Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Динг, С. З. Пакуляк, С. М. Хорошкин, Факторизация универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы для $U_q(\widehat{sl}_2)$, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 2, 179–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:43:58

© 2000 г. Д. Динг*, С. Пакуляк^{†,‡}, С. Хорошкин[‡]

ФАКТОРИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ $\mathcal{R}$ -МАТРИЦЫ ДЛЯ $U_q(\widehat{sl}_2)^{1)}$

Для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ построена факторизация универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы, отвечающей так называемой хопфовой структуре Дринфеляда. Результатом факторизационной процедуры являются дифференциальные уравнения на сомножители универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы, которые, в свою очередь, позволяют однозначно определить указанные сомножители в интегральном виде.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	180
2. Предварительные сведения и основные результаты	181
2.1. Два описания квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$	181
2.2. Основные результаты	185
3. Алгебра $U_q(\widehat{sl}_2)$ с коумножением Дринфеляда	187
3.1. Универсальная $\mathcal{R}$ -матрица в мультипликативной форме	188
3.2. Интегральное представление элемента $\overline{\mathcal{R}}'$ и фундаментальное дифференциальное уравнение	190
3.3. Тензор спаривания как формальный интеграл	192
4. Факторизация универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы	193
4.1. Биортогональные разложения алгебр Хопфа	194
4.2. Применение к алгебре $U_q(\widehat{sl}_2)$	196
4.3. Дифференциальные уравнения на элементы $\mathcal{R}_{\pm, \mp}(\tau)$	198
4.4. Проекция сложных токов и экранирующие операторы	200
5. Факторизация формального тензора спаривания	204

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии

*Department of Mathematical Sciences, University of Cincinnati, USA.
E-mail: Jintai.Ding@math.uc.edu

[†]Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Московская обл., Россия; Институт теоретической физики, Киев, Украина. E-mail: pakuliak@thsun1.jinr.ru

[‡]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: khor@heron.itep.ru

5.1. Другая форма дифференциальных уравнений и комбинаторное тождество	204
5.2. Примеры вычислений и обращение в нуль перекрестных членов в интегралах	207
Приложение. Вычисления с помощью спаривания	210

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория квантовых групп является источником большого количества теоретико-групповых методов исследования квантовых интегрируемых систем. Квантовые группы, построенные на основе квантового метода обратной задачи [1], были описаны в работах [2, 3] как алгебры Хопфа, отвечающие деформациям универсальных обертывающих алгебр для полупростых алгебр Ли. В большинстве приложений квантовые группы как алгебры Хопфа возникают вместе с R -матрицами, заданными либо в численном виде, либо в виде L -операторов или универсальных $\mathcal{R}$ -матриц. Последние являются элементами в пополненном квадрате соответствующей алгебры Хопфа и удовлетворяют определенным условиям. Непосредственным следствием этих условий является уравнение Янга–Бакстера на универсальную $\mathcal{R}$ -матрицу, так что различные L -операторы и числовые R -матрицы могут быть получены из универсальной при сужении на конкретные представления исходной алгебры.

В недавних работах [4–6] было показано, что деформированные алгебры, обеспечивающие интегрируемость эллиптических моделей [7, 8] и их квантово-полевых аналогов [9], могут быть получены из квантовых аффинных алгебр некоторой процедурой подкрутки, слегка нарушающей аксиому коассоциативности в исходных алгебрах Хопфа. Получаемые алгебры оказываются квазихопфовыми [10]. Понятие универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы сохраняется при этой процедуре, хотя сама алгебра может потерять некоторые свои свойства. Точная конструкция скручивающего коцикла требует решения некоторого разностного уравнения. Следствием этого подхода является представление универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы для скрученной алгебры в виде бесконечного произведения сдвинутых универсальных $\mathcal{R}$ -матриц исходной квантовой аффинной алгебры, которые практически не применимы в приложениях.

Альтернативным способом получения аналогичного результата является использование “новой реализации” квантовых аффинных алгебр и их обобщений. Эта реализация была построена Дринфельдом [11] как деформация стандартного петлевого базиса в аффинных алгебрах Ли и оказалась очень полезной для развития теории представлений квантовых аффинных алгебр. “Новая реализация” обладает отличной от стандартной для квантовых аффинных алгебр структурой коумножения, которую иногда называют коумножением Дринфельда. В работе [12] было доказано, что эта структура коумножения может быть получена процедурой сплетения с помощью коцикла, являющегося частью универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы. Другое преимущество “новой реализации” было отмечено в работе [6]: ее эллиптические аналоги могут быть описаны с помощью простых операторов сплетения.

Авторами работ [13, 14] было предложено обратить рассуждения работы [12], а именно получить стандартную хопфову структуру квантовых аффинных алгебр и их эллип-

тических аналогов из коалгебраической структуры Дринфеля и ее эллиптических аналогов. Как следует из работы [12], эта задача эквивалентна задаче Римана о факторизации основной части универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы, построенной по коумножению Дринфеля. В работах [13, 14] таким способом было получено L -операторное описание некоторых эллиптических алгебр и было предложено обобщение данного подхода для кривых старшего рода.

В настоящей работе мы развиваем идеи работы [13] и явным образом решаем задачу факторизации для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$. Наши методы отличаются от методов, используемых в [13, 14], и базируются, в основном, на результатах работ [15, 16], в которых было изучено интегральное представление для универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы, ассоциированной с коумножением Дринфеля. Применяя проекторы, описывающие искомую факторизацию, к этому интегральному представлению, мы получаем дифференциальные уравнения на факторизуемые части универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы для $U_q(\widehat{sl}_2)$. Эти дифференциальные уравнения имеют единственное решение в виде степенных рядов с некоммутирующими коэффициентами. В частных случаях, например для представления уровня один, полученные решения позволяют вычислить универсальную $\mathcal{R}$ -матрицу для бесконечномерных представлений. Предложенный метод является достаточно общим и применим также для эллиптических и ангианных алгебр, хотя в данной работе мы рассматриваем только случай алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем два описания квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ и формулируем наши основные результаты. Раздел 3 посвящен “новой реализации” $U_q(\widehat{sl}_2)$, описаны ее хопфова структура, хопфово спаривание между двумя борелевскими подалгебрами в токовой формулировке и рассмотрены все известные формулы для соответствующей $\mathcal{R}$ -матрицы и тензора спаривания. В частности, мы напоминаем результаты работ [15, 16], в которых были изучены интегральное представление и дифференциальное уравнение для универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы.

Основные результаты доказаны в разделе 4. Здесь мы описываем технику проекций, развитую в работах [13, 14], затем применяем ее к дифференциальному уравнению из предыдущего раздела и получаем дифференциальные уравнения для составляющих факторов традиционной $\mathcal{R}$ -матрицы. При этом естественным образом возникают экраняющие операторы (скрининги). В разделе 5 мы сравниваем наши методы с подходом работ [13, 14]. Из этого сравнения видно, что вычисление сложных многократных интегралов, возникающих в этом подходе, может быть сведено к некоторому комбинаторному тождеству, доказательство которого было любезно предоставлено нам А. Окуньковым. Соответствующая техника вычислений этих многократных интегралов, основанная на использовании ортогональных базисов в борелевских подалгебрах и техники спаривания, приведена в приложении.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Два описания квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$.

Алгебра $U_q(\widehat{sl}_2)$ как квантовая алгебра Каца–Мули. Квантовая аффинная алгебра

$U_q(\widehat{sl}_2)$ является ассоциативной алгеброй, порожденной образующими $e_{\pm\alpha_i}, k_{\alpha_i}^{\pm 1}, d, i = 0, 1$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[d, e_{\pm\alpha_i}] = \pm\delta_{i0}e_{\pm\alpha_i}, \quad k_{\alpha_i}e_{\pm\alpha_j}k_{\alpha_i}^{-1} = q_i^{\pm a_{ij}}e_{\pm\alpha_j}, \quad [e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = \delta_{ij} \frac{k_{\alpha_i} - k_{\alpha_i}^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad (2.1)$$

и в том числе соотношениям Серра

$$e_{\pm\alpha_i}^3 e_{\pm\alpha_j} + [3]_q e_{\pm\alpha_i}^2 e_{\pm\alpha_j} e_{\pm\alpha_i} + [3]_q e_{\pm\alpha_i} e_{\pm\alpha_j} e_{\pm\alpha_i}^2 + e_{\pm\alpha_j} e_{\pm\alpha_i}^3 = 0, \quad i \neq j, \quad (2.2)$$

где $[n]_q = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ есть гауссово q -число,

$$a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

— матрица Картана для аффинной алгебры $\widehat{sl}_2$. Элемент c , заданный соотношением

$$q^c \equiv k_{\alpha_0} k_{\alpha_1}, \quad (2.3)$$

является центральным, и его значение на конкретном представлении называется *уровнем*.

