Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ф. Ефремов, В. В. Шарков, Квантово-статистическая теория радиационного трения релятивистского электрона, *ТМФ*, 2009, том 158, номер 3, 478–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 07:29:04

© 2009 г.

Г. Ф. Ефремов*, В. В. Шарков*

КВАНТОВО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАДИАЦИОННОГО ТРЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА

Всесторонне исследован эффект квантовой пространственно-временной нелокальности, учитывающий запаздывание взаимодействия электрона как с собственным полем излучения, так и с флуктуационным полем электромагнитного вакуума. Строго показано, что эффект квантовой нелокальности исключает парадоксы самоускорения и нарушения принципа причинности, присущие классической теории радиационного трения.

Ключевые слова: обобщенная радиационная сила трения, теория открытых квантовых систем, квантовая статистика, электромагнитный вакуум, броуновское движение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема радиационного трения и электромагнитной массы электрона возникла до создания квантовой теории в начале XX века. Основополагающий вклад в классическую теорию радиационного трения внесли Абрагам, Лоренц [1] и Дирак [2]. Основные результаты, изложенные, например, в учебниках [3], [4] и монографии [5], активно обсуждаются в литературе на протяжении многих десятилетий (обширная библиография по этому вопросу содержится в [5]).

Классическая формула радиационной силы трения Абрагама–Лоренца [1], [3]–[5]

$$\mathbf{F} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{r}(t) \quad (1)$$

приводит к хорошо известному парадоксу самоускорения [3], [4]: при наличии силы (1) состояние электрона с определенной скоростью оказывается неустойчивым, и электрон за очень короткий промежуток времени $\tau_0 = 10^{-23}$ с приобретает ультрарелятивистскую скорость. Кроме этого, радиационная сила (1) противоречит принципу причинности [6].

Физическая причина парадоксов и расходимостей классической электродинамики обусловлена идеализацией точечности заряженной частицы – электрона. Так как классический электрон не имеет внутренней структуры и является точечным,

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. E-mail: efremov@rf.unn.ru, sharkov@rf.unn.ru

запаздывание взаимодействия между электроном и его собственным полем излучения отсутствует, вследствие чего и возникают известные парадоксы радиационного трения. Отсутствие запаздывания взаимодействия между электроном и полем излучения приводит также к расходимостям, в классической электродинамике масса электрона оказывается бесконечной.

В последнее время вновь возрос интерес к проблеме радиационного трения. Это относится как к классической, так и к квантовой теории. В классической теории основной интерес представляет радиационное трение в релятивистских задачах [7], [8]. В работе [7] была предложена процедура устранения расходимостей в классической электродинамике и дано точное решение задачи о реакции собственного поля излучения релятивистского точечного электрона. В работе [8], как и в работе [7], рассмотрена реакция излучения при учете перенормировки в классической теории поля с сингулярными источниками. В ряде работ рассматривается реакция излучения в различных моделях классической теории поля (см., например, [9]). Критический анализ существующей классической теории можно найти, например, в работе [10], где также предложены различные модификации этой теории. Попытка устранения парадоксов радиационного трения в рамках классической электродинамики предпринята в работе [11]. Однако несмотря на значительные усилия не удается избежать парадоксов в теории радиационного трения при последовательном классическом способе описания реакции излучения.

Появление квантовой теории не привело к автоматическому устранению парадоксов радиационного трения. Проблема квантовой теории радиационного трения существует на протяжении многих десятилетий и для ее решения предложены разнообразные подходы и приближения [6], [12]–[21]. Один из возможных путей решения проблемы радиационного трения с выходом за рамки теории возмущений основан на методах флуктуационно-диссипационной теории нелинейных открытых квантовых систем [22]–[24]. Эти методы представляют собой принципиальное обобщение линейной теории броуновского движения квантовых систем, развитой Швингером [25] и Сеницким [26]. Эта теория не опирается на предположение марковости и малости взаимодействия. Постановка задачи и исходные уравнения сформулированы в ряде работ как для полевой релятивистской теории [27], так и для одночастичной модели статистической квантовой электродинамики [6].

Полученное в работе [6] строгое квантово-механическое выражение для радиационной силы проанализировано в нерелятивистском пределе и доказано отсутствие парадоксов, присущих классической теории. Квантовая теория радиационного трения для собственного магнитного момента нейтрона предложена в работах [20], [21]. Заметим, что в нерелятивистском пределе исключается вклад в радиационное трение фотонов с большими значениями передаваемого импульса. Однако для полного решения проблемы радиационного трения вклад больших импульсов, передаваемых от поля излучения к электрону, необходимо учитывать.

Как известно, релятивистский электрон имеет внутренние степени свободы, определяемые матрицами Дирака. Наличие внутренней структуры (степеней свободы) у электрона Дирака приводит к установленному в работе [28] эффекту квантовой нелокальности, который явно учитывает запаздывание взаимодействия между электроном и собственным полем излучения. Вследствие этого устраняются парадоксы классической теории радиационного трения. Таким образом, в работе [28] показано,

как в локальной квантовой теории возникает запаздывание взаимодействия между источником поля (зарядом) и его полем излучения; заметим, что в этой работе рассмотрен лишь один из механизмов радиационного трения, обусловленный реакцией собственного поля излучения.

В настоящей работе исследован чрезвычайно важный релятивистский эффект запаздывания взаимодействия как с собственным полем излучения, так и с флуктуационным полем электромагнитного вакуума. Вследствие этого рассматриваемые явления приобретают особый квантово-статистический характер. Дополнительный учет того факта, что флуктуационное поле электромагнитного вакуума вносит вклад в запаздывание взаимодействия, принципиально важен для исследования радиационных эффектов, имеющих существенно статистическую природу, таких как смещение Лэмба и аномальный магнитный момент электрона, поскольку запаздывание взаимодействия приводит к исключению расходимостей.

2. ОБОБЩЕННАЯ РАДИАЦИОННАЯ СИЛА ТРЕНИЯ

Рассмотрим взаимодействие релятивистского электрона с квантовым полем излучения и некоторым внешним потенциальным полем $V(\mathbf{r}, t)$. Для исследования радиационных эффектов целесообразно воспользоваться гейзенберговской картиной движения. Прежде всего отметим, что гейзенберговские уравнения движения для динамических переменных электрона в свободном пространстве допускают точное решение, впервые полученное Шредингером в 1930 г. [29]. Кроме этого, имеют место точные стохастические уравнения для динамических переменных электрона [6]. В гейзенберговской картине движения все динамические переменные рассматриваемой системы явно зависят от времени и входят в уравнения движения равноправным образом. Поэтому исходный гамильтониан системы представим в виде

$$H = c\alpha(t)\left(\mathbf{p}(t) - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)\right) + \beta(t)mc^2 + eA_0(\mathbf{r}(t), t) + V(\mathbf{r}(t), t) + F(t), \quad (2)$$

где $F(t)$ – гамильтониан квантового поля излучения, $A_0(\mathbf{r}(t), t)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)$ – потенциалы поля излучения, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – матрицы Дирака, которые подчиняются известным перестановочным соотношениям, например

$$\alpha_j(t)\alpha_l(t) + \alpha_l(t)\alpha_j(t) = 2\delta_{jl}.$$

Распорядимся калибровочной симметрией, выбирая поперечную калибровку для потенциалов поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) = 0. \quad (3)$$

