вихрями существенно больших размеров. Это приводит к сильной зависимости корреляционных функций скорости от внешнего (интегрального) масштаба турбулентности L ; эта зависимость исчезает лишь в галилеево-инвариантных величинах, например в одновременных структурных функциях. Другой ожидаемый эффект – переход (кроссовер) при некотором (пока неизвестном) значении ε от колмогоровского скейлинга (теории К41) к так называемому аномальному скейлингу (мультискейлингу) – сингулярной зависимости

галилеево-инвариантных корреляционных функций от масштаба L , характеризующейся бесконечным набором независимых показателей (см., например, [1]).

Подобные эффекты в РГ-подходе могут быть связаны с возникновением в соответствующих операторных разложениях так называемых опасных составных полей (составных операторов в квантово-полевой терминологии), имеющих *отрицательные* критические размерности [7]. В модели (1) таковыми оказываются все операторы вида v^n , т.е. степени поля скорости v , при $\varepsilon \geq 3/2$. Суммирование их вкладов в операторных разложениях, выполненное в работе [7], позволяет выйти за рамки простого ε -разложения и дать адекватное описание вышеупомянутых эффектов переноса и связанных с ними сингулярностей при $L \rightarrow \infty$ (см. также [5], [6]). Что касается аномального скейлинга в структурных функциях, то он, по-видимому, должен быть связан с существованием в модели (1) галилеево-инвариантных опасных операторов. Эта идея была успешно реализована в популярной модели Обухова–Крейчнана, описывающей турбулентное перемешивание пассивного скалярного поля (температуры, концентрации примеси и т.п.) “синтетическим” гауссовым полем скорости с заданным коррелятором вида $\propto \delta(t - t')/k^{d+\varepsilon}$ (см. обзор [8] и цитированную там литературу). Первоначально аномальные индексы в этой модели были вычислены в порядках $O(1/d)$ [9] и $O(\varepsilon)$ [10] в рамках так называемого метода нулевых мод (который можно рассматривать как некоторую разновидность метода уравнений самосогласования). В РГ-подходе к модели Обухова–Крейчнана, развитом в работе [11], аномальные показатели были отождествлены с размерностями опасных галилеево-инвариантных операторов, а именно степеней локальной скорости диссипации скалярных флуктуаций. Это позволило построить для них систематическое разложение по показателю ε и выполнить вычисления в порядках ε^2 [11] и ε^3 [12]. Обсуждение РГ-подхода к проблеме аномального скейлинга в моделях турбулентного перемешивания и подробную библиографию можно найти в работе [13].

Однако реализация подобной программы для стохастической модели с накачкой (1) оказалась пока невозможной. Дело в том, что в отличие от модели Обухова–Крейчнана критические размерности всех галилеево-инвариантных составных операторов при малых ε в этой стохастической модели строго положительны. Если некоторые из них и становятся отрицательными при некоторых конечных значениях $\varepsilon \sim 1$, этот факт нельзя надежно установить в рамках ε -разложения, так как известны лишь один-два члена ряда по ε и лишь для немногих операторов (несколько размерностей известно точно, но все они при $\varepsilon \leq 2$ остаются положительными [14]). Подробное обсуждение этих вопросов и ссылки можно найти в работах [3], [5], [6]. Таким образом, возникает потребность в альтернативной (к ε -разложению) теории возмущений. Предпринимавшиеся попытки ввести N “реплик” поля скорости и построить $1/N$ -разложение (см., например, [15]) несовместимы с галилеевой инвариантностью и не могут быть признаны удовлетворительными.

Гораздо более многообещающей представляется идея построения теории возмущений по $1/d$ (обратной размерности пространства), высказанная в различных контекстах и в разных формах в ряде работ [16]–[21]. Ожидается [17], что в пределе $d \rightarrow \infty$ задача упростится и, возможно, окажется точно решаемой (например, аномальный скейлинг исчезнет, и теория K41 станет справедливой), так что ее можно будет использовать как нулевое приближение систематической теории возмущений

с малым параметром $1/d$ (добавим, что для реальной трехмерной турбулентности он действительно мал: $1/d = 1/3$).

Аргументы в пользу исчезновения аномального скейлинга при $d = \infty$, основанные на некотором замыкании уравнений для корреляционных функций, были приведены в работе [18]. Ранее это было обнаружено для упоминавшейся выше модели Обухова–Крейчнана [16], причем в ней удастся найти также аномальные показатели в порядке $O(1/d)$ [9] (хотя построить систематическое разложение по $1/d$ или хотя бы вычислить аномальные показатели в порядке $O(1/d^2)$ пока не удалось).

Приводились, однако, и аргументы в пользу сохранения нетривиального скейлинга для развитой турбулентности в пределе бесконечного числа измерений [19]. Выполненный в работе [17] анализ диаграмм нестационарной теории возмущений для стохастического уравнения Навье–Стокса, как и анализ ренормированной стационарной теории возмущений с одетыми линиями, не обнаружил каких-либо диаграмм или классов диаграмм, которые исчезали бы при $d \rightarrow \infty$. Не было найдено и каких-либо радикальных упрощений в самих диаграммах, которые позволили бы получить явное общее выражение для их суммы, как это удастся сделать для $O(N)$ -симметричной модели критического поведения, где предел $N \rightarrow \infty$ описывается в замкнутом виде точно решаемой сферической моделью [2].