Одна из возможных хопфовых структур описывается формулами

$$\begin{aligned} \Delta(e_{\alpha_i}) &= e_{\alpha_i} \otimes 1 + k_{\alpha_i} \otimes e_{\alpha_i}, & \Delta(e_{-\alpha_i}) &= 1 \otimes e_{-\alpha_i} + e_{-\alpha_i} \otimes k_{\alpha_i}^{-1}, \\ \Delta(k_{\alpha_i}) &= k_{\alpha_i} \otimes k_{\alpha_i}, & \Delta(d) &= d \otimes 1 + 1 \otimes d, \\ \varepsilon(e_{\pm\alpha_i}) &= 0, & \varepsilon(k_{\alpha_i}^{\pm 1}) &= 1, & \varepsilon(d) &= 0, \\ a(e_{\alpha_i}) &= -k_{\alpha_i}^{-1} e_{\alpha_i}, & a(e_{-\alpha_i}) &= -e_{-\alpha_i} k_{\alpha_i}, & a(k_{\alpha_i}^{\pm 1}) &= k_{\alpha_i}^{\mp 1}, & a(d) &= -d, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где Δ, ε и a — отображения коумножения, коединицы и антипода, соответственно.

“Новая реализация” $U_q(\widehat{sl}_2)$. Так называемая “новая реализация” для квантовых аффинных алгебр была построена Дринфельдом в работе [11]. В этом описании алгебра $U_q(\widehat{sl}_2)$ порождается бесконечным набором образующих $d, q^c, k^{\pm 1}, e_n, f_n, n \in \mathbb{Z}, a_{\pm m}, m \geq 0$, удовлетворяющих квадратичным коммутационным соотношениям, которые в терминах производящих функций

$$\begin{aligned} e(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n z^{-n}, & f(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^{-n}, \\ \psi^{\pm}(z) &= \sum_{n \geq 0} \psi_n^{\pm} z^{\mp n} = k^{\pm 1} \exp\left(\pm(q - q^{-1}) \sum_{n > 0} a_{\pm n} z^{\mp n}\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

имеют вид

$$x^d e(z) x^{-d} = e(xz), \quad x^d f(z) x^{-d} = f(xz), \quad x^d \psi^{\pm}(z) x^{-d} = \psi^{\pm}(xz), \quad (2.6a)$$

$$(z - q^2 w) e(z) e(w) = (q^2 z - w) e(w) e(z), \quad (2.6b)$$

$$(z - q^{-2} w) f(z) f(w) = (q^{-2} z - w) f(w) f(z), \quad (2.6b)$$

$$\frac{q^{c/2}z - q^2w}{q^{2+c/2}z - w}\psi^+(z)e(w) = e(w)\psi^+(z), \quad (2.6\Gamma)$$

$$\psi^-(z)e(w) = \frac{q^{2-c/2}z - w}{q^{-c/2}z - q^2w}e(w)\psi^-(z), \quad (2.6\Delta)$$

$$\frac{q^{-c/2}z - q^{-2}w}{q^{-2-c/2}z - w}\psi^+(z)f(w) = f(w)\psi^+(z), \quad (2.6\epsilon)$$

$$\psi^-(z)f(w) = \frac{q^{-2+c/2}z - w}{q^{c/2}z - q^{-2}w}f(w)\psi^-(z), \quad (2.6\zeta)$$

$$\frac{(z - q^{2-c}w)(z - q^{-2+c}w)}{(q^{2+c}z - w)(q^{-2-c}z - w)}\psi^+(z)\psi^-(w) = \psi^-(w)\psi^+(z), \quad (2.6\eta)$$

$$\psi^\pm(z)\psi^\pm(w) = \psi^\pm(w)\psi^\pm(z), \quad (2.6\theta)$$

$$[e(z), f(w)] = \frac{1}{q - q^{-1}} \left(\delta \left(\frac{z}{q^c w} \right) \psi^+ \left(z q^{-\frac{c}{2}} \right) - \delta \left(\frac{z q^c}{w} \right) \psi^- \left(w q^{-\frac{c}{2}} \right) \right), \quad (2.6\kappa)$$

где $\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n$, а q^c — центральный элемент.

Коалгебраическая структура алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$, эквивалентная (2.4), не может быть сформулирована в терминах полных токов (2.5). Положим

$$\begin{aligned} e_+(z) &= \oint \frac{dw}{2\pi w} \frac{e(w)}{1 - w/z} = \sum_{k \geq 0} e_k z^{-k}, \\ e_-(z) &= - \oint \frac{dw}{2\pi w} \frac{e(w)z/w}{1 - z/w} = - \sum_{k < 0} e_k z^{-k}, \\ f_+(z) &= \oint \frac{dw}{2\pi w} \frac{f(w)w/z}{1 - w/z} = \sum_{k > 0} f_k z^{-k}, \\ f_-(z) &= - \oint \frac{dw}{2\pi w} \frac{e(w)}{1 - z/w} = - \sum_{k \leq 0} f_k z^{-k}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тогда коумножение в алгебре $U_q(\widehat{sl}_2)$ в токовой реализации может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta(e_\pm(z)) &= e_\pm(z) \otimes 1 + \sum_{k \geq 0} (-q)^k (q - q^{-1})^{2k} f_\pm^k(zq^2) \psi_\pm(zq^{\mp \frac{c_1}{2}}) \otimes e_\pm^{k+1}(zq^{\mp c_1}), \\ \Delta(f_\pm(z)) &= 1 \otimes f_\pm(z) + \sum_{k \geq 0} (-q)^{-k} (q - q^{-1})^{2k} f_\pm^{k+1}(zq^{\pm c_2}) \otimes \psi_\pm(zq^{\pm \frac{c_2}{2}}) e_\pm^k(zq^2), \\ \Delta(\psi_\pm(z)) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k [k+1]_q (q - q^{-1})^{2k} f_\pm^k(zq^{2 \mp \frac{c_1}{2} \pm \frac{c_2}{2}}) \psi_\pm(zq^{\pm \frac{c_2}{2}}) \otimes \\ &\quad \otimes \psi_\pm(zq^{\mp \frac{c_1}{2}}) e_\pm^k(zq^{2 \mp \frac{c_1}{2} \pm \frac{c_2}{2}}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $c_1 = c \otimes 1$ и $c_2 = 1 \otimes c$ (в работе [17] формулы (2.8) были доказаны в более общем случае).

Связь между двумя описаниями. В оригинальной работе [2] только образующие Шевалле были выражены в терминах токовых генераторов. В рассматриваемом случае алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} e_{\alpha_1} &= e_0, \quad e_{-\alpha_1} = f_0, \quad e_{\alpha_0} = q^c f_1 k^{-1}, \\ e_{-\alpha_0} &= k e_{-1} q^{-c}, \quad k_{\alpha_1} = k, \quad k_{\alpha_0} = q^c k^{-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Обратные формулы, выражающие токовые генераторы через образующие Шевалле, были получены позднее в работах [18, 19] для произвольной квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ (см. также [20] для случая $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$). Оказалось, что образующие в “новой реализации” совпадают с точностью до центральных элементов с образующими Картана–Вейля для квантовой аффинной алгебры. Мы кратко опишем эту конструкцию в рассматриваемом случае.

Определим генераторы

$$e_\delta \stackrel{\text{def}}{=} e_{\alpha_1} e_{\alpha_0} - q^2 e_{\alpha_0} e_{\alpha_1}, \quad e_{-\delta} \stackrel{\text{def}}{=} e_{-\alpha_0} e_{-\alpha_1} - q^{-2} e_{-\alpha_1} e_{-\alpha_0}.$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[e_\delta, e_{-\delta}] = \frac{q^c - q^{-c}}{q - q^{-1}}.$$

Определим базис Картана–Вейля для алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$. Для $n \geq 0$ образующие Картана–Вейля, отвечающие всем действительным корням $\pm\alpha_1 \pm n\delta$, заданы соотношениями

$$\begin{aligned} E_{\alpha_1+n\delta} &\stackrel{\text{def}}{=} [2]_q^{-n} (\text{ad } e_\delta)^n e_{\alpha_1}, & E_{\alpha_1-n\delta} &\stackrel{\text{def}}{=} q^{cn} [2]_q^{-n} (\text{ad } e_{-\delta})^n e_{\alpha_1}, \\ E_{-\alpha_1+n\delta} &\stackrel{\text{def}}{=} q^{-cn} (-[2]_q)^{-n} (\text{ad } e_\delta)^n e_{-\alpha_1}, & E_{-\alpha_1-n\delta} &\stackrel{\text{def}}{=} (-[2]_q)^{-n} (\text{ad } e_{-\delta})^n e_{-\alpha_1}. \end{aligned}$$

Определим также вспомогательные операторы

$$E_{n\delta} = [E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1+n\delta}], \quad E_{-n\delta} = [E_{\alpha_1-n\delta}, E_{-\alpha_1}], \quad n > 0,$$

связанные с генераторами $a_{\pm n}$, ассоциированными с мнимыми корнями $\pm n\delta$, соотношением

$$\pm(q - q^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} q^{\pm \frac{cn}{2}} E_{\pm n\delta} z^{\mp n} = k_{\alpha_1}^{\pm 1} \exp\left(\pm(q - q^{-1}) \sum_{n>0} a_{\pm n} z^{\mp n}\right).$$

Тогда отождествление с токовыми генераторами имеет вид

$$\begin{aligned} e_n &= E_{\alpha_1+n\delta}, \quad f_n = E_{-\alpha_1+n\delta} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \psi_0^\pm = k_{\alpha_1}^{\pm 1}, \\ E_{n\delta} &\equiv \begin{cases} \frac{q^{-cn/2}}{q - q^{-1}} \psi_n^+, & n > 0, \\ -\frac{q^{-cn/2}}{q - q^{-1}} \psi_n^-, & n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.2. Основные результаты. Как известно, универсальная $\mathcal{R}$ -матрица для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ является элементом в некотором пополнении тензорного произведения $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$, удовлетворяющим соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\Delta(x) &= \Delta'(x)\mathcal{R} \quad \forall x \in U_q(\widehat{\mathfrak{g}}), \\ (\Delta \otimes \text{id})\mathcal{R} &= \mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где для $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ символом $\Delta'(x) = x_{(2)} \otimes x_{(1)}$ обозначено противоположное коумножение, и если $\mathcal{R} = \sum a_i \otimes b_i$, то $\mathcal{R}^{13}$ означает $\sum a_i \otimes 1 \otimes b_i$, и т.д.