В представлении Гейзенберга потенциалы поля являются функциями координаты электрона $\mathbf{r}(t)$, поэтому их удобно представить в виде разложения Фурье:

$$A_0(\mathbf{r}(t), t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} A_0(\mathbf{k}, t), \quad (4)$$

$$A_j(\mathbf{r}(t), t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} A_j(\mathbf{k}, t), \quad (5)$$

где фурье-компоненты $A_j(\mathbf{k}, t)$ явно не содержат переменных электрона. Канонически сопряженные к $A_j(\mathbf{k}, t)$ компоненты плотности тока находим из гамильтониана (2) в соответствии с равенством

$$-\frac{\delta H}{\delta A_j(\mathbf{k}, t)} = \frac{e}{c} \dot{r}_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}.$$

Запишем уравнения Гейзенберга для динамических переменных рассматриваемой системы. Для фурье-компонент $A_j(\mathbf{k}, t)$ потенциалов поля из (2) имеем уравнения

$$\left(k^2 + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2}\right) A_j(\mathbf{k}, t) = \frac{4\pi}{c} e \dot{r}_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, \quad (6)$$

представляющие собой уравнения Максвелла для поля излучения при взаимодействии с электроном. Запишем также уравнения Гейзенберга для динамических переменных электрона. Из гамильтониана системы (2) следует, в частности, квантовый аналог уравнения Лоренца:

$$\frac{d}{dt} \pi_j(t) + \nabla_j V(\mathbf{r}(t), t) + \nabla_j A_0(\mathbf{r}(t), t) = -\frac{e}{c} \frac{d}{dt} A_j(\mathbf{r}(t), t) + \frac{e}{c} \nabla_j (\dot{r}_\alpha(t) A_\alpha(\mathbf{r}(t), t)), \quad (7)$$

где

$$\pi_j(t) = p_j(t) - \frac{e}{c} A_j(\mathbf{r}(t), t)$$

есть кинетический импульс электрона, а $p_j(t)$ – канонический импульс электрона.

Особенность стоящего в правой части (7) квантового аналога силы Лоренца, которая действует на электрон со стороны поля излучения, состоит в том, что эта сила определяется полной производной от векторного потенциала, благодаря чему содержит более простое слагаемое, зависящее от оператора скорости $\dot{r}_j(t) = c\alpha_j(t)$.

Будем считать, что взаимодействие источника поля (электрона) с полем излучения включается адиабатически медленно в бесконечно удаленный момент времени $t = -\infty$. До включения взаимодействия мы имеем систему невзаимодействующих частиц: электрона в некотором состоянии $\psi \in \Gamma$ и поля излучения в основном состоянии (все числа фотонов $n_{\mathbf{k}s} = 0$).

Как известно, в основном, вакуумном, состоянии временная функция корреляции потенциалов поля $A_j^0(\mathbf{k}, t)$ в принятой кулоновской калибровке есть

$$M_{jl}(\mathbf{k}, t - t_1) = \left\langle \frac{1}{2} [A_j^0(\mathbf{k}, t), A_l^0(-\mathbf{k}, t_1)]_+ \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{4\pi c}{k} \cos(ck(t - t_1)) \left(\delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{k^2} \right).$$

С учетом адиабатического включения взаимодействия решение уравнения (6) имеет вид

$$A_j(\mathbf{k}, t) = A_j^0(\mathbf{k}, t) + \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 D_{jl}(\mathbf{k}, t - t_1) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} \dot{r}_l(t_1). \quad (8)$$

Здесь $A_j^0(\mathbf{k}, t)$ есть невозмущенное поле электромагнитного вакуума. Второе слагаемое, определяемое функцией Грина фотона $D_{jl}(\mathbf{k}, t - t_1)$, есть собственное поле излучения электрона. В принятой калибровке (3) функции Грина имеют вид [30]

$$\begin{aligned} D_{jl}(\mathbf{k}, t - t_1) &= \left\langle \frac{i}{\hbar} [A_j^0(\mathbf{k}, t), A_l^0(-\mathbf{k}, t_1)]_- \right\rangle \eta(t - t_1) = \\ &= \frac{4\pi c}{k} \sin(ck(t - t_1)) \left(\delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{k^2} \right) \eta(t - t_1), \end{aligned} \quad (9)$$

где единичная функция Хевисайда $\eta(t-t_1)$ учитывает запаздывание взаимодействия электрона с полем излучения. Компоненты функции Грина $D_{j0}(\mathbf{k}, \tau)$ и $D_{00}(\mathbf{k}, \tau)$, $\tau = t - t_1$, в кулоновской калибровке суть

$$D_{j0}(\mathbf{k}, \tau) = 0, \quad D_{00}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{4\pi}{k^2} \delta(\tau).$$

Учитывая приведенное выражение для $D_{00}(\mathbf{k}, \tau)$, легко показать, что скалярный потенциал $A_0(\mathbf{r}, t)$ не будет вносить вклад в уравнение (7), и в последующем рассмотрении он будет опущен.

Подставим точное решение (8) в выражение для векторного потенциала (5), определяющее квантовую силу Лоренца в уравнении (7). После симметризации произведения коммутирующих между собой операторов $A_j(\mathbf{k}, t)$ и $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}$ получим

$$\begin{aligned} A_j(\mathbf{r}(t), t) = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} [A_j^0(\mathbf{k}, t), e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}]_+ + \\ & + \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} D_{jl}(\mathbf{k}, t - t_1) \frac{1}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, \dot{r}_l(t_1) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_+. \end{aligned} \quad (10)$$

Второе слагаемое силы Лоренца в правой части равенства (7) после подстановки решения (8) может быть записано двумя способами:

$$\begin{aligned} \frac{e}{c} \nabla_j (\dot{r}_\alpha A_\alpha(\mathbf{r}(t), t)) = & \frac{e}{c} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} ik_j \left\{ \frac{1}{2} [A_\alpha^0(\mathbf{k}, t), \dot{r}_\alpha e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}]_+ + \right. \\ & \left. + \frac{e^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 D_{\alpha l}(\mathbf{k}, t - t_1) \frac{1}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} \dot{r}_\alpha(t), e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} \dot{r}_l(t_1)]_+ \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{e}{c} \nabla_j (\dot{r}_\alpha A_\alpha(\mathbf{r}(t), t)) = & \frac{e}{c} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \nabla_j \left\{ \frac{1}{2} [A_\alpha^0(\mathbf{k}, t), \dot{r}_\alpha e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}]_+ + \right. \\ & \left. + \frac{e^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 D_{\alpha l}(\mathbf{k}, t - t_1) \frac{1}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} \dot{r}_\alpha(t), e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} \dot{r}_l(t_1)]_+ \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Первое слагаемое в (10) задает параметрическое воздействие флуктуаций вакуумного поля на электрон, которое вносит определенный вклад в динамику наряду со вторым слагаемым в (10) и одновременно включает в себя флуктуационный источник вакуумного поля. Для того чтобы выделить вклад в динамику флуктуаций электромагнитного вакуума, необходимо исключить из уравнения движения электрона вакуумные потенциалы поля. Подобную процедуру исключения фононных переменных при выводе обобщенного кинетического уравнения для электронов проводимости можно найти в работе [24].