Ключевая идея данной работы – совмещение асимптотики $d \rightarrow \infty$ для модели (1) с РГ-аппаратом и ε -разложением. Ранее было замечено [20], [21], что переход к пределу больших d приводит к значительным упрощениям в РГ-вычислениях. Так, в очень важной работе [20] скейлинговые размерности всех составных операторов (степеней скорости локальной диссипации энергии) были вычислены в модели (1) в первом порядке по ε . Для конечных d эта задача оказывается чрезвычайно сложной из-за смешивания операторов при ренормировке, так что она не была полностью решена даже для простейшего случая квадрата оператора диссипации [14]. Найденные в работе [20] размерности положительны при $\varepsilon < 2$, монотонно убывают с ростом ε и обращаются в нуль при физическом значении $\varepsilon = 2$, что согласуется с аргументами работ [17], [18] о справедливости теории К41 для $d = \infty$. Поэтому вполне возможно, что поправки порядка $O(\varepsilon/d)$ к результату работы [20] окажутся отрицательными (степени скорости диссипации окажутся опасными операторами), так что аномальный скейлинг в модели (1) будет корректно обоснован в рамках *двойного* разложения по ε и $1/d$ (напомним, что именно степени скорости диссипации ответственны за аномальный скейлинг в модели Обухова–Крейчнана [11]–[13]). Для векторного аналога модели Обухова–Крейчнана, где вычисления аномальных показателей оказываются весьма громоздкими уже в порядке $O(\varepsilon)$ из-за смешивания составных операторов, дополнительное разложение по $1/d$ также приводит к существенным упрощениям [21].

В настоящей работе мы систематически исследуем предел больших d для стохастического уравнения Навье–Стокса в рамках РГ-подхода. Хотя нам и не удалось найти точное решение задачи при $d = \infty$ или построить аналог сферической модели, мы обнаружили радикальные упрощения в диаграммах функции Грина (функции отклика), что позволило вычислить основные ингредиенты РГ-теории – константу ренормировки, β -функцию, координату неподвижной точки и УФ-поправочный

индекс – в третьем порядке ε -разложения (трехпетлевое приближение). Полученные результаты позволяют предложить гипотетические точные (т.е. без разложения по ε) выражения для этих величин. В дальнейшем предполагается получить аналогичные результаты для других интересных величин – константы Колмогорова в спектре турбулентной энергии, асимметрии (скьюнесс-фактора) и др. Мы полагаем, что эти результаты окажутся полезными при последующих попытках построения $1/d$ -разложения для развитой гидродинамической турбулентности.

2. СТОХАСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ НАВЬЕ–СТОКСА. ВЫБОР КОРРЕЛЯТОРА СЛУЧАЙНОЙ СИЛЫ

Ниже мы кратко напомним необходимые сведения об РГ-подходе к теории развитой турбулентности; подробное изложение и библиографию можно найти в работах [3], [5], [6].

В качестве микроскопической динамической модели развитой однородной изотропной турбулентности несжимаемой вязкой жидкости обычно выбирается стохастическое уравнение Навье–Стокса с внешней случайной силой

$$\nabla_t v_i = \nu_0 \partial^2 v_i - \partial_i \mathcal{P} + f_i, \quad \nabla_t = \partial_t + v_i \partial_i, \quad (2)$$

где v_i – поперечное (в силу условия несжимаемости $\partial_i v_i = 0$) поле скорости, $\mathcal{P}$ – давление и f_i – поперечная внешняя сила (все эти величины зависят от $x = \{t, \mathbf{x}\}$), ν_0 – кинематический коэффициент вязкости, ∂^2 – лапласиан и ∇_t – лагранжева производная. Для f предполагается гауссово распределение с нулевым средним и заданным коррелятором

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \frac{\delta(t-t')}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) d_f(k) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}, \quad (3)$$

где $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, $d_f(k)$ – некоторая функция от $k = |\mathbf{k}|$ и параметров модели и d – размерность пространства переменных $\mathbf{x}$. Отсутствие корреляций во времени обеспечивает галилееву инвариантность стохастической задачи (2), (3).

Случайная сила моделирует поступление энергии в систему за счет взаимодействия с крупномасштабными движениями. Идеализированной накачке бесконечно большими вихрями отвечает функция $d_f(k)$ вида

$$d_f(k) = 2(2\pi)^d \frac{\mathcal{E} \delta(\mathbf{k})}{d-1}, \quad (4)$$

где $\mathcal{E}$ – средняя мощность накачки (равная взятой со знаком минус средней скорости диссипации энергии). Амплитудный множитель в (4) возникает из точного соотношения

$$\mathcal{E} = \frac{d-1}{2(2\pi)^d} \int d\mathbf{k} d_f(k). \quad (5)$$

Однако для использования стандартного РГ-аппарата важно, чтобы функция $d_f(k)$ имела степенную асимптотику при больших k . Это условие обеспечивается выбором $d_f(k)$ в виде

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d-2\varepsilon} \quad (6)$$

с амплитудным множителем $D_0 > 0$ и показателем $\varepsilon > 0$. Физическим значением последнего является $\varepsilon = 2$, что вытекает из известного степенного представления d -мерной δ -функции

$$\delta(\mathbf{k}) = S_d^{-1} k^{-d} \lim_{\varepsilon \rightarrow 2} \left[(4 - 2\varepsilon) \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^{4-2\varepsilon} \right], \quad (7)$$

в котором Λ – некоторый масштаб размерности импульса. Здесь и далее мы используем обозначения

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \quad \bar{S}_d = \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad (8)$$

где S_d – площадь поверхности единичной сферы в d -мерном пространстве и $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. При $\varepsilon \rightarrow 2$ функция (6) превращается в идеальную накачку (4), если связать амплитуду D_0 с мощностью $\mathcal{E}$ соотношением

$$D_0 \rightarrow \frac{4(2 - \varepsilon)\Lambda^{2\varepsilon-4}}{\bar{S}_d(d-1)} \mathcal{E}, \quad \varepsilon \rightarrow 2. \quad (9)$$

Как уже упоминалось, в РГ-подходе к задаче (2), (3), (6) показатель ε играет роль, аналогичную параметру $4 - d$ в теории критического поведения, тогда как размерность d остается свободным параметром. Более реалистической моделью накачки является

$$d_f(k) = D_0 k^{4-d-2\varepsilon} \Theta(k - m), \quad (10)$$

где $m = 1/L$ – величина, обратная интегральному (внешнему) масштабу L , а функция Хевисайда $\Theta(\cdot)$ обеспечивает инфракрасную (ИК) регуляризацию. Явный вид такой регуляризации несуществен. Резкое обрезание наиболее удобно с точки зрения практических вычислений.