Известно [12], что универсальная $\mathcal{R}$ -матрица для хопфовой структуры, заданной соотношениями (2.4) имеет вид

$$\mathcal{R}_{\text{can}} = \mathcal{R}_{-,+}^{21} \cdot \mathcal{K} \cdot \mathcal{R}_{+,-}, \quad (2.11)$$

где A^{21} означает перестановку местами левого и правого тензорных пространств и элемент

$$\mathcal{K} = q^{-\frac{h \otimes h}{2}} q^{\frac{-c \otimes d - d \otimes c}{2}} \exp \left((q^{-1} - q) \sum_{n>0} \frac{n}{[2n]_q} a_n \otimes a_{-n} \right) q^{\frac{-c \otimes d - d \otimes c}{2}} \quad (2.12)$$

зависит только от генераторов Картана и генераторов, отвечающих мнимым корням. $\mathcal{R}$ -матрица (2.11) принадлежит тензорному произведению $U_q(\widehat{\mathfrak{b}}_+) \otimes U_q(\widehat{\mathfrak{b}}_-)$, где $U_q(\widehat{\mathfrak{b}}_+)$ порождено элементами $e_m, m \geq 0, k^{\pm 1}, a_n, f_n, n > 0$, и $U_q(\widehat{\mathfrak{b}}_-)$ порождено элементами $f_n, n \leq 0, k^{\pm 1}, a_m, e_m, m < 0$. Для элементов $\mathcal{R}_{\pm, \mp}$ известны мультипликативные представления (см. [12] или формулу (4.1) ниже).

Основной целью настоящей работы является построение интегрального представления для сомножителей $\mathcal{R}_{\pm, \mp}$ универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы (2.11). Обозначим через d_α следующий градуирующий оператор:

$$[d_\alpha, e(z)] = e(z), \quad [d_\alpha, f(z)] = -f(z), \quad [d_\alpha, \psi_\pm(z)] = 0, \quad (2.13)$$

и пусть

$$\mathcal{R}_{\pm, \mp}(\tau) = \tau^{-d_\alpha \otimes 1} \mathcal{R}_{\pm, \mp} \tau^{d_\alpha \otimes 1}, \quad \overline{\mathcal{R}}_{\pm, \mp}(\tau) = 1 \otimes 1 + \sum_{n>0} \mathcal{R}_{\pm, \mp}^{(n)} \tau^n \quad (2.14)$$

(не путать τ со спектральным параметром). Основным результатом нашей работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q^N \neq 1$ для $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда имеют место следующие дифференциальные уравнения:

$$\tau \frac{d\mathcal{R}_{+,-}(\tau)}{d\tau} = \mathcal{R}_{+,-}(\tau) \cdot I_{+,-}(\tau), \quad (2.15a)$$

$$\tau \frac{d\mathcal{R}_{-,+}(\tau)}{d\tau} = I_{-,+}(\tau) \cdot \mathcal{R}_{-,+}(\tau), \quad (2.15b)$$

где

$$I_{\pm, \mp}(\tau) = \sum_{n>0} I_{\pm, \mp}^{(n)} \tau^n \quad (2.16)$$

и

$$\begin{aligned} I_{+, -}^{(n)} &= \frac{(-1)^n (q^{-1} - q)}{[n]_q! [n-1]_q!} \oint \frac{dz}{2\pi i z} S_{f_0}^{n-1}(f_+(z)) \otimes S_{e_0}^{n-1}(e_-(z)), \\ I_{-, +}^{(n)} &= \frac{(-1)^n (q^{-1} - q)}{[n]_q! [n-1]_q!} \oint \frac{dz}{2\pi i z} S_{f_0}^{n-1}(f_-(z)) \otimes S_{e_0}^{n-1}(e_+(z)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Экранирующие операторы (скрининги) S_{e_0} и S_{f_0} определены посредством левого и правого присоединенных действий (см. ниже формулу (4.24)), которые построены по стандартной кофтовой структуре:

$$S_{e_0}(x) = e_0 x - k x k^{-1} e_0, \quad S_{f_0}(x) = x f_0 - f_0 k^{-1} x k.$$

Действие экранирующих операторов на поля $e_{\pm}(z)$ и $f_{\pm}(z)$ может быть выражено через степени этих полей:

$$S_{e_0}^{n-1}(e_{\pm}(z)) = \prod_{k=2}^n (1 - q^{2(k-1)}) e_{\pm}^n(z), \quad S_{f_0}^{n-1}(f_{\pm}(z)) = \prod_{k=2}^n (q^{-2(k-1)} - 1) f_{\pm}^n(z).$$

Дифференциальные уравнения (2.15а) и (2.15б) эквивалентны рекуррентным соотношениям на однородные компоненты $\mathcal{R}_{\pm, \mp}^{(n)}$ производящей функции $\mathcal{R}_{\pm, \mp}(\tau)$. Более того, эти уравнения имеют единственное решение как степенной ряд по параметру τ с начальным условием $\mathcal{R}_{\pm, \mp}(0) = 1 \otimes 1$.

ТЕОРЕМА 2. *Элементы $\mathcal{R}_{\pm, \mp}$ могут быть представлены как следующие ряды формальных интегралов:*

$$\mathcal{R}_{\pm, \mp} = 1 \otimes 1 + \sum_{n>0} \overline{\mathcal{R}}_{\pm, \mp}^{(n)}, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\pm, \mp}^{(n)} &= (-2\pi i)^{-n} \sum_{m=1}^n \sum_{j_1+j_2+\dots+j_m=n} C_{\pm}(j_1, j_2, \dots, j_m) \times \\ &\times \oint \dots \oint \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_m}{z_m} S_{f_0}^{j_1-1}(f_{\pm}(z_1)) \dots S_{f_0}^{j_m-1}(f_{\pm}(z_m)) \otimes \\ &\otimes S_{e_0}^{j_1-1}(e_{\mp}(z_1)) \dots S_{e_0}^{j_m-1}(e_{\mp}(z_m)), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} C_+(j_1, j_2, \dots, j_m) &= \frac{(q^{-1} - q)^m}{j_1(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + j_3) \dots (j_1 + j_2 + \dots + j_m)} \times \\ &\times \prod_{i=1}^m \frac{1}{[j_i]_q! [j_i - 1]_q!}, \\ C_-(j_1, j_2, \dots, j_m) &= \frac{(q^{-1} - q)^m}{j_m(j_m + j_{m-1})(j_m + j_{m-1} + j_{m-2}) \dots (j_m + j_{m-1} + \dots + j_1)} \times \\ &\times \prod_{i=1}^m \frac{1}{[j_i]_q! [j_i - 1]_q!}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Применяя результаты работы [21], мы можем доказать, что для интегрируемых представлений уровня $k > 0$ поля $e_{\pm}(z)$ и $f_{\pm}(z)$ аннулируются $(k + 1)$ -й степенью экранирующих операторов. Таким образом, при тех же условиях на q мы имеем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{R}$ -матрица (2.11) действует в тензорном произведении интегрируемых представлений, одно из которых имеет уровень $k > 0$. Тогда индексы суммирования j_i , $i = 1, \dots, t$, в (2.19) удовлетворяют неравенствам $1 \leq j_i \leq k$. В частности, если одно из представлений имеет уровень 1, то $\mathcal{R}$ -матрица (2.11) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{can}} = & \exp\left(\frac{q^{-1} - q}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} e_+(z) \otimes f_-(z)\right) \times \\ & \times \mathcal{K} \cdot \exp\left(\frac{q^{-1} - q}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} f_+(z) \otimes e_-(z)\right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $\mathcal{K}$ задано формулой (2.12).