В соответствии с методами, предложенными в работе [23], имеем

$$\begin{aligned} A_j(\mathbf{r}(t), t) = & \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ M_{jl}(\mathbf{k}, t - t_1) \frac{i}{\hbar} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, \dot{r}_l(t_1) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_- \eta(t - t_1) + \right. \\ & \left. + D_{jl}(\mathbf{k}, t - t_1) \frac{1}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, \dot{r}_l(t_1) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_+ \right\} + \xi_j^A(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\xi_j^A(t)$ – это вклад в общий флуктуационный источник от первого слагаемого в силе трения, которое определяется только векторным потенциалом. Здесь с помощью единичной функции Хевисайда $\eta(t - t_1)$ мы учитываем принцип причинности при параметрическом воздействии на электрон поля электромагнитного вакуума. В соответствии с общей теорией [23] флуктуационные источники $\xi_j(t)$ строго определены и для них указан рецепт вычисления функции корреляции любого порядка. В итоге получим уравнение, описывающее броуновское движение релятивистского электрона Дирака в поле электромагнитного вакуума:

$$\frac{d}{dt} \pi_j(t) + \nabla_j V(\mathbf{r}, t) = F_j(t) + \xi_j(t), \quad (14)$$

где $\xi_j(t)$ есть строго определенный флуктуационный источник с равным нулю средним значением по вакуумному состоянию поля. Обобщенная радиационная сила трения $F_j(t)$ учитывает как реакцию собственного поля излучения на электрон, так и воздействие флуктуаций вакуумного поля. Строгое выражение для радиационной силы $F_j(t)$ в (14) с учетом (11) имеет вид

$$\begin{aligned} F_j(t) = & -\frac{e^2}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ D_{jl}(\mathbf{k}, t - t_1) \frac{1}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} \dot{r}_l(t_1)]_+ + \right. \\ & \left. + M_{jl}(\mathbf{k}, t - t_1) \frac{i}{\hbar} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} \dot{r}_l(t_1)]_- \eta(t - t_1) \right\} + \\ & + \frac{e^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} ik_j \left\{ D_{\alpha l}(\mathbf{k}, t - t_1) \frac{1}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} \dot{r}_\alpha(t), e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} \dot{r}_l(t_1)]_+ + \right. \\ & \left. + M_{\alpha l}(\mathbf{k}, t - t_1) \frac{i}{\hbar} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} \dot{r}_\alpha(t), e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} \dot{r}_l(t_1)]_- \eta(t - t_1) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что при записи второго слагаемого силы Лоренца в форме (12) необходимо дополнительно учесть спаривание $A_j^0(\mathbf{k}, t)$ с оператором ∇_j , действующим на него слева, которое приведено в одной из работ авторов. Наличие ∇_j в выражении (12) позволяет непосредственно определить перенормировку потенциальной энергии $V(\mathbf{r})$ за счет флуктуаций электромагнитного вакуума и на основе этого вычислить смещение Лэмба. Выражение для радиационной силы в форме (15) оказывается более предпочтительным для всестороннего исследования квантово-механических эффектов радиационного трения.

Точное выражение для радиационной силы (15) включает в себя оба тесно связанных между собой механизма радиационного трения: воздействие на электрон флуктуаций электромагнитного вакуума и воздействие собственного поля излучения. Совместный учет указанных физических механизмов имеет принципиальное значение для исследования на основе формул (14) и (15) различных электродинамических эффектов. Кроме этого, из строгого выражения (15) следует, что среднее значение радиационной силы в состоянии термодинамического равновесия электрона с полем излучения равно нулю. Заметим, что согласно работе [6] выражение (15) справедливо при взаимодействии электрона с тепловым полем излучения при конечной температуре. Чтобы доказать указанное выше свойство, следует записать среднее значение для (15) в спектральной форме и воспользоваться флуктуационно-диссипационной теоремой Каллена–Вельтона.

3. КОЭФФИЦИЕНТ РАДИАЦИОННОГО ТРЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА

Исследуем особенности эффекта радиационного трения, обусловленные запаздыванием взаимодействия как с собственным полем излучения, так и с флуктуационным полем электромагнитного вакуума.

Пусть на электрон, эволюция во времени которого определяется уравнением (14), действует однородное электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E}(t)$, энергия взаимодействия с этим полем есть

$$V(t) = -r_j e E_j(t) = -r_j f_j. \quad (16)$$

Усредним уравнение (14) по начальному состоянию системы и, принимая во внимание равенство нулю среднего значения флуктуационного источника, получим

$$\frac{d}{dt} \langle \pi_j(t) \rangle = f_j(t) + \langle F_j(t) \rangle. \quad (17)$$

Из этого уравнения определим отклик на внешнюю силу $f_j(t)$ в соответствии с тем, что

$$\langle r_j(t) \rangle = \int dt_1 \varphi_{jl}(t, t_1) f_l(t_1),$$

откуда находим

$$\left\langle \frac{\delta r_j(t)}{\delta f_l(t_2)} \right|_{\mathbf{f}=0} \rangle = \varphi_{jl}(t, t_2) = \left\langle \frac{i}{\hbar} [r_j(t), r_l(t_2)]_- \right\rangle \eta(t - t_2). \quad (18)$$

Будем считать, что до включения взаимодействия (16) система находилась в равновесии; как было отмечено выше, среднее значение радиационной силы в равновесии равно нулю. С учетом вышесказанного для среднего значения радиационной силы можно записать

$$\langle F_j(t) \rangle = \int dt_2 \left\langle \frac{\delta F_j(t)}{\delta f_l(t_2)} \right\rangle f_l(t_2). \quad (19)$$

Из выражения (15) для радиационной силы имеем

$$\left\langle \frac{\delta F_j(t)}{\delta f_l(t_2)} \right\rangle = \int dt_1 \left\langle L_{jn}(t, t_1) \frac{\delta r_n(t_1)}{\delta f_l(t_2)} \right\rangle. \quad (20)$$

Так как нелинейность системы, связанная с радиационной силой, мала, можно пренебречь флуктуациями отклика в соответствии с нелинейными флуктуационно-диссипационными теоремами [31]. Поэтому в (19) можно заменить отклик его статистическим средним значением:

$$\left\langle \frac{\delta F_j(t)}{\delta f_l(t_2)} \right\rangle = \int dt_1 \langle L_{jn}(t, t_1) \rangle \left\langle \frac{\delta r_n(t_1)}{\delta f_l(t_2)} \right\rangle. \quad (21)$$

Как уже говорилось выше, основной вклад в радиационное трение вносит первое слагаемое в (15), которое мы будем рассматривать в настоящей работе. Приведем явное выражение для радиационной силы (15), опуская второе слагаемое. С этой

целью подставим в (15) выражение для функции Грина фотона (9) и запаздывающую функцию корреляции $\widetilde{M}_{jl}(\mathbf{k}, \tau) = M_{jl}(\mathbf{k}, \tau)\eta(\tau)$, для которой можно записать следующее соотношение:

$$\widetilde{M}_{jl}(\mathbf{k}, \tau) = -\frac{1}{ck} \frac{\hbar}{2} \frac{d}{dt_1} D_{jl}(\mathbf{k}, \tau). \quad (22)$$

После подстановки (22) в (15) с помощью интегрирования по частям производная по времени переносится на оператор скорости. Подобным образом можно поступить и с формулой (9), переписав ее в виде

$$D_{jl}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{d}{dt_1} (\cos(ck\tau)\eta(\tau)) \left(\delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{k^2} \right). \quad (23)$$