Согласно общей теореме (см., например, [3], [5], [6]) стохастическая задача (2), (3) эквивалентна теоретико-полевой модели удвоенного набора полей $\Phi = \{v', v\}$ с функционалом действия вида

$$S(\Phi) = \frac{v' D_v v'}{2} + v' [-\nabla_t + \nu_0 \partial^2] v, \quad (11)$$

где D_v – коррелятор случайной силы (3) с функцией $d_f(k)$ из (10) и подразумеваются все необходимые интегрирования по $x = \{t, \mathbf{x}\}$ и суммирования по векторным индексам, например

$$v'(v\partial)v = \int dt \int d\mathbf{x} v'_i (v_j \partial_j) v'_i.$$

Вспомогательное поле (“поле отклика”) также поперечно, $\partial_i v'_i = 0$, что и позволило опустить в (11) вклад давления.

Модели (11) отвечает стандартная фейнмановская диаграммная техника. Пропагаторы (линии в диаграммах) в представлении время-импульс $(t-\mathbf{k})$ имеют вид

$$\begin{aligned} \langle v_i(t) v'_j(t') \rangle_0 &= \Theta(t - t') e^{-\nu_0 k^2 (t-t')} P_{ij}(\mathbf{k}) = \text{---+}, \\ \langle v_i(t) v_j(t') \rangle_0 &= \frac{d_f(k)}{2\nu_0 k^2} e^{-\nu_0 k^2 |t-t'|} P_{ij}(\mathbf{k}) = \text{---}, \\ \langle v'_i(t) v'_j(t') \rangle_0 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

возмущений (по g вместо g_0):

$$W^R(g, \nu, \mu, m, \dots) = W(g_0, \nu_0, m_0, \dots) \quad (18)$$

(многоточия здесь означают другие переменные типа времен, координат или импульсов).

Обозначим символом $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ дифференциальную операцию $\mu\partial_\mu$ при фиксированных затравочных параметрах g_0, ν_0, m_0 и применим ее к обеим частям равенства (18). Это даст основное дифференциальное РГ-уравнение

$$\mathcal{D}_{\text{RG}} W^R(g, \nu, \mu, m, \dots) = 0, \quad \mathcal{D}_{\text{RG}} = \mathcal{D}_\mu + \beta(g)\partial_g - \gamma_\nu(g)\mathcal{D}_\nu, \quad (19)$$

в котором $\mathcal{D}_{\text{RG}}$ есть операция $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$, выраженная в ренормированных переменных, введено обозначение $\mathcal{D}_x = x\partial_x$ для любой переменной x , а РГ-функции (аномальная размерность γ_ν и β -функция) определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_\nu(g) &= \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\nu = \beta(g, \varepsilon)\partial_g \ln Z_\nu, \\ \beta(g, \varepsilon) &= \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = g[-2\varepsilon + 3\gamma_\nu(g)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Последнее соотношение между β и γ_ν следует из определений и последнего равенства в (15). Объединяя соотношения (20) и подставляя в них представление (17), получаем

$$\gamma_\nu(g) = -2\mathcal{D}_g a_1(g) + \text{вклады с полюсами по } \varepsilon. \quad (21)$$

Из УФ-конечности ренормированных функций W^R вытекает конечность величины γ_ν , поэтому вклады от полюсов в (21) обязаны взаимно сокращаться, что окончательно дает

$$\gamma_\nu(g) = -2\mathcal{D}_g a_1(g) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n1} g^n \quad (22)$$

с $a_1(g)$ и a_{n1} , определенными в (17).

Однопетлевой результат

$$a_{11} = -\frac{(d-1)\bar{S}_d}{8(d+2)} \quad (23)$$

с $\bar{S}_d$ из (8) хорошо известен, тогда как двухпетлевой вклад a_{21} был вычислен относительно недавно в работе [22] для некоторых значений d , включая $d = 3$; в интересующем нас сейчас предельном случае $d \rightarrow \infty$

$$a_{21} = a_{11}^2 \left[-\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{d}\right) \right]. \quad (24)$$

Уже из однопетлевого результата (23) видно, что β -функция нашей модели имеет в физической области $g > 0$ нетривиальную ИК-притягивающую неподвижную точку g_* ,

$$g_* \bar{S}_d = \frac{8(d+2)\varepsilon}{3(d-1)} + O(\varepsilon^2), \quad (25)$$

в которой $\beta(g_*) = 0$ и $\omega = \beta'(g_*) = 2\varepsilon + O(\varepsilon^2) > 0$. Эта точка управляет ИК-асимптотиками корреляционных функций, что обеспечивает их масштабно-инвариантное

(скейлинговое) поведение (подробности см. в [3], [5], [6]). Значение аномальной размерности

$$\gamma_\nu^* \equiv \gamma_\nu(g_*) = \frac{2\varepsilon}{3} \quad (26)$$

в точке g_* находится точно благодаря соотношениям (20).