3. АЛГЕБРА $U_q(\widehat{sl}_2)$ С КОУМНОЖЕНИЕМ ДРИНФЕЛЬДА

В настоящем разделе мы обсудим различные формулы для универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ с коумножением Дринфеляда. Мы опишем этот элемент в мультипликативной форме [12] и в виде контурного интеграла [15]. Мы также приведем выражение для тензора спаривания борелевских подалгебр в виде формального интеграла [13, 14].

В п. 3.1 мы опишем так называемое коумножение Дринфеляда, которое естественным образом появляется в “новой реализации”. Затем мы исследуем хопфово спаривание между соответствующими борелевскими подалгебрами и напомним мультипликативное выражение для универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы, которое диагонализует это спаривание [12]. В таком виде универсальная $\mathcal{R}$ -матрица может действовать в тензорном произведении представлений старшего или младшего весов.

Затем мы напомним конструкцию из работы [15] для представления универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы в виде контурного интеграла. Такое описание требует использования естественного пополнения алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$, так что соответствующая универсальная $\mathcal{R}$ -матрица может действовать только в тензорном произведении представлений старшего веса. Хотя такой элемент не может быть факторизован нужным образом, дифференциальное уравнение [16] на него будет исключительно важно в дальнейшем.

Наконец, мы обсудим представление [13, 14] тензора спаривания в виде формального интеграла. Мы отметим некоторые delicate моменты в структуре этого представления. Оно имеет смысл только под знаком специального нормального упорядочения, которое позволяет применять формальный интеграл к тензорному произведению представлений младшего и старшего весов. Вследствие этой асимметрии имеются трудности в использовании формального интеграла в качестве фактора универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы с действием в некоторой тензорной категории модулей. В то же время его факторизация в произведение двух коциклов имеет смысл.

3.1. Универсальная $\mathcal{R}$ -матрица в мультипликативной форме. В работе [2] квантовые аффинные алгебры были построены при помощи конструкции квантового дубля с коумножением, отличным от заданного формулами (2.4). Так называемая хопфова структура Дринфеляда имеет следующее представление в производящих функциях:

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}e(z) &= e(z) \otimes 1 + \psi^-(zq^{\frac{c_1}{2}}) \otimes e(zq^{c_1}), \\ \Delta^{(1)}f(z) &= 1 \otimes f(z) + f(zq^{c_2}) \otimes \psi^+(zq^{\frac{c_2}{2}}), \\ \Delta^{(1)}\psi^\pm(z) &= \psi^\pm(zq^{\pm\frac{c_2}{2}}) \otimes \psi^\pm(zq^{\mp\frac{c_1}{2}}), \\ a^{(1)}(e(z)) &= -(\psi^-(zq^{-\frac{c}{2}}))^{-1}e(zq^{-c}), \quad a^{(1)}(f(z)) = -f(zq^{-c})(\psi^+(zq^{-\frac{c}{2}}))^{-1}, \\ a^{(1)}(\psi^\pm(z)) &= (\psi^\pm(z))^{-1}, \quad a^{(1)}(c) = -c, \quad a^{(1)}(d) = -d, \\ \varepsilon(c) = \varepsilon(d) &= \varepsilon(e(z)) = \varepsilon(f(z)) = 0, \quad \varepsilon(\psi^\pm(z)) = 1.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Существуют две хопфовы структуры Дринфеляда, этим объясняются наши обозначения $\Delta^{(1)}$, $a^{(1)}$ в (3.1) для отображений коумножения и антипода. Отображения коединицы совпадают во всех хопфовых структурах, рассматриваемых в настоящей работе, поэтому мы не вводим для них различных обозначений. Вторая структура задается формулами

$$\begin{aligned}\Delta^{(2)}e(z) &= e(z) \otimes 1 + \psi^+(zq^{-\frac{c_1}{2}}) \otimes e(zq^{-c_1}), \\ \Delta^{(2)}f(z) &= 1 \otimes f(z) + f(zq^{-c_2}) \otimes \psi^-(zq^{-\frac{c_2}{2}}), \\ a^{(2)}(e(z)) &= -(\psi^+(zq^{\frac{c}{2}}))^{-1}e(zq^c), \quad a^{(2)}(f(z)) = -f(zq^c)(\psi^-(zq^{\frac{c}{2}}))^{-1},\end{aligned}\tag{3.2}$$

а все остальные отображения такие же, как в (3.1).

Чтобы воспользоваться конструкцией квантового дубля, необходимо разложить исследуемую алгебру в две борелевские подалгебры, соответствующие заданной хопфовой структуре. Это разложение для хопфовой структуры (3.1) имеет следующий вид²⁾: $U_F = \{f(z), \psi^+(z), c, d\}$ и $U_E = \{e(z), \psi^-(z), c, d\}$. Спаривание этих дуальных подалгебр может быть восстановлено из сравнения общего умножения в квантовом дубле с коммутационными соотношениями (2.6и) и (2.6з). Нетривиальными спариваниями между генераторами являются $\langle c, d \rangle = \langle d, c \rangle = 1$ и (в терминах формальных рядов)

$$\langle f(w), e(z) \rangle = \frac{1}{q^{-1} - q} \delta\left(\frac{z}{w}\right),\tag{3.3}$$

$$\langle \psi^+(w), \psi^-(z) \rangle = g\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{q^2 - z/w}{1 - q^2 z/w} = q^2 + (q^2 - q^{-2}) \sum_{k>0} q^{2k} \frac{z^k}{w^k}.\tag{3.4}$$

²⁾ Как обычно, в этом подходе следует начать с двух копий генераторов Картана c, d и $\psi_0^\pm$ в двух дуальных подалгебрах. Эти копии затем отождествляются посредством факторизации дубля по центральному примитивным элементам. Отражением этого является соотношение $\psi_0^+ = (\psi_0^-)^{-1}$.

Спаривания (3.3) и (3.4) $U_F \otimes U_E \rightarrow \mathbb{C}$ являются хопфовыми спариваниями, удовлетворяющими следующему свойству:

$$\langle k_1 f, k_2 e \rangle = \langle k_1, k_2 \rangle \langle f, e \rangle \quad (3.5)$$

для любых $k_1 \in K_+$, $k_2 \in K_-$, $f \in U_f$, $e \in U_e$. Здесь $K_{\pm}$ – подалгебры, порожденные $q^{\pm h}$, a_n с соответственно $n \geq 0$ и $n \leq 0$, U_f и U_e – нильпотентные подалгебры в U_F и U_E , порожденные только модами соответственно f_n и e_n , $n \in \mathbb{Z}$. Свойство (3.5) означает, что универсальная $\mathcal{R}$ -матрица, отвечающая коумножению $\Delta^{(1)}$, будет иметь факторизованный вид:

$$\mathcal{R} = \mathcal{K} \cdot \overline{\mathcal{R}}, \quad (3.6)$$

где элемент $\mathcal{K}$ задан соотношением (2.12).

Для того чтобы описать элемент $\overline{\mathcal{R}}$, необходимо рассмотреть ограничение спариваний (3.3) и (3.4) на дуальные подалгебры U_f и U_e . Это ограничение может быть получено индуктивно, оно имеет вид

$$\begin{aligned} \langle f(z_1) \dots f(z_n), e(w_1) \dots e(w_n) \rangle = \\ = (q^{-1} - q)^{-n} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_k \delta\left(\frac{z_k}{w_{\sigma(k)}}\right) \prod_{\substack{k < l \\ \sigma(k) > \sigma(l)}} g\left(\frac{z_k}{z_l}\right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где ряд $g(z)$ задан формулой (3.4) и S_n является группой перестановок n элементов. Хопфово спаривание между U_e и U_f , отвечающее коумножению $\Delta^{(2)}$, имеет аналогичную форму (см. (3.10) ниже).

Элемент $\overline{\mathcal{R}}$ в мультипликативной форме имеет вид [12]

$$\overline{\mathcal{R}} = \prod_{n \in \mathbb{Z}}^{\rightarrow} \exp_{q^2} \left((q^{-1} - q) f_{-n} \otimes e_n \right), \quad (3.8)$$

где

$$\exp_{q^2}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{1 + q^2} + \frac{x^3}{(1 + q^2)(1 + q^2 + q^4)} + \dots + \frac{x^n}{(n)_{q^2}!} + \dots \quad (3.9)$$

и $(a)_{q^2} = (q^{2a} - 1)/(q^2 - 1)$. В терминах спаривания формула (3.8) эквивалентна соотношениям

$$\langle f_{-n_1}^{k_1} \dots f_{-n_s}^{k_s}, e_{m_1}^{l_1} \dots e_{m_s}^{l_s} \rangle = \prod_i \delta_{n_i, m_i} \cdot \delta_{k_i, l_i} \cdot (q^{-1} - q)^{k_i} (k_i)_{q^2}!$$

для всех $n_1 < \dots < n_s$, $m_1 < \dots < m_s$, которые могут быть получены из (3.7) по индукции.