Подставим два последних соотношения в (16) и проинтегрируем по частям по времени, с учетом поперечной калибровки получим

$$\left\langle \frac{1}{m} F_j(t) \right\rangle = \int dt_1 \gamma_{jl}(t - t_1) \langle \dot{r}_i(t_1) \rangle, \quad (24)$$

где коэффициент трения $\gamma_{jl}(t - t_1)$, определяемый формулой (24), есть

$$\begin{aligned} \gamma_{jl}(t - t_1) = & \frac{1}{2\pi^2} \frac{e^2}{mc^2} \int d^3k \frac{1}{k^2} \left(\delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{k^2} \right) \times \\ & \times \left\{ \cos(ck(t - t_1)) \left\langle \frac{1}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_+ \right\rangle_0 - \right. \\ & \left. - \sin(ck(t - t_1)) \left\langle \frac{i}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_- \right\rangle_0 \right\} \eta(t - t_1). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь скобки $\langle \cdot \rangle_0$ означают среднее по невозмущенному состоянию полной системы. В силу изотропии начального состояния системы средние значения коммутатора и антикоммутатора экспоненциальных множителей в (25) не зависят от направления волнового вектора $\mathbf{k}$. Следовательно, $\gamma_{jl}(t - t_1) = \delta_{jl}\gamma(t - t_1)$, где

$$\begin{aligned} \gamma(t - t_1) = & \frac{4}{3\pi} \frac{e^2}{mc^2} \int_0^\infty dk \left\{ \cos(ck(t - t_1)) \left\langle \frac{1}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_+ \right\rangle_0 - \right. \\ & \left. - \sin(ck(t - t_1)) \left\langle \frac{i}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_- \right\rangle_0 \right\} \eta(t - t_1). \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что в классическом пределе коэффициент трения принимает вид

$$\gamma(t - t_1) = \gamma_0 \delta(t - t_1) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \delta(t - t_1), \quad (27)$$

что согласуется с классической формулой (1).

Коэффициент радиационного трения (26) имеет существенно нелинейную зависимость от переменных электрона $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t_1)$, взятых в различные моменты времени. Благодаря этому квантово-механическое выражение учитывает запаздывание взаимодействия между электроном и полем излучения. Для иллюстрации этого

вычислим линейную восприимчивость электрона из уравнения (17) с учетом запаздывания взаимодействия, которое определяется силой радиационного трения, задаваемой формулами (24)–(26). С этой целью перепишем (17) в собственной системе координат:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle r_j(t) \rangle = \frac{1}{m} f_j(t) + \int dt_1 \gamma(t - t_1) \frac{d^3}{dt_1^3} \langle r_j(t_1) \rangle. \quad (28)$$

Из этого уравнения определим отклик на гармоническую силу $f_j(t) = f_j(\omega)e^{-i\omega t}$. По определению имеем

$$\langle r_j(\omega) \rangle = \chi(\omega) f_j(\omega). \quad (29)$$

Применим к (28) преобразование Фурье, получим

$$-\omega^2 \langle r_j(\omega) \rangle = \frac{1}{m} f_j(\omega) + i\omega^3 \gamma(\omega) \langle r_j(\omega) \rangle.$$

В соответствии с (29) линейная восприимчивость будет иметь следующий вид:

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{m} \frac{1}{\omega^2(1 + i\omega\gamma(\omega))}. \quad (30)$$

Согласно принципу причинности восприимчивость должна быть аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной переменной ω , в то же время из классической формы (27) вместо (30) имеем выражение для восприимчивости с полюсом в верхней полуплоскости комплексной переменной ω ,

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{m} \frac{1}{\omega^2(1 + i\omega\gamma_0)},$$

что противоречит принципу причинности.

4. ЭФФЕКТ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ КВАНТОВОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ

В отличие от классического коэффициента (27) квантовомеханический коэффициент радиационного трения (26) автоматически учитывает принцип причинности и запаздывание взаимодействия электрона с полем излучения, связанное с конечностью скорости распространения света и некоммутативностью гейзенберговских операторов координаты электрона, взятых в различные моменты времени.

Принципиально нелинейная и нелокальная зависимость радиационной силы от операторов координаты $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t_1)$ определяется произведением экспоненциальных множителей, которое может быть записано в виде

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} = e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} e^{-iB}, \quad (31)$$

где $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1)$ есть оператор приращения координаты за промежуток времени $t - t_1$. Наличие в (31) унитарного оператора e^{-iB} обусловлено некоммутативностью операторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t_1)$ в различные моменты времени и определенным образом влияет на запаздывание взаимодействия между электроном и полем излучения.

В настоящей работе мы учтем вклад в радиационное трение, вносимый большими передаваемыми импульсами. В этом случае асимптотический ($k \rightarrow \infty$) вклад

в (26) соответствует малым значениям $\Delta \mathbf{r}$ и, следовательно, малым промежуткам времени. Благодаря этому при вычислении асимптотики коэффициента радиационного трения (26) достаточно воспользоваться приближением свободной эволюции для оператора координаты электрона $r_j(t)$; эта эволюция определяется гамильтонианом

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = mc^2. \quad (32)$$

Из уравнений Гейзенберга имеем

$$\dot{r}_j(t) = c\alpha_j, \quad \dot{\alpha}_j(t) = \frac{1}{i\hbar}[\alpha_j, H]. \quad (33)$$

Отметим, что импульс $\mathbf{p}$ и гамильтониан электрона (32) являются интегралами движения. Из перестановочных соотношений для матриц Дирака $\boldsymbol{\alpha}$ и β имеем также соотношения

$$\alpha_j H + H \alpha_j = 2cp_j. \quad (34)$$

Решая систему уравнений (33) с учетом (34), находим

$$\begin{aligned} r_j(t) = r_j(0) + \frac{c^2 p_j}{H} \left(t - \frac{\hbar}{2\tilde{H}} \sin\left(\frac{2\tilde{H}}{\hbar} t\right) \right) + \alpha_j(0) \frac{\hbar c}{2\tilde{H}} \sin\left(\frac{2\tilde{H}}{\hbar} t\right) + \\ + \dot{\alpha}_j(0) \frac{\hbar^2 c}{4\tilde{H}^2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\tilde{H}}{\hbar} t\right) \right), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\tilde{H}^2 \equiv H^2 = c^2 p^2 + \varepsilon_0^2$ и, следовательно, $\tilde{H} = \sqrt{c^2 p^2 + \varepsilon_0^2}$. Впервые такое решение было получено Шредингером [29].