Соотношения (23) и (24) иллюстрируют факт, который станет в дальнейшем очевидным из прямых вычислений: конечными в пределе $d \rightarrow \infty$ оказываются не сами коэффициенты a_{n1} , а конструкции типа $b_{n1} = a_{n1}\bar{S}_d^{-n}$. Поэтому удобнее перейти к новой константе связи

$$u = g\bar{S}_d. \quad (27)$$

Теперь корреляционные функции W и W^R , константы ренормировки (17) и РГ-функции γ_ν и $\beta = \tilde{D}_\mu u$ имеют конечные пределы при $d \rightarrow \infty$, если они выражены через новый параметр u и он считается в этом пределе фиксированным.

С точки зрения физики такой выбор отвечает фиксации при $d \rightarrow \infty$ мощности накачки *на одну компоненту* поля скорости (или на одно пространственное измерение), что видно из соотношений (8), (9) и (14). Этот выбор также согласуется с тем, что именно значение параметра u_* в неподвижной точке g_* конечно в пределе больших d . В дальнейшем предел $d \rightarrow \infty$ всегда понимается именно в таком смысле.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТ РЕНОРМИРОВКИ И РГ-ФУНКЦИЙ В ТРЕХПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Обратимся к вычислению константы ренормировки Z_ν в (17) с точностью $O(g^3)$ (трехпетлевое приближение) в пределе $d \rightarrow \infty$. В общем случае константа Z_Γ , отвечающая некоторой 1-неприводимой корреляционной функции $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1-ir}$, может быть найдена из соотношения [23] (см. также монографию [3])

$$Z_\Gamma = 1 - \mathcal{K}\mathcal{R}'\tilde{\Gamma}, \quad (28)$$

где $\tilde{\Gamma}$ есть функция Γ , нормированная на единицу в нулевом порядке теории возмущений, $\mathcal{R}'$ – неполная $\mathcal{R}$ -операция, включающая вычитания на все подграфы, кроме последнего вычитания на саму диаграмму как целое, $\mathcal{K}$ – операция вычитания УФ-расходимости в данной ренормировочной схеме. Мы используем МВ-схему, в которой $\mathcal{K}$ вычитает только полюсы по ε :

$$\mathcal{K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varepsilon^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \varepsilon^n$$

для любого ряда Лорана. Функция $\tilde{\Gamma}$ в (28) должна вычисляться в ренормированных переменных на основе “базового” функционала действия, которое получается из ренормированного действия (16) заменой $Z_i \rightarrow 1$ для всех констант ренормировки (см., например, [3]).

Единственная независимая константа ренормировки Z_ν в модели (16) определяется 1-неприводимой функцией (в переменных частота-импульс)

$$\Gamma_{ij}(\omega, \mathbf{p}) = \langle v'_i v_j \rangle_{1-ir} = \Gamma(\omega, \mathbf{p}) P_{ij}(\mathbf{p}), \quad (29)$$

где проектор $P_{ij}(\mathbf{p}) = \delta_{ij} - p_i p_j / p^2$ возникает в силу поперечности полей v'_i, v_j . Тогда скалярный коэффициент $\Gamma(\omega, \mathbf{p})$ в (29) дается соотношением

$$\Gamma(\omega, \mathbf{p}) = \frac{\Gamma_{ij}(\omega, \mathbf{p}) P_{ij}(\mathbf{p})}{d-1} = \frac{\Gamma_{ii}(\omega, \mathbf{p})}{d-1}, \quad (30)$$

в котором $d-1 = P_{ii}(\mathbf{p})$ возникает от следа поперечного проектора. В теории возмущений

$$\Gamma(\omega, \mathbf{p}) = -i\omega + \nu p^2 + O(g).$$

Поскольку член к функции (29) пропорционален νp^2 , в Γ можно положить $\omega = 0$ и пренебречь всеми вкладками старше p^2 . Тем самым нормированную функцию $\tilde{\Gamma}$ в (28) можно взять в виде

$$\tilde{\Gamma} = \lim_{\mathbf{p} \rightarrow 0} \left[\frac{\langle v'_i v_i \rangle_{1-ir}(\omega; \mathbf{p})}{\nu p^2 (d-1)} \right]_{\omega=0}; \quad (31)$$

она зависит лишь от двух безразмерных переменных g и m/μ .

Интегрирования по временам (или частотам) в диаграммах выполняются элементарно, при этом множители ν , возникающие от интегрирований по времени и от пропагаторов $\langle vv \rangle_0$, сокращаются с множителем ν в знаменателе формулы (31). Значительно более серьезной проблемой является вычисление интегралов по импульсам.

Первое важное наблюдение состоит в том, что в любой диаграмме функции (29) число петель (равное числу независимых импульсов интегрирования) всегда равно числу линий (пропагаторов) типа $\langle vv \rangle_0$. Это легко видеть на примере всех диаграмм, которые мы будем обсуждать в данном разделе, так что мы не будем приводить формального доказательства. Тем самым можно приписать “чистые” импульсы интегрирования (которые для трехпетлевых диаграмм будут обозначаться $\mathbf{k}, \mathbf{q}$ и $\mathbf{l}$) линиям $\langle vv \rangle_0$. Импульсы, связанные с остающимися пропагаторами типа $\langle vv' \rangle_0$, будут тогда определенными линейными комбинациями импульсов интегрирования и внешнего импульса $\mathbf{p}$.