Следует отметить, что порядок q -экспонент в (3.8) обеспечивает порядок мод f_n в первом тензорном пространстве, упорядоченных по невозрастающему индексу, тогда как моды e_n во втором тензорном пространстве упорядочены по неубывающему индексу. Таким образом, элемент $\overline{\mathcal{R}}$ принадлежит пополненному тензорному произведению

нильпотентных подалгебр U_f и U_e такому, что элемент (3.8) является хорошо определенным оператором в тензорном произведении представлений, из которых первое младшего веса, а второе произвольное, или в тензорном произведении представлений, из которых второе старшего веса, а первое произвольное.

Отличительной чертой спаривания (3.7), которая следует из формулы (3.8), является возможность упорядочить произвольный моном, составленный из образующих e_n , в виде суммы мономов $e_{k_1} \dots e_{k_n}$ с неубывающими индексами k_i , $k_1 \leq \dots \leq k_n$. Аналогично произвольный моном, составленный из образующих f_n , можно представить в виде суммы мономов $f_{l_1} \dots f_{l_n}$ с невозрастающими индексами l_i , $l_1 \geq \dots \geq l_n$. Для упорядочения в противоположных направлениях необходимо использовать спаривание, отвечающее коумножению $\Delta^{(2)}$,

$$\begin{aligned} \langle e(w_1) \dots e(w_n), f(z_1) \dots f(z_n) \rangle^{(2)} = \\ = (q - q^{-1})^{-n} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_k \delta\left(\frac{z_k}{w_{\sigma(k)}}\right) \prod_{\substack{k < l \\ \sigma(k) > \sigma(l)}} g'\left(\frac{z_l}{z_k}\right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$g'(z) = \frac{q^{-2} - z}{1 - q^{-2}z} = q^{-2} + (q^{-2} - q^2) \sum_{k > 0} q^{-2k} z^k. \quad (3.11)$$

Применение этой техники приведено в приложении.

3.2. Интегральное представление элемента $\overline{\mathcal{R}}'$ и фундаментальное дифференциальное уравнение. Общим местом теории представлений старшего (младшего) веса алгебр Каца–Мути является расширение этих представлений до представлений бóльшей алгебры. Эта алгебра может быть определена как пополнение относительно минимальной топологии, совместной с действием в представлениях старшего веса [15]. Так как мы интересуемся действием подалгебр U_e и U_f по отдельности, эти пополнения могут быть определены достаточно явно, а именно пополненные алгебры $\overline{U}_e^<$ и $\overline{U}_f^<$, действующие в представлениях старшего веса, порождены линейным пространством рядов, составленных из упорядоченных мономов $e_{k_1} \dots e_{k_l}$ и $f_{k_1} \dots f_{k_l}$, где $k_1 \leq \dots \leq k_l$ и сумма $\sum_i k_i$ фиксирована. Аналогично для пополненных подалгебр $\overline{U}_e^>$ и $\overline{U}_f^>$, действующих в представлениях младшего веса, мы используем ряды из мономов, упорядоченных в противоположном направлении.

Следующее представление для универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы, лежащее в пополненном тензорном произведении $\overline{U}_f^< \otimes \overline{U}_e^<$, было построено в работе [15]:

$$\mathcal{R}' = \mathcal{K} \cdot \overline{\mathcal{R}}', \quad (3.12)$$

где $\mathcal{K}$ совпадает с (2.12) и

$$\overline{\mathcal{R}}' = 1 + \sum_{n > 0} \frac{1}{n!(2\pi i)^n} \oint \dots \oint_{D_n} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n} t(z_1) \dots t(z_n). \quad (3.13)$$

Здесь

$$t(z) = (q^{-1} - q)f(z) \otimes e(z) \quad (3.14)$$

и D_n является n -мерным тором $|z_i| = 1$ для $|q| > 1$. Для произвольного значения параметра деформации q такого, что $q^N \neq 1$, $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, D_n является n -циклом

$$\left| z_i \prod_{j=1, \dots, n, j \neq i} (z_i - q^2 z_j) \right| = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

и подынтегральное выражение понимается как аналитическое продолжение произведения $t(z_1) \dots t(z_n)$ из области $|z_1| \gg |z_2| \gg \dots \gg |z_n|$ [16].

Результаты настоящей работы основаны на следующем результате.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [16]. 1. Действие $\mathcal{R}$ -матрицы (3.12) в тензорном произведении модулей старшего веса хорошо определено и совпадает с действием $\mathcal{R}$ -матрицы (3.6).

2. Элемент $\overline{\mathcal{R}}'(\tau) = \tau^{-d_\alpha \otimes 1} \overline{\mathcal{R}}' \tau^{d_\alpha \otimes 1}$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\tau \frac{d\overline{\mathcal{R}}'(\tau)}{d\tau} = \overline{\mathcal{R}}'(\tau) \cdot I(\tau) = I(\tau) \cdot \overline{\mathcal{R}}'(\tau). \quad (3.15)$$

Здесь производящий ряд $I(\tau)$ также принадлежит тензорному произведению пополнений $\overline{U}_f^< \otimes \overline{U}_e^<$, являясь, таким образом, хорошо определенным оператором в тензорном произведении представлений старшего веса. Коэффициентами формального ряда

$$I(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} I^{(n)} \tau^n \quad (3.16)$$

являются коммутирующие величины

$$I^{(n)} = \frac{(q - q^{-1})(-1)^n}{[n-1]_q! [n]_q!} \oint \frac{dz}{2\pi i z} f^{(n)}(z) \otimes e^{(n)}(z), \quad (3.17)$$

построенные из сложных токов

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= (q^{-1} - q)^{n-1} [n]_q! [n-1]_q! f(q^{2(n-1)}z) f(q^{2(n-2)}z) \dots f(z), \\ e^{(n)}(z) &= (q - q^{-1})^{n-1} [n]_q! [n-1]_q! e(q^2z) e(q^2z) \dots e(q^{2(n-1)}z) \end{aligned} \quad (3.18)$$

(их определения через многократные вычеты даны ниже, см. (4.23)). Сложные токи могут быть получены индуктивно как вычеты от произведений предшествующих токов и по конструкции являются элементами пополнений $\overline{U}_{f,e}^<$. Коммутативность нулевых мод тензоров

$$t^{(n)}(z) = \frac{(q - q^{-1})(-1)^n}{[n-1]_q! [n]_q!} f^{(n)}(z) \otimes e^{(n)}(z) \quad (3.19)$$

следует из коммутационного соотношения

$$[t^{(n)}(z_1), t^{(m)}(z_2)] = \delta \left(\frac{q^{2n} z_1}{z_2} \right) t^{(n+m)}(z_1) - \delta \left(\frac{q^{-2m} z_1}{z_2} \right) t^{(n+m)}(z_2). \quad (3.20)$$

Благодаря этой коммутативности дифференциальное уравнение может быть легко решено:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{R}}' &= \exp \left(\sum_{n>0} \frac{I^{(n)}}{n} \right) = \\ &= \exp \left((q - q^{-1}) \sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n [n-1]_q! [n]_q!} \oint \frac{dz}{2\pi i z} f^{(n)}(z) \otimes e^{(n)}(z) \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.3. Тензор спаривания как формальный интеграл. Содержание настоящего пункта основано на результатах работ [13, 14].

В пополнениях $\overline{U}_e^<, \overline{U}_e^>, \overline{U}_f^< \text{ и } \overline{U}_f^>$ определяющие соотношения для полных токов могут быть усилены.

ЛЕММА 1. 1. В алгебрах $\overline{U}_e^< \text{ и } \overline{U}_f^<$ имеют место следующие тождества между формальными степенными рядами:

$$\begin{aligned} e(z_1) \dots e(z_n) &= \prod_{k < l} g\left(\frac{z_l}{z_k}\right) e(z_n) \dots e(z_1), \\ f(z_1) \dots f(z_n) &= \prod_{k < l} g'\left(\frac{z_l}{z_k}\right) f(z_n) \dots f(z_1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

2. Аналогичные тождества в алгебрах $\overline{U}_f^> \text{ и } \overline{U}_e^>$ имеют вид

$$\begin{aligned} e(z_1) \dots e(z_n) &= \prod_{k < l} g'\left(\frac{z_k}{z_l}\right) e(z_n) \dots e(z_1), \\ f(z_1) \dots f(z_n) &= \prod_{k < l} g\left(\frac{z_k}{z_l}\right) f(z_n) \dots f(z_1), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $g(z)$ и $g'(z)$ заданы рядами (3.4) и (3.11), соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы может быть доказано с использованием явной формулы для спаривания (3.7). Например, спаривание (3.7) может быть продолжено по непрерывности до спаривания $\overline{U}_e^<$ с U_f . Тогда

$$\begin{aligned} (q^{-1} - q)^2 \left\langle f(w_1)f(w_2), e(z_1)e(z_2) - g\left(\frac{z_2}{z_1}\right)e(z_2)e(z_1) \right\rangle &= \\ &= \delta\left(\frac{z_1}{w_1}\right)\delta\left(\frac{z_2}{w_2}\right) + g\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\delta\left(\frac{z_2}{w_1}\right)\delta\left(\frac{z_1}{w_2}\right) - \\ &- g\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\left[\delta\left(\frac{z_2}{w_1}\right)\delta\left(\frac{z_1}{w_2}\right) + g\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\delta\left(\frac{z_1}{w_1}\right)\delta\left(\frac{z_2}{w_2}\right)\right] \equiv 0, \end{aligned}$$

где обращение в нуль обеспечено функциональным соотношением $g(z)g(z^{-1}) = 1$. Заметим, что для второго и третьего тождеств (3.22), (3.23) надо использовать хопфово спаривание (3.10), согласованное с коумножением $\Delta^{(2)}$.