Как и в работе [28], воспользуемся решением (35) для вычисления дисперсии оператора

$$F_0 = \mathbf{k}(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1)) = \mathbf{k}\Delta\mathbf{r} \quad (36)$$

в собственной системе координат электрона. Используя перестановочные соотношения для матриц α_j и $\dot{\alpha}_j$, получим следующее выражение для дисперсии приращения (36):

$$F_0^2 = k^2 \lambda_c^2 \sin^2(\omega_0 t) = x^2 \sin^2(\omega_0 t),$$

где $\omega_0 = mc^2/\hbar$, $\lambda_c = 1/k_0$ – комптоновская длина волны фотона, $x = k/k_0$. Дисперсия приращения координаты электрона Дирака в собственной системе координат оказывается конечной в отличие от случая релятивистской бесспиновой частицы. Быстрые осцилляции на больших временах, т.е. при $t \gg \tau_0 = 1/\omega_0$, оказываются несущественными, и можно считать, что

$$F_0^2 \approx \frac{1}{2} k^2 \lambda_c^2, \quad \Delta r \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_c. \quad (37)$$

Таким образом, дисперсия приращения координаты $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1)$ для электрона Дирака оказывается конечной в собственной системе координат благодаря наличию собственных (внутренних) степеней свободы, задаваемых матрицами Дирака. Конечное значение дисперсии, как будет показано ниже, приводит к запаздыванию взаимодействия между электроном и собственным полем излучения, что устраняет известные парадоксы радиационного трения и логарифмическую расходимость

в квантовой электродинамике. Запаздывание определяется временем прохождения светом комптоновской длины волны электрона

$$\tau_0 = \frac{\lambda_0}{c} = \frac{\hbar}{mc^2} = \frac{1}{\omega_0}. \quad (38)$$

Следовательно, квантовая теория радиационного трения должна быть принципиально немарковской теорией, учитывающей запаздывание взаимодействия между электроном и полем излучения. Так как характерное время запаздывания взаимодействия (38) определяется энергией покоя mc^2 , квантовая теория оказывается принципиально релятивистской теорией.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА РАДИАЦИОННОГО ТРЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ

Приведем строгое обоснование эффекта квантовой нелокальности, учитывающего запаздывание взаимодействия электрона как с собственным полем излучения, так и с флуктуационным полем электромагнитного вакуума. Для этого найдем коэффициент радиационного трения в асимптотическом пределе $k \gg k_0$. Чтобы вычислить коммутатор и антикоммутатор в (26), запишем произведение экспонент в виде (31), где множитель $e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}$, который можно точно вычислить, пользуясь соотношением (35), содержит, в частности, пространственную нелокальность Δr из (37). Поскольку в оператор $\Delta\mathbf{r}$ согласно формуле (35) входят матрицы Дирака, можно представить $e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}$ в виде

$$e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} = \cos(k\Delta r) + \frac{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}{k\Delta r} \sin(k\Delta r), \quad (39)$$

где $\Delta r = |\Delta\mathbf{r}| = \lambda_0 |\sin(\omega_0\tau)|$ не содержит матриц Дирака.

Особенности вычисления унитарного оператора e^{-iB} обусловлены зависимостью координаты электрона $\mathbf{r}(t)$ от импульса и матриц Дирака (см. формулу (35)). В результате вычислений на основе теории S -матрицы, приведенных в приложении, имеем

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} &= e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} e^{-i\omega_0\tau(\beta x \arctg x + \mathbf{n}\alpha(x - \arctg x))/2}, \\ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} &= (e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)})^\dagger|_{\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}} = \\ &= e^{-i\omega_0\tau(-\beta x \arctg x + \mathbf{n}\alpha(x - \arctg x))/2} e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (40)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$, $\tau = t - t_1$, $k = k_0 x$. Найденные выражения позволяют записать в явном виде коммутатор и антикоммутатор, входящие в формулу (26) для коэффициента радиационного трения.

Учтем формулы (39), (40) и вытекающее из (35) представление $\Delta\mathbf{r}$ в собственной системе координат, после усреднения по основному состоянию получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_+ \right\rangle &= \cos(x |\sin(\omega_0\tau)|) \cos\left(\frac{\omega_0\tau}{2} f(x)\right), \\ \left\langle \frac{i}{2} [e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_- \right\rangle &= \frac{x \arctg x}{f(x)} \cos(x |\sin(\omega_0\tau)|) \sin\left(\frac{\omega_0\tau}{2} f(x)\right), \end{aligned} \quad (41)$$

где $f(x) = \sqrt{(x - \arctg x)^2 + x^2 \arctg^2 x}$. После подстановки равенств (41) в (26) и простейших тригонометрических преобразований коэффициент радиационного трения запишется в виде ($\tau = t - t_1$)

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) = & \frac{2}{3\pi} \alpha \int_0^\infty dx \cos(x \sin(\omega_0 \tau)) \eta(\tau) \times \\ & \times \left\{ \left[\cos\left(\omega_0 \tau \left(x + \frac{f(x)}{2}\right)\right) + \cos\left(\omega_0 \tau \left(x - \frac{f(x)}{2}\right)\right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{x \arctg x}{f(x)} \left[\cos\left(\omega_0 \tau \left(x + \frac{f(x)}{2}\right)\right) - \cos\left(\omega_0 \tau \left(x - \frac{f(x)}{2}\right)\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

В выражении для силы трения вклады от каждого из двух механизмов радиационного трения (самовоздействия и влияния вакуума) складываются, поэтому асимптотику обоих слагаемых можно рассмотреть совместно. С этой целью отметим, что особенности $\gamma(\tau)$ в асимптотическом пределе определяются функцией $f(x)$, которую мы запишем как

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x^2 y^2 + (x - y)^2} = x F(y), \quad y = \arctg x \leq \frac{\pi}{2}, \\ F(y) = \sqrt{y^2 + \left(1 - \frac{y}{\operatorname{tg} y}\right)^2}. \end{aligned}$$

Основной вклад в асимптотическое выражение для коэффициента радиационного трения вносит область $x > 1$, в которой функция $F(y) = F(\arctg x)$ очень медленно меняется и ограничена значением $F(\pi/2)$. Поэтому определим среднее значение этой функции

$$\bar{F} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dy F(y) \approx 0.85 \quad (43)$$

и положим $f(x) = x\bar{F}$. Так как функция $\frac{x \arctg x}{f(x)} = \frac{y}{F(y)}$ также меняется очень медленно, будем использовать ее среднее значение

$$\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dy \frac{y}{F(y)} \approx 0.95. \quad (44)$$

Принимая во внимание (43) и (44), перепишем (42) в виде

$$\gamma(\tau) = \frac{4}{3\pi} \alpha \int_0^\infty dx \cos(x \sin(\omega_0 \tau)) \eta(\tau) \left\{ \frac{1+\xi}{2} \cos(\beta_1 x \omega_0 \tau) + \frac{1-\xi}{2} \cos(\beta_2 x \omega_0 \tau) \right\}, \quad (45)$$

где $\beta_1 = 1 + \bar{F}/2 \approx 1.425$, $\beta_2 = 1 - \bar{F}/2 \approx 0.575$. Выполняя в (45) интегрирование по x , получим

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) = & \frac{4}{3\pi} \alpha \left\{ \frac{1+\xi}{4} \pi [\delta(\beta_1 \omega_0 \tau + \sin(\omega_0 \tau)) + \delta(\beta_1 \omega_0 \tau - \sin(\omega_0 \tau))] + \right. \\ & \left. + \frac{1-\xi}{4} \pi [\delta(\beta_2 \omega_0 \tau + \sin(\omega_0 \tau)) + \delta(\beta_2 \omega_0 \tau - \sin(\omega_0 \tau))] \right\} \eta(\tau). \end{aligned} \quad (46)$$

Учитывая значения параметров β_1 и β_2 и принимая во внимание принцип причинности при $\tau > 0$, получим следующее выражение:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{3} \alpha (1 - \xi) \delta(\beta_2 \omega_0 \tau - \sin(\omega_0 \tau)) \eta(\tau). \quad (47)$$

Решая трансцендентное уравнение $\beta_2 \omega_0 \tau - \sin(\omega_0 \tau) = 0$, для его корня τ^* получим $\omega_0 \tau^* \approx 1.72$, $\sin(\omega_0 \tau^*) = \sigma \approx 0.99$. Отсюда следует, что замена $\sin(\omega_0 \tau) \rightarrow \sigma$ не меняет асимптотического предела для коэффициента трения