Каждая линия $\langle vv \rangle_0$ привносит одно интегрирование по независимому “чистому” импульсу:

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \langle vv \rangle_0(k) \dots = \frac{g\mu^{2\varepsilon}\nu^2}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k} k^{2-d-2\varepsilon} \dots \quad (32)$$

Здесь мы использовали второе из равенств (12), опустив в нем проектор и безразмерный экспоненциальный множитель, зависящий от времени; они обозначены многоточием. Теперь можно разделить интегрирование по $d\mathbf{k} = k^{d-1} dk d\mathbf{n}$ на интегрирования по $k = |\mathbf{k}|$ и по углам, т.е. по направлению $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, и заменить последнее усреднением $\langle \dots \rangle_S$ по единичной d -мерной сфере с нормировкой $\langle 1 \rangle_S = 1$. Это дает

$$\frac{g\mu^{2\varepsilon}\nu^2}{(2\pi)^d} \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} \int d\mathbf{n} \dots = g\mu^{2\varepsilon}\nu^2 \bar{S}_d \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}} \langle \dots \rangle_S. \quad (33)$$

Множитель $\bar{S}_d$ из (8) группируется с константой связи g , образуя комбинацию (27), которая фиксирована в пределе $d \rightarrow \infty$. Нижний предел интегрирования m возникает из (10) и обеспечивает ИК-регуляризацию. В выражении (33) степени k^{-d} из коррелятора (10) и k^d из якобиана взаимно сокращаются, так что зависимость

диаграмма с несимметричными вершинами может содержать не более одной цепочки типа (37). Предположим для определенности, что множитель δ_{ii_1} в (37) возникает от крайней левой (внешней) вершины диаграммы, а $\delta_{i_n j}$ – от крайней правой вершины. Тогда из вида вершины (35) следует, что векторный индекс i соответствует полю v без производной, а i_1 – полю v' . Последнее неизбежно сворачивается с полем v в соседней вершине, поскольку пропагатор $\langle v'v' \rangle_0$ в нашей модели отсутствует (см. (12)). Следовательно, очередной множитель $\delta_{i_1 i_2}$ возникает от пропагатора $\langle v'v \rangle_0$. Он сворачивается со следующим символом $\delta_{i_2 i_3}$ из вершины, в котором индекс i_2 должен принадлежать полю v без производной (любая свертка с импульсом в (35) прервала бы цепочку δ -символов); тогда i_3 неизбежно соответствует полю v' и т.д.

Мы приходим к заключению, что произведение типа (37) обязательно связано с цепочкой пропагаторов $\langle v'v \rangle_0$, начинающейся в левой внешней вершине диаграммы и заканчивающейся в ее правой внешней вершине. Далее мы будем называть такую цепочку хребтом диаграммы. Отметим, что множитель типа (37) также может порождаться *замкнутым* контуром пропагаторов $\langle v'v \rangle_0$, не связанных с внешними вершинами. Но, как ясно из (12), такой контур также содержит замкнутую цепочку Θ -функций по времени, приходящих от запаздывающих пропагаторов $\langle v'v \rangle_0$, и потому любая такая диаграмма тождественно равна нулю.

Нетрудно убедиться, что каждая диаграмма 1-неприводимой функции (29) содержит ровно одну цепочку пропагаторов $\langle v'v \rangle_0$, соединяющих внешние вершины, т.е. ровно один хребет. Однако хребет порождает нужный нам множитель (37) только в том случае, когда ни на одно из входящих в него полей v не действует производная. Это означает, что все точки в вершинах (35), принадлежащих хребту, должны располагаться вне хребта, что однозначно фиксирует их расстановку и значительно сокращает число диаграмм, содержащих множитель (37). На рис. 1 только первая из диаграмм в правой части не имеет точек на хребте, содержит множитель (37) и дает неисчезающий вклад в величину (30); все остальные диаграммы исчезают при $d \rightarrow \infty$, и их можно далее не рассматривать. На рис. 2 приведено несколько двухпетлевых примеров “правильной” расстановки точек на хребте, обеспечивающей существование множителя типа (37).

Рис. 2. Примеры двухпетлевых диаграмм, не исчезающих при $d \rightarrow \infty$.

Следующее важное наблюдение состоит в том, что любое нетривиальное угловое усреднение вносит поправку порядка $1/d$; соответствующие вклады при $d \rightarrow \infty$ можно отбрасывать. Действительно, усреднение по единичной сфере скалярного произведения двух независимых импульсов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{q}$ с углом ϑ между ними дается соотношениями

$$\langle (\mathbf{kq})^{2n} \rangle_S = (kq)^{2n} \langle \cos^{2n} \vartheta \rangle_S = (kq)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{d(d+2) \dots (d+2n-2)} = O(d^{-n}) \quad (38)$$

и $\langle (\mathbf{kq})^{2n+1} \rangle_S = 0$; здесь $n = 1, 2, \dots$. В трехпетлевых диаграммах возникают более сложные конструкции с тремя импульсами вида

$$\langle (\mathbf{kq})^{n_1} (\mathbf{kl})^{n_2} (\mathbf{lq})^{n_3} \rangle_S. \quad (39)$$

Явные выражения для них, аналогичные (38), довольно громоздки; их можно найти, например, в разделе VIC статьи [12]. Для нас сейчас важно, лишь то, что все они исчезают при $d \rightarrow \infty$, если хотя бы один из показателей n_i , $i = 1, 2, 3$, отличен от нуля.