Рассмотрим формальный интеграл

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{R}}'' &= : \exp\left(\oint \frac{dz}{2\pi z} t(z)\right) : = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(q^{-1} - q)^n}{n!(2\pi i)^n} : \oint \dots \oint \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n} f(z_1) \dots f(z_n) \otimes e(z_1) \dots e(z_n) :. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Обозначение $: \dots :$ означает следующее упорядочение результата формального интегрирования: мономы, составленные из образующих e_n , представляются суммой мономов

$e_{k_1} \dots e_{k_n}$ с неубывающими индексами k_i , $k_1 \leq \dots \leq k_n$, аналогично мономы, составленные из образующих f_n , представляются суммами мономов $f_{l_1} \dots f_{l_n}$ с невозрастающими индексами l_i , $l_1 \geq \dots \geq l_n$. Эта процедура хорошо определена только для $|q| < 1$, так как результирующие коэффициенты содержат суммирования геометрических последовательностей. По конструкции элемент $\overline{\mathcal{R}}''$ принадлежит пополненному тензорному произведению $\overline{U}_f^>$ и $\overline{U}_e^<$.

ЛЕММА 2. Для любых $x \in \overline{U}_f^>$ и $y \in \overline{U}_e^<$ имеют место равенства

$$\langle \overline{\mathcal{R}}'', x \otimes 1 \rangle = x, \quad \langle \overline{\mathcal{R}}'', 1 \otimes y \rangle = y. \quad (3.25)$$

Вычислим, например, $\langle \overline{\mathcal{R}}'', e(z_1)e(z_2) \otimes 1 \rangle$. Используя формулы спаривания, после интегрирования δ -функций имеем

$$\langle \overline{\mathcal{R}}'', e(z_1)e(z_2) \otimes 1 \rangle = \frac{1}{2} \left(e(z_1)e(z_2) + g\left(\frac{z_2}{z_1}\right)e(z_2)e(z_1) \right),$$

что эквивалентно $e(z_1)e(z_2)$ в силу леммы 1. Согласно лемме 2 мы можем использовать элемент $\overline{\mathcal{R}}''$ как тензор спаривания между $\overline{U}_f^>$ и $\overline{U}_e^<$. Более того, как мы увидим далее, он действительно совпадает с (3.8), поэтому для элемента $\overline{\mathcal{R}}''$ мы будем использовать обозначение $\overline{\mathcal{R}}$. Тем не менее исходное выражение (3.24) позволяет определить действие элемента $\overline{\mathcal{R}}''$ только к тензорному произведению представлений младшего и старшего весов. Квантовый дубль, включающий $\overline{U}_f^>$ и $\overline{U}_e^<$ в качестве своих дуальных хопфовых подалгебр, также не определен достаточно хорошо из-за расхождений. Таким образом, элемент (3.24) удобнее рассматривать не как часть универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы, а только как тензор спаривания.

4. ФАКТОРИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ $\mathcal{R}$ -МАТРИЦЫ

Как мы уже упоминали во введении, нашей целью является разложение сомножителя $\overline{\mathcal{R}}$ универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы (3.6), соответствующей коумножению Дринфелда, в произведение двух коциклов, которые могут быть использованы для восстановления канонического коумножения (2.4) и соответствующей $\mathcal{R}$ -матрицы [13, 14]. Для мультипликативного представления элемента $\overline{\mathcal{R}}$ (3.8) такая факторизация проста: $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_{+,-} \cdot \mathcal{R}_{-,+}$, где $\mathcal{R}_{+,-}$ содержит произведение q -экспонент $\exp_{q^2}((q^{-1} - q)f_{-n} \otimes e_n)$ для $n < 0$, а $\mathcal{R}_{-,+}$ содержит произведение q -экспонент для $n \geq 0$. В результате универсальная $\mathcal{R}$ -матрица для канонического коумножения имеет вид [22]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{can}} &= \mathcal{R}_{-,+}^{21} \cdot \mathcal{K} \cdot \mathcal{R}_{+,-} = \prod_{n \geq 0} \exp_{q^2}((q^{-1} - q)e_n \otimes f_{-n}) \times \\ &\times \mathcal{K} \cdot \prod_{n > 0}^{\leftarrow} \exp_{q^2}((q^{-1} - q)f_n \otimes e_{-n}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Нашей целью является развитие техники факторизации, применимой в случае, если мультипликативные представления для универсальных $\mathcal{R}$ -матриц отсутствуют. Такая

факторизация основана на последовательном использовании определенных проекционных операторов с (токовых) борелевских подалгебр на их ортогональные подалгебры, построенных в работах [13, 14]. Краткое изложение этих результатов приведено в п. 4.1, а их применение к интересующим нас тензорам – в п. 4.2.

Проекции контурных интегралов $\overline{\mathcal{R}}'$ не определены, однако в п. 4.3 отмечено, что проекции логарифмических производных от элемента $\overline{\mathcal{R}}'$ имеют смысл, и мы используем их для вывода дифференциального уравнения, определяющего факторы $\mathcal{R}_{\pm, \mp}$ единственным образом. Основная техническая проблема сводится к вычислению проекций от сложных токов, входящих в дифференциальное уравнение для элемента $\overline{\mathcal{R}}'$. Эта проблема решена в п. 4.4 с помощью экранирующих операторов (скринингов). Эти вычисления завершают доказательства основных теорем.

4.1. Биортогональные разложения алгебр Хопфа. Пусть $\mathcal{A}$ – биалгебра с единицей и коединицей, а $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – ее подалгебры, удовлетворяющие следующим условиям:

1) алгебра $\mathcal{A}$ допускает разложение $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2$ такое, что отображение умножения

$$\mu: \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A} \quad (4.2)$$

осуществляет изоморфизм линейных пространств;

2) подалгебра $\mathcal{A}_1$ является левым коидеалом, а $\mathcal{A}_2$ – правым коидеалом:

$$\Delta(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_1, \quad \Delta(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}. \quad (4.3)$$

Тогда операторы

$$P_{\mathcal{A}}^1: P_{\mathcal{A}}^1(a_1 a_2) = a_1 \varepsilon(a_2), \quad P_{\mathcal{A}}^2: P_{\mathcal{A}}^2(a_1 a_2) = \varepsilon(a_1) a_2, \quad a_1 \in \mathcal{A}_1, \quad a_2 \in \mathcal{A}_2,$$

где ε есть отображение коединицы, являются хорошо определенными проекционными операторами из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}_i$, удовлетворяющими свойству

$$\mu(P_{\mathcal{A}}^1 \otimes P_{\mathcal{A}}^2) \Delta(a) = a \quad (4.4)$$

для любого $a \in \mathcal{A}$. В обозначениях Свидлера свойство (4.4) означает, что

$$P_{\mathcal{A}}^1(a') P_{\mathcal{A}}^2(a'') = a.$$

Корректность определения проекций $P_{\mathcal{A}}^i$ следует из условия 1. Обозначим через $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ линейное отображение $\phi(a) = P_{\mathcal{A}}^1(a') P_{\mathcal{A}}^2(a'')$. Утверждается, что ϕ есть отображение левых $\mathcal{A}_1$ -модулей и правых $\mathcal{A}_2$ -модулей, т.е. $\phi(a_1 a) = a_1 \phi(a)$ и $\phi(a a_2) = \phi(a) a_2$. Действительно, для любых $a_1 \in \mathcal{A}_1$, $a \in \mathcal{A}$ имеем

$$\phi(a_1 a) = P_{\mathcal{A}}^1(a'_1 a') P_{\mathcal{A}}^2(a''_1 a'').$$

Из (4.3) мы знаем, что $a''_1 \in \mathcal{A}_1$, поэтому $P_{\mathcal{A}}^2(a''_1 a'') = \varepsilon(a''_1) P_{\mathcal{A}}^2(a'')$ и

$$\phi(a_1 a) = P_{\mathcal{A}}^1(a'_1 \varepsilon(a''_1) a') P_{\mathcal{A}}^2(a'') = P_{\mathcal{A}}^1(a_1 a') P_{\mathcal{A}}^2(a'') = a_1 P_{\mathcal{A}}^1(a') P_{\mathcal{A}}^2(a'') = a_1 \phi(a).$$

Аналогичным образом можно доказать, что $\phi(aa_2) = \phi(a)a_2$. Заметив, что $\phi(1) = 1$, мы заключаем, что $\phi(a) = a$ для любого $a \in \mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – бигалгебра, дуальная к $\mathcal{A}$ с противоположным коумножением, $\mathcal{B} \equiv (\mathcal{A}^*)^{\text{op}}$, т.е. задано невырожденное хопфово спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям

$$\langle a, b_1 b_2 \rangle = \langle \Delta(a), b_1 \otimes b_2 \rangle, \quad \langle a_1 a_2, b \rangle = \langle a_2 \otimes a_1, \Delta(b) \rangle.$$