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{3} \alpha (1 - \xi) \delta(\beta_2 \omega_0 (\tau - \tau^*)) \eta(\tau).$$

Соответствующая замена $\cos(x \sin(\omega_0 \tau)) \rightarrow \cos(\sigma x)$ в (42), вытекающая из асимптотического предела (47), приводит к выражению, в котором одновременно учитываются асимптотика малых передаваемых импульсов и, соответственно, малых частот:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) = & \frac{2}{3\pi} \alpha \int_0^\infty dx \cos(\sigma x) \eta(\tau) \times \\ & \times \left\{ \left[\cos\left(\omega_0 \tau \left(x + \frac{f(x)}{2}\right)\right) + \cos\left(\omega_0 \tau \left(x - \frac{f(x)}{2}\right)\right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{x \operatorname{arctg} x}{f(x)} \left[\cos\left(\omega_0 \tau \left(x + \frac{f(x)}{2}\right)\right) - \cos\left(\omega_0 \tau \left(x - \frac{f(x)}{2}\right)\right) \right] \right\}. \quad (48) \end{aligned}$$

Действительно, в области малых частот можно пренебречь быстрыми осцилляциями в дисперсии $\cos(x \sin(\omega_0 \tau))$ приращения координаты в выражении (42).

Таким образом, установленная нами асимптотика в области больших передаваемых импульсов будет одновременно учтена во всей области значений k , если в исходном выражении для радиационной силы (15) произвести замены

$$\begin{aligned} D_{jl}(\mathbf{k}, \tau) & \rightarrow \tilde{D}_{jl}(\mathbf{k}, \tau) = D_{jl}(\mathbf{k}, \tau) \cos(\sigma \lambda_c k), \\ M_{jl}(\mathbf{k}, \tau) & \rightarrow \tilde{M}_{jl}(\mathbf{k}, \tau) = M_{jl}(\mathbf{k}, \tau) \cos(\sigma \lambda_c k). \end{aligned} \quad (49)$$

С физической точки зрения наличие множителя $\cos(\sigma x)$ в (15) согласно (49) приводит к учету запаздывания взаимодействия между источником поля, электроном, и полем излучения. При этом время запаздывания взаимодействия есть время прохождения светом комптоновской длины волны (так как $\sigma \approx 1$). Благодаря эффективной перенормировке взаимодействия за счет множителя $\cos(\sigma x)$ снимаются парадоксы радиационного трения и исключаются расходимости при вычислении радиационных эффектов.

Анализ следствий из основного результата данной работы – формул (49) – выходит за рамки данной публикации. Здесь мы отметим только принципиально квантовый характер теории радиационного трения и отсутствие парадоксов, а именно рассмотрим вклад в радиационное трение первого слагаемого в (15) с учетом (49) в простейшем первом порядке малости по постоянной тонкой структуры. В этом случае для коэффициента трения в собственной системе координат можно воспользоваться выражением (48).

Рассмотрим подробнее поведение коэффициента трения при частотах $\omega < \omega_0/2$. В этой области можно воспользоваться аппроксимацией $\arctg x \approx x$. В результате из (48) получим

$$\gamma(\tau) = \frac{4\alpha}{3\pi} \int_0^\infty dx \cos(\sigma x) \cos\left(\omega_0 \tau \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\right) \eta(\tau). \quad (50)$$

Нетрудно вычислить зависимость коэффициента радиационного трения от частоты. Для действительной части имеем

$$\gamma'(\omega) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \gamma(\tau) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \frac{1}{\sqrt{1+2|\omega|/\omega_0}} \cos\left(\sigma \frac{\omega}{\omega_0} \frac{2}{1+\sqrt{1+2|\omega|/\omega_0}}\right). \quad (51)$$

Заметим, что зависимость $\gamma'(\omega)$ имеет принципиально квантовый характер. Действительно, входящее в данное выражение отношение $\omega/\omega_0 = \hbar\omega/mc^2$ содержит в явном виде постоянную Планка. При $\hbar \rightarrow 0$ выражение (50) переходит в классическое (27), из которого вытекают известные парадоксы.

Выясним физический смысл полученного выражения (50), в частности, покажем, что введенный выше параметр τ^* есть характерное время запаздывания взаимодействия. Для наглядности рассмотрим область более низких частот и, следовательно, малых передаваемых импульсов, когда слагаемым с x^2 можно пренебречь, а коэффициент трения (50) записать в виде

$$\gamma(\tau) = \frac{4\alpha}{3\pi} \int_0^\infty dx \cos(\sigma x) \cos(\omega_0 \tau x) \eta(\tau).$$

Интегрирование по волновому вектору приводит к выражению

$$\gamma(\tau) = \frac{2}{3} \alpha \{ \delta(\omega_0(\tau - \tau^*)) + \delta(\omega_0(\tau + \tau^*)) \} \eta(\tau) = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\omega_0} \delta(\tau - \tau^*),$$

из которого вытекает следующая зависимость коэффициента радиационного трения от частоты:

$$\gamma(\omega) = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\omega_0} e^{i\omega\tau^*} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} e^{i\omega\tau^*}. \quad (52)$$

С учетом выражения (52) линейная восприимчивость (30) запишется следующим образом:

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{m\omega^2} \left(1 + i \frac{2\alpha}{3} \frac{\omega}{\omega_0} e^{i\omega\tau^*} \right)^{-1}. \quad (53)$$

Легко видеть, что это выражение не имеет полюсов в верхней полуплоскости комплексной переменной ω и, таким образом, удовлетворяет принципу причинности. В то же время коэффициент радиационного трения, который можно получить из классической формулы Абрагама–Лоренца (1),

$$\gamma^0(\omega) = \frac{e^2}{mc^3},$$

дает полюс в выражении для восприимчивости (30) в верхней полуплоскости ω , что и приводит к парадоксу самоускорения в классической теории радиационного затухания.

Из формулы (53) для линейной восприимчивости следует уравнение движения электрона во внешнем электрическом поле:

$$\ddot{r}_j(t) - \gamma_0 \ddot{r}_j(t - \tau^*) = \frac{e}{m} E_j(t).$$

Поскольку радиационная сила трения “включается” с опозданием на время τ^* , приближенно можно считать, что в течение этого времени электрон движется только под действием внешнего поля. Следовательно, на этом промежутке времени мы имеем уравнение движения вида

$$m\ddot{r}_j(t) = eE_j(t).$$

На больших промежутках времени влияние радиационной силы трения можно учесть, воспользовавшись ограниченным во времени уравнением движения

$$\ddot{r}_j(t) = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} eE_j(t),$$

тогда для больших промежутков времени мы получим хорошо известное уравнение, применяемое для практических вычислений, но с некоторым принципиальным отличием:

$$\ddot{r}_j(t) = \frac{e}{m} E_j(t) + \frac{e^2}{mc^3} \frac{d}{dt} eE_j(t - \tau^*).$$

Согласно полученному уравнению, электрон взаимодействует с электрическим полем с опозданием на время прохождения светом комптоновской длины волны. Это явление есть следствие эффекта нелокальности релятивистского квантового электрона, и оно полностью отсутствует в классической теории.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложено принципиально важное обобщение установленного в работе [28] эффекта квантовой нелокальности, заключающегося в запаздывании взаимодействия между электроном и собственным полем излучения. В работе учтены флуктуации электронной плотности электрона Дирака, имеющие принципиально релятивистский квантовый характер, и определен асимптотический вклад больших передаваемых импульсов в эффект запаздывания взаимодействия между электроном Дирака и полем излучения с учетом обоих механизмов радиационного трения – реакции собственного поля излучения и воздействия на электрон флуктуационного поля электромагнитного вакуума. Показано, что эффект запаздывания взаимодействия (квантовой нелокальности) исключает парадоксы самоускорения и нарушения причинности, имеющие место в классической теории.