Во всех нужных диаграммах в качестве импульсного аргумента в обеих внешних вершинах (35) может быть выбран аргумент $\mathbf{p}$ функции (29). Тогда в (30) явно выделяется общий множитель $p_i p_j$, и, поскольку нас интересует предел (29), в остающемся подынтегральном выражении можно везде положить $\mathbf{p} = 0$. Заметим, что это невозможно для диаграмм, у которых точка в крайней правой вершине помещена на внешней линии, как в двух последних диаграммах на рис. 1. Импульсные аргументы таких вершин обязательно включают импульсы интегрирования $\mathbf{k}, \mathbf{q}, \dots$, но мы уже установили, что при $d \rightarrow \infty$ вклады таких диаграмм исчезают. Если один из этих внешних импульсов, например p_i , свернется с каким-либо импульсом интегрирования в подынтегральном выражении, например с k_i или $q_i + k_i$, получаются конструкции вида (38) или (39), и такая диаграмма исчезает при $d \rightarrow \infty$.

Неисчезающие вклады возникают, только если внешние импульсы сворачиваются друг с другом через цепочку δ -символов:

$$p_i \delta_{ii_1} \delta_{i_1 i_2} \dots \delta_{i_{n-1} i_n} \delta_{i_n j} p_j = p^2. \quad (40)$$

В диаграмме этой цепочке отвечает новая (т.е. отличная от хребта) цепочка пропагаторов, соединяющая внешние вершины, причем ровно с двумя размещенными на ней точками именно в этих внешних вершинах. Любая точка, помещенная на такой цепочке в некоторой внутренней вершине, означает свертку с импульсами интегрирования $\mathbf{k}, \mathbf{q}$ и тем самым разрывает цепочку δ -символов в (40). Из примеров, показанных на рис. 2, видно, что такой “второй хребет” всегда имеет вид

$$\langle vv' \rangle_0 \langle vv' \rangle_0 \dots \langle vv' \rangle_0 \langle vv \rangle_0 \langle v'v \rangle_0 \dots \langle v'v \rangle_0, \quad (41)$$

т.е. состоит из двух встречных цепочек смешанных пропагаторов $\langle vv' \rangle_0$ и $\langle v'v \rangle_0$ (в общем случае с разным числом звеньев, в том числе и с нулевым), соединенных посередине единственным пропагатором типа $\langle vv \rangle_0$. В простейшем случае однопетлевой диаграммы второй хребет существует и состоит из одной линии $\langle vv \rangle_0$ (см. рис. 1).

Если второй хребет в диаграмме существует, то он единствен, так как цепочка δ -символов в (40) не может разветвляться. Однако его существование не гарантировано (в отличие от основного хребта, обсуждавшегося ранее), как видно на примере диаграмм на рис. 3. Основной хребет этих диаграмм состоит из двух пропагаторов; указана расстановка точек на нем, порождающая нужный множитель вида (37). Но второго хребта у них нет: в первой из диаграмм вообще нет цепочки вида (41), а во второй диаграмме такая цепочка есть, но любое размещение точки в средней верхней вершине разрывает цепочку (40). Подобные диаграммы также могут быть

Рис. 3. Примеры двухпетлевых диаграмм, не имеющих второго хребта и исчезающих при $d \rightarrow \infty$.

сразу отброшены. В остающихся диаграммах множитель p^2 из (40) явно сокращается с таким же множителем в знаменателе (31); полученное выражение зависит лишь от безразмерных параметров u , ε и μ/m (последний вскоре также исчезнет).

Отбрасывание заведомо исчезающих при $d \rightarrow \infty$ диаграмм (с “неправильной” расстановкой точек на хребте или не имеющих второго хребта) приводит к впечатляющему сокращению количества остающихся диаграмм. В однопетлевом приближении, как видно из рис. 1, из четырех диаграмм остается одна, в двухпетлевом из 120 остается 6, в трехпетлевом из 8160 остается 80.

Дальнейшим упрощением является возможность отбросить в подынтегральных выражениях оставшихся диаграмм все скалярные произведения импульсов интегрирования $\mathbf{k}$, $\mathbf{q}$, ... благодаря малости средних значений (38) и (39) при $d \rightarrow \infty$. Если такое скалярное произведение входит в знаменатель подынтегрального выражения, например в $k^2 + q^2 + (\mathbf{kq})$, то выражения типа (38) и (39) не применимы непосредственно. В этом случае можно мысленно разложить подынтегральное выражение в ряд по скалярному произведению и уже затем воспользоваться формулами (38), т.е. попросту отбросить все члены разложения, кроме нулевого (не содержащего скалярных произведений) – а это то же самое, что отбрасывание вклада $(\mathbf{kq})$ в исходном выражении (такое отбрасывание можно обосновать также методом наискорейшего спуска при $d \rightarrow \infty$, но мы не будем здесь на этом останавливаться). Заметим, что при этом исчезнут те диаграммы, у которых подынтегральные выражения содержат какие-либо скалярные произведения как общие множители. Нам не удалось, однако, сформулировать общее правило, которое позволило бы отбрасывать такие диаграммы с самого начала (т.е. не выписывая для них аналитического выражения).

Усреднение по углам теперь стало тривиальным: $\langle 1 \rangle_S = 1$. Тем самым аналитические выражения для оставшихся N -петлевых диаграмм представляются N -кратными интегралами по скалярным переменным k , q , ... – модулям независимых импульсов интегрирования. Фактически подынтегральные выражения зависят от их квадратов, так что удобно перейти к новым независимым переменным k^2 , q^2 , ..., тогда нижним пределом интегрирования окажется величина m^2 . Мы сохраним прежние обозначения k , q , ... и m для этих новых параметров. Тогда для $N = 3$ все такие интегралы имеют вид

$$J(m) = \int_m^\infty \frac{dk}{k^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dq}{q^{1+\varepsilon}} \int_m^\infty \frac{dl}{l^{1+\varepsilon}} f(k, q, l), \quad (42)$$

где f – некоторая безразмерная функция. Из соображений размерности ясно, что интеграл (42) есть некоторая определенная степень ИК-обрезания, а именно $J(m) =$

$m^{-3\varepsilon}I(1)$. Тогда применение дифференциальной операции $\mathcal{D}_m = m\partial/\partial m$ к интегралу (42) эквивалентно его умножению на -3ε , и справедливо следующее тождество:

$$J(1) = -\frac{1}{3\varepsilon} \mathcal{D}_m J(m) \Big|_{m=1}. \quad (43)$$

Параметр m входит в выражение (42) только как нижний предел интегрирований, и явное дифференцирование в правой части (43) сокращает число интегрирований на единицу. Один полюс по ε в (43) уже выделен явно, поэтому в полученных двукратных интегралах нужно учесть вклады порядка ε^{-2} , ε^{-1} и ε^0 .