Пусть $\mathcal{R} = \sum a^\alpha \otimes b_\alpha$ – соответствующий тензор спаривания. Положим $\mathcal{R}_i = (P_{\mathcal{A}}^i \otimes \text{id})\mathcal{R}$. Тожество (4.4) приводит к факторизации тензора спаривания

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_2. \quad (4.5)$$

Действительно, тензор $\mathcal{R}$ однозначно определяется свойствами

$$\langle \mathcal{R}, b \otimes 1 \rangle = b \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad \langle \mathcal{R}, 1 \otimes a \rangle = a \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Покажем, что $\langle \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2, 1 \otimes a \rangle = a$ для любого $a \in \mathcal{A}$. В силу определения $\mathcal{R}_i$

$$\langle \mathcal{R}_i, 1 \otimes a \rangle = \langle (P_{\mathcal{A}}^i \otimes \text{id})\mathcal{R}, 1 \otimes a \rangle = P_{\mathcal{A}}^i \langle \mathcal{R}, 1 \otimes a \rangle = P_{\mathcal{A}}^i(a).$$

Тогда, используя тождество (4.4), получаем

$$\langle \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2, 1 \otimes a \rangle = \langle \mathcal{R}_1, 1 \otimes a' \rangle \langle \mathcal{R}_2, 1 \otimes a'' \rangle = P_{\mathcal{A}}^1(a') P_{\mathcal{A}}^2(a'') = a.$$

Это доказывает справедливость (4.5).

Можно получить факторизацию элемента $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}_2 \tilde{\mathcal{R}}_1$, начав с разложения $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2$ в произведение двух подалгебр, которые суть правый и левый коидеалы в $\mathcal{B}$ (так как в спаривании используется противоположное коумножение): $\Delta(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}$, $\Delta(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_2$, и используя $\tilde{\mathcal{R}}_i = (1 \otimes P_{\mathcal{B}}^i)\mathcal{R}$, где $P_{\mathcal{B}}^1(b_1 b_2) = b_1 \varepsilon(b_2)$, $P_{\mathcal{B}}^2(b_1 b_2) = b_2 \varepsilon(b_1)$. Представляется естественным выяснить, при каких условиях эти две факторизации приводят к одинаковому результату, т.е. $\mathcal{R}_1 = \tilde{\mathcal{R}}_1$, $\mathcal{R}_2 = \tilde{\mathcal{R}}_2$. Эти условия содержит следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Факторизация тензора спаривания, индуцированная разложением алгебры $\mathcal{A}$, совпадает с факторизацией, индуцированной разложением алгебры $\mathcal{B}$, если $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{B}_j$ являются взаимно ортогональными, т.е.*

$$\langle a_i, b_j \rangle = \varepsilon(a_i) \varepsilon(b_j) \quad \forall a_i \in \mathcal{A}_i, \quad \forall b_j \in \mathcal{B}_j, \quad i \neq j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, можно вычислить $\langle \mathcal{R}_1, b \otimes a \rangle$ и $\langle \tilde{\mathcal{R}}_1, b \otimes a \rangle$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Мы получим

$$\langle \mathcal{R}_1, b_1 b_2 \otimes a_1 a_2 \rangle = \langle a_1 \varepsilon(a_2), b_1 b_2 \rangle = \varepsilon(a_2) \langle a'_1, b_1 \rangle \langle a''_1, b_2 \rangle.$$

Тогда с учетом того, что $a''_1 \in \mathcal{A}_1$, имеем

$$\langle \mathcal{R}_1, b_1 b_2 \otimes a_1 a_2 \rangle = \varepsilon(a_2) \varepsilon(b_2) \langle a'_1 \varepsilon(a''_1), b_1 \rangle = \varepsilon(a_2) \varepsilon(b_2) \langle a_1, b_1 \rangle.$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\mathcal{R}}_1, b_1 b_2 \otimes a_1 a_2 \rangle &= \langle a_1 a_2, b_1 \varepsilon(b_2) \rangle = \varepsilon(b_2) \langle a_1, b_1'' \rangle \langle a_2, b_1' \rangle = \\ &= \varepsilon(a_2) \varepsilon(b_2) \langle a_1, b_1'' \varepsilon(b_1') \rangle = \varepsilon(a_2) \varepsilon(b_2) \langle a_1, b_1 \rangle,\end{aligned}$$

так как $b_1' \in \mathcal{B}_1$. Отсюда видно, что $\mathcal{R}_1 = \tilde{\mathcal{R}}_1$. Аналогично доказывается равенство $\mathcal{R}_2 = \tilde{\mathcal{R}}_2$. В дальнейшем мы будем называть разложения $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2$, удовлетворяющие указанным выше условиям, биортогональными разложениями $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \equiv (\mathcal{A}^*)^{\text{ор}}$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ – алгебра Хопфа, и элемент $\mathcal{R}$ рассматривается как элемент из тензорного квадрата ее квантового дубля $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда для любого биортогонального разложения тензоры $\mathcal{R}_2$ и $(\mathcal{R}_1^{21})^{-1}$, где $\mathcal{R}_i = (P_{\mathcal{A}}^i \otimes 1)\mathcal{R} = (1 \otimes P_{\mathcal{A}}^i)\mathcal{R} \in \mathcal{A}_i \otimes \mathcal{B}_i = (P_{\mathcal{A}}^i \otimes P_{\mathcal{A}}^i)\mathcal{R}$, являются 2-коциклами в дубле $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, т.е.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2^{12} \cdot (\Delta \otimes 1)\mathcal{R}_2 &= \mathcal{R}_2^{23} \cdot (1 \otimes \Delta)\mathcal{R}_2, \\ (\Delta' \otimes 1)\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_1^{12} &= (1 \otimes \Delta')\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_1^{23}.\end{aligned}$$

Действительно, левые и правые части этих равенств принадлежат $\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{D}(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{B}_2$. С другой стороны,

$$(\Delta' \otimes 1)\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_1^{12} \cdot \mathcal{R}_2^{12} \cdot (\Delta \otimes 1)\mathcal{R}_2 = (1 \otimes \Delta')\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_1^{23} \cdot \mathcal{R}_2^{23} \cdot (1 \otimes \Delta)\mathcal{R}_2$$

в силу свойств универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы, коассоциатор

$$\Phi = \mathcal{R}_2^{12} \cdot (\Delta \otimes 1)\mathcal{R}_2 \cdot (\mathcal{R}_2^{23} \cdot (1 \otimes \Delta)\mathcal{R}_2)^{-1}$$

может быть представлен в виде

$$\Phi = ((\Delta' \otimes 1)\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_1^{12})^{-1} \cdot (1 \otimes \Delta')\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_1^{23},$$

и, таким образом, он принадлежит пересечению $\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{D}(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{B}_2$ и $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{D}(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{B}_1$, а это означает, что он имеет вид $1 \otimes d \otimes 1$ для некоторого $d \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда тождество пятиугольника для Φ утверждает, что нетривиального коассоциатора такого вида не существует.

4.2. Применение к алгебре $U_q(\widehat{sl}_2)$. Пусть U_F^+ – подалгебра в U_F , порожденная элементами a_n, f_n , $n > 0$ и q^h , а U_f^- – подалгебра в $U_f \subset U_F$, порожденная f_n , $n \leq 0$. Мы выбираем их в качестве $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Соответствующие проекторы обозначим P_f^{+*} и P_f^{-*} . Пусть также U_E^- – подалгебра в U_E , порожденная элементами a_n, e_n , $n < 0$, а U_e^+ – подалгебра в $U_e \subset U_E$, порожденная элементами e_n , $n \geq 0$. Выберем их в качестве $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$. Соответствующие проекторы обозначим P_e^- и P_e^+ :

$$P_f^{+*}(a_1 a_2) = a_1 \varepsilon(a_2), \quad P_f^{-*}(a_1 a_2) = \varepsilon(a_1) a_2, \quad a_1 \in U_F^+, \quad a_2 \in U_f^-, \quad (4.6)$$

$$P_e^-(a_1 a_2) = a_1 \varepsilon(a_2), \quad P_e^+(a_1 a_2) = \varepsilon(a_1) a_2, \quad a_1 \in U_E^-, \quad a_2 \in U_e^+. \quad (4.7)$$

Как следует из определения открытых подмножеств в $\overline{U}_F^>$ и $\overline{U}_E^<$ [16], проекции достаточно малых открытых окрестностей нуля равны нулю. Это означает, что данные проекции могут быть также определены для пополненных пространств:

$$P_f^{+*}: \overline{U}_F^> \rightarrow U_F^+, \quad P_f^{-*}: \overline{U}_F^> \rightarrow U_f^-, \quad P_e^+: \overline{U}_E^< \rightarrow U_e^+, \quad P_e^-: \overline{U}_E^< \rightarrow U_E^-. \quad (4.8)$$

Подалгебры U_F^+ , U_f^- , U_E^- , U_e^+ и соответствующие проекторы (4.6) и (4.7) удовлетворяют всем условиям биортогонального разложения и могут быть применены к факторизации тензора спаривания $\mathcal{K} \cdot \overline{\mathcal{R}}$. Благодаря свойству хопфова спаривания (3.5) факторизация (4.5) в таком случае имеет вид

$$\mathcal{K} \cdot \overline{\mathcal{R}} = \mathcal{K} \cdot \mathcal{R}_{+,-} \cdot \mathcal{R}_{-,+}, \quad (4.9)$$

где

$$\mathcal{R}_f^{\pm, \mp} = (P_{\pm*} \otimes 1) \overline{\mathcal{R}} = (1 \otimes P_e^{\mp}) \overline{\mathcal{R}} = (P_f^{\pm*} \otimes P_e^{\mp}) \overline{\mathcal{R}}. \quad (4.10)$$

Она совпадает с естественной факторизацией мультипликативного выражения для универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы (4.1).