Найдена зависимость коэффициента радиационного трения от частоты с учетом квантовых эффектов. Установленный эффект учитывает вклад в запаздывание взаимодействия всех импульсов, передаваемых от излучения к электрону. В области малых частот и, соответственно, малых передаваемых импульсов запаздывание взаимодействия является следствием того, что можно пренебречь быстрыми осцилляциями дисперсии приращения координаты в выражении для коэффициента радиационного трения. Вклад больших передаваемых импульсов в запаздывание взаимодействия получается в результате анализа асимптотического выражения для

коэффициента трения при $k \gg k_0$. Значение времени запаздывания с большой точностью равно времени прохождения светом комптоновской длины волны λ_c .

Доказательство эффекта квантовой нелокальности приобретает особую значимость, так как при учете запаздывания взаимодействия автоматически исключаются расходимости и отпадает необходимость использования процедуры перенормировок при вычислении таких фундаментальных эффектов квантовой электродинамики, как смещение Лэмба и аномальный магнитный момент электрона. Исключение расходимостей в рамках простейшей модели статистической квантовой электродинамики позволяет надеяться на возможность распространения эффекта квантовой нелокальности на последовательную полевою теорию. Некоторые исходные положения флуктуационно-диссипационной квантовой электродинамики изложены в трудах конференций [27], [32]. В полевой теории запаздывание взаимодействия между зарядом и полем излучения также может быть связано с флуктуациями электронной плотности. При этом из соображений размерности мы получаем, что есть всего лишь одно характерное время: $\tau_0 = \lambda_c/c$.

Таким образом, одночастичная квантовая электродинамика имеет достаточно широкую область применения [33], в частности, на ее основе можно исследовать широкий спектр радиационных эффектов, например радиационное трение, смещение Лэмба и аномальный магнитный момент электрона. Если перейти к более строгому описанию радиационных эффектов и учесть взаимодействие электромагнитного и электрон-позитронного вакуумов, то и в этом случае благодаря слабости их взаимодействия гауссова статистика для потенциалов вакуумного поля с большой степенью точности сохраняется (строгое физическое обоснование того, что негауссовость в вакуумных процессах является слабой, следует из нелинейных флуктуационно-диссипационных теорем). При этом функция Грина фотона изменится за счет поляризации электрон-позитронного вакуума и может быть вычислена лишь на основе полевой теории. Форма стохастических уравнений при этом останется прежней, и с большой точностью сохранится численное значение параметра нелокальности, определяющего перенормировку функции Грина фотона за счет эффекта запаздывания взаимодействия.

Приведенные выше физические соображения применимости одночастичной квантовой электродинамики (КЭД) согласуются с принципом соответствия. Применительно к КЭД принцип соответствия гласит следующее: полевая квантовая теория, являясь более общей теорией, включает в себя как предельный случай одночастичную КЭД. В то же время полевая теория строится на основе одночастичной релятивистской теории Дирака с привлечением принципа тождественности. Соответственно, одночастичная КЭД при $\hbar \rightarrow 0$ переходит в классическую электродинамику. Согласно принципу соответствия эффект квантовой нелокальности, установленный в одночастичной квантовой электродинамике, может быть перенесен в полевою теорию с помощью перенормировки функции Грина фотона.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вычисления унитарного оператора e^{-iB} введем фиктивное уравнение Шредингера

$$-i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = (F_0 + V)\psi(\theta), \quad (\text{П.1})$$

где ψ – некоторая функция, θ играет роль временной переменной, $F_0 = \mathbf{k}\Delta\mathbf{r}$ – оператор свободной эволюции, $V = \mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)$ – оператор взаимодействия. Решение

этого уравнения записывается в виде

$$\psi(\theta) = e^{i(F_0+V)\theta} \psi(0). \quad (\text{П.2})$$

Наша задача – найти коэффициент радиационного затухания электрона во внешних полях, меняющихся во времени медленно, т.е. с частотой $\omega < \omega_0 = mc^2/\hbar$. Поэтому для вычисления оператора B будем использовать асимптотические по времени слагаемые. Из выражения (35) видно, что в случае $\omega_0(t - t_0) = \omega_0\tau > 1$ оператор свободной эволюции $F_0 = \mathbf{k}(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1))$ равен

$$F_0 = \frac{c^2 \mathbf{k} \mathbf{p}}{H} \tau, \quad H = c \alpha \mathbf{p} + \beta mc^2. \quad (\text{П.3})$$

Уравнение (П.1) нетрудно записать в представлении взаимодействия:

$$-i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} = \tilde{V}(\theta) \tilde{\psi}(\theta), \quad (\text{П.4})$$

где

$$\tilde{\psi}(\theta) = e^{-iF_0\theta} \psi(\theta), \quad \tilde{V}(\theta) = e^{-iF_0\theta} V e^{iF_0\theta}. \quad (\text{П.5})$$

Заметим, что в импульсном представлении оператор взаимодействия имеет вид $V = i\hbar \mathbf{k} \nabla_{\mathbf{p}}$, следовательно,

$$\tilde{V}(\theta) = V + e^{-iF_0\theta} i\hbar \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} e^{iF_0\theta} \equiv V + U(\mathbf{p}, \theta), \quad (\text{П.6})$$

и уравнение (П.4) можно переписать в виде

$$-i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} = (V + U(\mathbf{p}, \theta)) \tilde{\psi}(\theta). \quad (\text{П.7})$$

Особенность вычисления производной в (П.6) обусловлена зависимостью оператора свободной эволюции F_0 от матриц Дирака. Из перестановочных соотношений для последних следует, что $F_0^2 = \tilde{F}_0^2$, где $\tilde{F}_0 = (c^2 \mathbf{k} \mathbf{p} / H) \tau$, т.е. F_0 не содержит матриц Дирака. Поэтому можно записать следующее:

$$e^{iF_0\theta} = \cos(\tilde{F}_0\theta) + i \frac{F_0}{\tilde{F}_0} \sin(\tilde{F}_0\theta).$$

Воспользовавшись этим результатом и явным видом оператора свободной эволюции (П.3), для оператора $U(\mathbf{p}, \theta)$ получим следующее выражение:

$$U(\mathbf{p}, \theta) = -\frac{\tau \hbar c^2 k^2 \theta}{H} + \frac{\tau \hbar c^4 (\mathbf{k} \mathbf{p})^2 \theta}{H^3}. \quad (\text{П.8})$$

Используем в уравнении (П.7) представление взаимодействия и будем искать решение в виде

$$\tilde{\psi}(\theta) = e^{iV(\theta-1)} \varphi(\theta). \quad (\text{П.9})$$

В этом случае для функции $\varphi(\theta)$ получаем уравнение

$$-i \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \tilde{U}(\mathbf{p}, \theta) \varphi(\theta), \quad (\text{П.10})$$

где

$$\tilde{U}(\mathbf{p}, \theta) = e^{-iV(\theta-1)} U(\mathbf{p}, \theta) e^{iV(\theta-1)} = e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)(\theta-1)} U(\mathbf{p}, \theta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)(\theta-1)}.$$

Замечаем, что в координатном представлении оператор импульса $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$. Нетрудно доказать следующее равенство:

$$\tilde{U}(\mathbf{p}, \theta) = U(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}(\theta - 1), \theta). \quad (\text{П.11})$$

Поскольку оператор $\tilde{U}(\mathbf{p}, \theta)$ не коммутирует с $\tilde{U}(\mathbf{p}, \theta_1)$ при $\theta \neq \theta_1$, решение уравнения (П.10) необходимо записать в соответствии с теорией S -матрицы:

$$\varphi(\theta) = T \exp \left\{ i \int_0^\theta d\theta_1 \tilde{U}(\mathbf{p}, \theta_1) \right\} \varphi(0) = S(\theta) \varphi(0), \quad (\text{П.12})$$

где T – оператор хронологического упорядочения по параметру θ .