Полное трехпетлевое вычисление включает всего лишь шесть различных интегралов J_i типа (42) с функциями f_i вида

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{kql}{(k+q+l)^3}, & f_2 &= \frac{kq}{(k+q+l)^2}, & f_3 &= \frac{kql}{(k+q)(k+l)(q+l)}, \\ f_4 &= \frac{kq}{(k+q)(k+q+l)}, & f_5 &= \frac{kq}{(k+q)(k+l)}, & f_6 &= \frac{kq}{(k+q)^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Их вычисление с нужной точностью дает

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= \frac{1}{2}, & \tilde{J}_2 &= \frac{1}{2\varepsilon}, & \tilde{J}_3 &= \frac{\pi^2}{4}, \\ \tilde{J}_4 &= \frac{1}{2\varepsilon} + 1, & \tilde{J}_5 &= \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{\pi^2}{6}, & \tilde{J}_6 &= \frac{3}{2\varepsilon} - 3 \ln 2, \end{aligned} \quad (45)$$

где $J_i(1) = (1/3\varepsilon)\tilde{J}_i$.

Операция $\mathcal{R}'$ в (28) подразумевает вычитание всех УФ-расходимостей в подграфах данной диаграммы (см., например, [3]). Это стандартная процедура, требующая вычисления одно- и двухпетлевых аналогов интегралов типа (42) с нужной точностью (требуются не только части, содержащие полюсы по ε , но и конечные части). Эти вычисления аналогичны трехпетлевому, но намного проще, и мы не будем на них останавливаться. Собирая вместе все нужные вклады с требуемыми коэффициентами, для константы ренормировки (17) в трехпетлевом приближении получаем

$$Z_\nu = 1 - \frac{u}{8\varepsilon} - u^2 \left(\frac{1}{64\varepsilon^2} + \frac{1}{128\varepsilon} \right) - u^3 \left(\frac{5}{1536\varepsilon^3} + \frac{3}{1024\varepsilon^2} + \frac{7}{3072\varepsilon} \right) \quad (46)$$

с поправками порядка u^4 по введенной в (27) константе связи u . Интересно отметить, что иррациональные числа $\ln 2$ и π^2 , входящие в выражения (45) для интегралов J_i , выпадают из окончательного выражения (46) для Z_ν как результат вычитания подрасходимостей.

Для аномальной размерности (20) с помощью соотношения (21) получаем

$$\gamma_\nu(u) = \frac{1}{4}u + \frac{1}{32}u^2 + \frac{7}{512}u^3 + O(u^4), \quad (47)$$

а трехпетлевая β -функция находится из второго соотношения в (20). Решая уравнение $\beta(u_*) = 0$ итерациями по ε , для координаты неподвижной точки находим

$$u_* = \frac{8}{3}\varepsilon - \frac{8}{9}\varepsilon^2 - \frac{4}{9}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (48)$$

Поправочный показатель

$$\omega = \beta'(u_*) = 2\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^2 + \frac{10}{9}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \quad (49)$$

завершает список трехпетлевых результатов.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, мы выполнили трехпетлевой расчет основных величин, фигурирующих в процедуре ренормировки и РГ-уравнениях стохастической модели развитой турбулентности (2), (3) в пределе большого числа пространственных измерений d . Аналитическое вычисление оказалось выполнимым благодаря радикальным упрощениям, происходящим в функции Грина (функции отклика) при $d \rightarrow \infty$: подавляющее большинство диаграмм теории возмущений исчезает, а остальные сравнительно легко вычисляются явно. Хотя нам и не удалось найти точное решение задачи при $d = \infty$ вне рамок ε -разложения, мы полагаем, что как сами результаты, так и обнаруженные упрощения окажутся полезными при дальнейших попытках построения систематического $1/d$ -разложения для данной модели.

Полученные явные выражения довольно просты: так, все коэффициенты разложений по g в константе ренормировки Z_ν и β -функции и разложений по ε в координате неподвижной точки u_* и поправочном индексе ω – рациональные числа, хотя для динамических моделей типично появление трансцендентных величин (значений логарифмов, гипергеометрических функций и т.п.) уже в двухпетлевом приближении. Можно предположить, что этот факт остается верным и для всех старших членов разложений. Интересно попытаться угадать их общий вид и тем самым предложить какие-либо гипотетические точные (т.е. без разложения по ε) выражения для этих величин. Подобные точные выражения для всех фигурирующих в РГ-уравнениях величин удастся найти [24] в хорошо известной модели развитой турбулентности Гейзенберга. В частности, для ω и u_* (в МВ-схеме) имеем [24]

$$\omega = \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon/3)}{1 - 5\varepsilon/12}, \quad u_* = \frac{\varepsilon}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^{1/4}, \quad (50)$$