Найдем связь между исходной функцией $\psi(\theta)$ и найденной $\varphi(\theta)$. Из (П.5) и (П.9) получим

$$\psi(\theta) = e^{iF_0\theta} e^{iV(\theta-1)} \varphi(\theta). \quad (\text{П.13})$$

Используя (П.12) и (П.13), для уравнения (П.1) при $\theta = 1$ имеем следующее решение: $\psi(1) = e^{iF_0} S(1) e^{iV} \psi(0)$, при этом из общего решения (П.12) следует, что $\psi(1) = e^{i(F_0+V)} \psi(0)$. Приравнявая эти два результата, находим, что $e^{i(F_0+V)} = e^{iF_0} S(1) e^{iV}$, или, в исходных обозначениях,

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} = e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} S(1) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}.$$

В результате получаем искомое произведение экспонент (32):

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} = e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} T \exp \left\{ i \int_0^1 d\theta U(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}(\theta - 1), \theta) \right\}. \quad (\text{П.14})$$

Из формул (П.8) и (П.11) следует слабая некоммутативность операторов $\tilde{U}(\mathbf{p}, \theta)$ при разных θ , поэтому с большой точностью можно пренебречь взятием операции хронологического упорядочения в (П.14). Заметим, что для бесспиновой релятивистской частицы операторы $\tilde{U}(\mathbf{p}, \theta)$ при различных значениях θ коммутируют друг с другом и S -матрица вычисляется точно.

Используя (П.8) и произведя интегрирование в собственной системе отсчета электрона, для правой части (П.14) получаем

$$\begin{aligned} T \exp \left\{ i \int_0^1 d\theta U(\hbar\mathbf{k}(\theta - 1), \theta) \right\} &= \\ &= \exp \left(-\frac{i\omega\tau}{2} \left\{ \beta \frac{k}{k_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{k}{k_0} \right) + \frac{\mathbf{k}\boldsymbol{\alpha}}{k_0} - \frac{\mathbf{k}\boldsymbol{\alpha}}{k} \operatorname{arctg} \left(\frac{k}{k_0} \right) \right\} \right). \end{aligned}$$

Благодарности. Авторы выражают признательность Ю. Г. Шондину за полезные обсуждения ряда вопросов, затронутых в настоящей работе.

Список литературы

- [1] М. Abraham, *Theorie der Elektrizität. II. Elektromagnetische Theorie der Strahlung*, Teubner, Leipzig, 1905; Г. А. Лоренц, *Теория электронов*, Гос. издат. техн.-теор. лит., М., 1953.
- [2] Р. А. М. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **167**:929 (1938), 148–169.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. II. Теория поля*, Наука, М., 1973.
- [4] Дж. Джексон, *Классическая электродинамика*, Мир, М., 1965.
- [5] В. Л. Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика*, Наука, М., 1981.
- [6] Г. Ф. Ефремов, *ЖЭТФ*, **110** (1996), 1629–1640.
- [7] Г. Ф. Ефремов, *ЖЭТФ*, **114**:5 (1998), 1661–1671.
- [8] П. О. Казинский, А. А. Шарапов, *ТМФ*, **143**:3 (2005), 375–400.
- [9] Б. П. Косяков, *ТМФ*, **119**:1 (1999), 119–135.
- [10] F. Rohrlich, *Phys. Lett. A*, **283**:5–6 (2001), 276–278; **295**:5–6 (2002), 320–322.
- [11] В. В. Лидский, *ТМФ*, **143**:1 (2005), 112–130.
- [12] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **74**:8 (1948), 939–946.
- [13] G. W. Ford, J. T. Lewis, R. F. O’Connell, *Phys. Rev. Lett.*, **55**:21 (1985), 2273–2276.
- [14] P. M. Barone, A. O. Caldeira, *Phys. Rev. A*, **43**:1 (1991), 57–63.
- [15] V. Hakim, V. Ambegaokar, *Phys. Rev. A*, **32**:1 (1985), 423–434.
- [16] A. I. Nikishov, V. I. Ritus, *ЖЭТФ*, **114**:3 (1998), 777–785.
- [17] A. Komech, *Phys. Lett. A*, **241**:6 (1998), 311–322.
- [18] A. C. R. Mendes, F. I. Takakura, *Phys. Rev. E*, **64**:5 (2001), 056501.
- [19] T. Petrosky, G. Ordóñez I. Prigogine, *Phys. Rev. A*, **68**:2 (2003), 022107.
- [20] A. Yu. Smirnov, *J. Phys. A*, **30**:4 (1997), 1135–1141.
- [21] A. Yu. Smirnov, *Phys. Rev. E*, **56**:2 (1997), 1484–1489.
- [22] Г. Ф. Ефремов, В. А. Казаков, *Изв. вузов. Сер. радиофиз.*, **22** (1979), 453.
- [23] Г. Ф. Ефремов, А. Ю. Смирнов, *ЖЭТФ*, **80** (1981), 1071.
- [24] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *ТМФ*, **43**:1 (1980), 3–17.
- [25] J. Schwinger, *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 407–432.
- [26] I. R. Senitzky, *Phys. Rev.*, **119**:2 (1960), 670–679; **124**:3 (1961), 642–648.
- [27] G. F. Efremov, M. A. Novikov, L. G. Mourokh, “Fluctuation–dissipation quantum electrodynamics”, *The Present Status of the Quantum Theory of Light*, Fund. Theories Phys., **80**, eds. S. Jeffers, S. Roy, J.-P. Vigiér, G. Hunter, Kluwer, Dordrecht, 1997, 97.
- [28] Г. Ф. Ефремов, В. В. Шарков, *ЖЭТФ*, **125**:2 (2004), 195–204.
- [29] П. А. М. Дирак, *Принципы квантовой механики*, Физматгиз, М., 1960.
- [30] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, М., 1962.
- [31] Г. Ф. Ефремов, *ЖЭТФ*, **55** (1968), 2322.
- [32] G. F. Efremov, M. A. Novikov, V. V. Ivanov, A. G. Efremov, “Causality and nonlocality in problem of radiative damping of electron”, *Causality and Locality in Modern Physics*, Fund. Theories Phys., **97**, eds. G. Hunter, S. Jeffers, J.-P. Vigiér, Kluwer, Dordrecht, 1998, 87–95.
- [33] Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл, *Релятивистская квантовая теория. Т. I. Релятивистская квантовая механика*, Наука, М., 1978.

Поступила в редакцию 30.11.2007,
после доработки 27.06.2008