где все параметры имеют прежний смысл. Допустим, что координата неподвижной точки и в нашей модели имеет подобный вид,

$$u_* = (c_1\varepsilon)(1 + \varepsilon c_2)^{c_3},$$

тогда сравнение с отрезком ε -разложения (48) позволяет найти три коэффициента c_i , $i = 1, 2, 3$, которые оказываются очень простыми, причем показатель степени тот же, что и в модели Гейзенберга (что заранее далеко не очевидно!):

$$u_* = \frac{8\varepsilon}{3} \left(1 - \frac{4\varepsilon}{3}\right)^{1/4}. \quad (51)$$

Теперь точное выражение для ω может быть найдено из (48). Дифференцируя равенство (20) для функции $\beta_u = \tilde{D}_\mu u$ по u и полагая $u = u_*$, с учетом $u_* \neq 0$ получаем

$$\omega = \beta'(u_*) = 3\gamma'_\nu(u_*),$$

а дифференцируя (26) по ε , находим

$$\gamma'_\nu(u_*)u'_*(\varepsilon) = \frac{2}{3}$$

(здесь первое дифференцирование выполнено по u , второе – по ε). Объединяя эти равенства, получаем точное равенство $\omega(\varepsilon) = 2u_*/u'_*$. Подставляя явное выражение (51) для функции $u_* = u_*(\varepsilon)$, получаем искомый гипотетический точный ответ для поправочного индекса:

$$\omega = 2 \frac{\varepsilon(1 - 4\varepsilon/3)}{1 - 5\varepsilon/3}, \quad (52)$$

который также весьма близок по виду к ответу (50) для модели Гейзенберга и согласуется, как легко убедиться, с разложением (49).

Выражения (51), (52), если они верны, указывают на исчезновение ИК-устойчивой и положительной неподвижной точки при $\varepsilon = 3/4$, т.е. еще до достижения физического значения $\varepsilon = 2$. Это должно приводить к какому-то качественному изменению поведения ИК-асимптотик корреляционных функций, что ставит под сомнение возможность экстраполяции результатов ε -разложения к реальному значению $\varepsilon = 2$. Но, разумеется, не следует слишком серьезно относиться к гипотетическим выражениям, которые не являются, конечно, единственно возможными.

Знание трехпетлевых ответов (46)–(49) позволяет улучшить (на один порядок по ε) имеющиеся результаты для ряда интересных физических величин – константы Колмогорова в спектре турбулентной энергии, асимметрии (скьюнесс-фактора) и др. Для этого требуется вычислить с должной точностью скейлинговую функцию парного коррелятора скорости (см., например, [22]). В отличие от функции отклика, в этом случае не происходит столь существенного уменьшения числа диаграмм при $d = \infty$, а зависимость от d входит в них не только через угловые усреднения типа (38), но и через показатель степени в корреляторе (6). Поэтому вычисление таких диаграмм потребовало дальнейшей разработки изложенной в настоящей статье техники. Эти вопросы будут подробно рассмотрены в отдельной работе.

Благодарности. Авторы благодарят М. Гнатича, Ю. Хонконена и П. Мураторе-Джинаннески за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-02-00125_а), Российской национальной программы (грант № 2.1.1.1112) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5538.2006.2).

Список литературы

- [1] U. Frisch, *Turbulence. The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [2] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Internat. Ser. Monogr. Phys., **77**, Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [3] А. Н. Васильев, *Квантовополевого ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, ПИЯФ, СПб., 1998.
- [4] C. De Dominicis, P. C. Martin, *Phys. Rev. A*, **19**:1 (1979), 419–422.
- [5] Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, *УФН*, **166**:12 (1996), 1257–1284.
- [6] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasiliev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1999.

- [7] Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, *ЖЭТФ*, **95** (1989), 1272–1288.
- [8] G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola, *Rev. Modern Phys.*, **73**:4 (2001), 913–975.
- [9] M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, *Phys. Rev. E*, **52**:5 (1995), 4924–4941.
- [10] D. Bernard, K. Gawędzki, A. Kupiainen, *Phys. Rev. E*, **54**:3 (1996), 2564–2572.
- [11] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev, *Phys. Rev. E*, **58**:2 (1998), 1823–1835.
- [12] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov, Yu. S. Kabrits, A. N. Vasil'ev, *Phys. Rev. E*, **64**:5 (2001), 056306.
- [13] N. V. Antonov, *J. Phys. A*, **39**:25 (2006), 7825–7865.
- [14] Н. В. Антонов, С. В. Борисенок, В. И. Гирина, *ТМФ*, **106**:1 (1996), 92–101.
- [15] C.-Yu. Mou, P. B. Weichman, *Phys. Rev. E*, **52**:4 (1995), 3738–3796.
- [16] R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.*, **64** (1974), 737–762.
- [17] J.-D. Fournier, U. Frisch, H. A. Rose, *J. Phys. A*, **11**:1 (1978), 187–198.
- [18] V. Yakhot, *Strong turbulence in d-dimensions*, [arXiv: chaos-dyn/9805027](#).
- [19] H. L. Frisch, M. Schulz, *Physica A*, **211**:1 (1994), 37–42.
- [20] A. V. Runov, *On the field theoretical approach to the anomalous scaling in turbulence*, [arXiv: chaos-dyn/9906026](#).
- [21] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. V. Runov, *Phys. Rev. E*, **64**:4 (2001), 046310.
- [22] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, M. V. Kompaniets, A. N. Vasil'ev, *Internat. J. Modern Phys. B*, **17**:10 (2003), 2137–2170.
- [23] А. А. Владимиров, *ТМФ*, **43**:2 (1980), 210–217.
- [24] Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, *ТМФ*, **115**:2 (1998), 245–262.

Поступила в редакцию 21.05.2008