Так как проекции могут быть продолжены на пополненные (в разных направлениях) подалгебры (4.8), применение проекций $(P_f^{\pm*} \otimes P_e^{\mp})$ к тензору (3.24) хорошо определено, и мы можем повторить конструкцию факторизации, изложенную в п. 4.1. Таким образом, можно получить тождество $\overline{\mathcal{R}}'' = \mathcal{R}_{+,-}'' \mathcal{R}_{-,+}''$, где $\mathcal{R}_{\pm, \mp}''$ принадлежат тем же подалгебрам, что и элементы $\mathcal{R}_{\pm, \mp}$, и удовлетворяют аналогичным свойствам спаривания элементов из дуальных подалгебр. Тем самым они совпадают, и, следовательно, $\overline{\mathcal{R}}'' = \overline{\mathcal{R}}$. По этой причине далее мы будем использовать обозначение $\overline{\mathcal{R}}$ для элемента $\overline{\mathcal{R}}''$.

В дальнейшем нам понадобится другая пара проекционных операторов, связанных с коумножением $\Delta^{(2)}$. Их ограничение на подалгебры U_f и U_e может быть определено следующим образом. Пусть U_f^+ – подалгебра U_f , порожденная элементами f_n , $n > 0$, и U_e^- – подалгебра U_e , порожденная элементами e_n , $n < 0$. Определим проекции на эти подалгебры:

$$P_f^-(a_1 a_2) = a_1 \varepsilon(a_2), \quad P_f^+(a_1 a_2) = \varepsilon(a_1) a_2, \quad a_1 \in U_f^-, \quad a_2 \in U_f^+, \quad (4.11)$$

$$P_e^{+*}(a_1 a_2) = a_1 \varepsilon(a_2), \quad P_e^{-*}(a_1 a_2) = \varepsilon(a_1) a_2, \quad a_1 \in U_e^+, \quad a_2 \in U_e^-. \quad (4.12)$$

Как и ранее, они могут быть продолжены на соответствующие пополненные подалгебры.

Вычисление проекций от произведения токов может быть проведено при помощи коммутационных соотношений между производящими функциями $e_{\pm}(z)$ и $f_{\pm}(z)$:

$$\begin{aligned} e_{\pm}(z_1) e_{\pm}(z_2) &= g(z^{-1}) e_{\pm}(z_2) e_{\pm}(z_1) + \psi(z^{-1}) (z^{-1} e_{\pm}^2(z_1) + e_{\pm}^2(z_2)), \\ e_{\pm}(z_1) e_{\pm}(z_2) &= g'(z) e_{\pm}(z_2) e_{\pm}(z_1) + \psi'(z) (e_{\pm}^2(z_1) + z e_{\pm}^2(z_2)), \\ e_+(z_1) e_-(z_2) &= g(z^{-1}) e_-(z_2) e_+(z_1) + \psi(z^{-1}) (z^{-1} e_+^2(z_1) + e_-^2(z_2)), \\ e_-(z_1) e_+(z_2) &= g'(z) e_+(z_2) e_-(z_1) + \psi'(z) (e_-^2(z_1) + z e_+^2(z_2)), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
f_{\pm}(z_1)f_{\pm}(z_2) &= g'(z^{-1})f_{\pm}(z_2)f_{\pm}(z_1) + \psi'(z^{-1})(f_{\pm}^2(z_1) + z^{-1}f_{\pm}^2(z_2)), \\
f_{\pm}(z_1)f_{\pm}(z_2) &= g(z)f_{\pm}(z_2)f_{\pm}(z_1) + \psi(z)(zf_{\pm}^2(z_1) + f_{\pm}^2(z_2)), \\
f_{+}(z_1)f_{-}(z_2) &= g'(z^{-1})f_{-}(z_2)f_{+}(z_1) + \psi'(z^{-1})(f_{+}^2(z_1) + z^{-1}f_{-}^2(z_2)), \\
f_{-}(z_1)f_{+}(z_2) &= g(z)f_{+}(z_2)f_{-}(z_1) + \psi(z)(zf_{-}^2(z_1) + f_{+}^2(z_2)),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

где $z = z_1/z_2$ и

$$g(w) = \frac{q^2 - w}{1 - q^2 w}, \quad g'(w) = \frac{q^{-2} - w}{1 - q^{-2} w}, \quad \psi(w) = \frac{1 - q^2}{1 - q^2 w}, \quad \psi'(w) = \frac{1 - q^{-2}}{1 - q^{-2} w}.$$

Для вычисления проекций от произведения токов, например $P_f^{+*}(f(z_1) \dots f(z_n))$, мы сначала заменяем это произведение на сумму произведений производящих функций $f_{\pm}(z_i)$, используя соотношение $f(z) = f_{+}(z) - f_{-}(z)$. Затем мы последовательно передвигаем все производящие функции $f_{-}(z_i)$ направо, а $f_{+}(z_i)$ налево. Далее, проектор P_f^{+*} обращает в нуль все слагаемые, содержащие $f_{-}(z_i)$, оставляя сумму некоторых произведений $f_{+}(z_i)$.

4.3. Дифференциальные уравнения на элементы $\mathcal{R}_{\pm, \mp}(\tau)$. Дифференциальное уравнение (3.15) на тензор $\overline{\mathcal{R}}' \in \overline{U}_f^< \otimes \overline{U}_e^<$ может быть переписано в следующем виде:

$$I(\tau) = (\overline{\mathcal{R}}'(\tau))^{-1} \cdot \tau \frac{d\overline{\mathcal{R}}'(\tau)}{d\tau} = \tau \frac{d\overline{\mathcal{R}}'(\tau)}{d\tau} \cdot (\overline{\mathcal{R}}'(\tau))^{-1}. \tag{4.15}$$

Поддействуем обеими частями этого уравнения на тензорное произведение модулей старшего веса над $U_q(\widehat{sl}_2)$. В соответствии с предложением 1 можно заменить элемент $\overline{\mathcal{R}}'$ на сомножитель универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы (3.8), который обладает естественной факторизацией (4.9). Тогда уравнение (4.15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}_{+, -}(\tau))^{-1} \cdot \tau \frac{d\mathcal{R}_{+, -}(\tau)}{d\tau} + \tau \frac{d\mathcal{R}_{-, +}(\tau)}{d\tau} \cdot (\mathcal{R}_{-, +}(\tau))^{-1} &= \\
&= \mathcal{R}_{-, +}(\tau) \cdot I(\tau) \cdot (\mathcal{R}_{-, +}(\tau))^{-1},
\end{aligned} \tag{4.16a}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}_{+, -}(\tau))^{-1} \cdot \tau \frac{d\mathcal{R}_{+, -}(\tau)}{d\tau} + \tau \frac{d\mathcal{R}_{-, +}(\tau)}{d\tau} \cdot (\mathcal{R}_{-, +}(\tau))^{-1} &= \\
&= (\mathcal{R}_{+, -}(\tau))^{-1} \cdot I(\tau) \cdot \mathcal{R}_{+, -}(\tau).
\end{aligned} \tag{4.16b}$$

Применим теперь проекции $P_f^{+} \otimes P_e^{-}$ к равенству (4.16a) и проекции $P_f^{-} \otimes P_e^{+}$ к уравнению (4.16b). Рассмотрим уравнение (4.16a). Очевидно, что проекции $P_f^{+} \otimes P_e^{-}$ аннулируют второе слагаемое в левой части этого уравнения, а первое слагаемое под действием этой проекции не изменяется. Применим аналогичную комбинацию проекций к правой части (4.16a). Как мы уже упоминали, производящий ряд $I(\tau)$ содержит элементы, принадлежащие тензорному произведению $\overline{U}_f^< \otimes \overline{U}_e^<$ (подробнее см. [16]). В соответствии с этими пополнениями проекции P_f^{+} и P_e^{-} означают следующее. Необходимо переместить все генераторы, принадлежащие подалгебрам U_f^{-} , налево в первом тензорном пространстве в правой части (4.16a) и положить равными нулю все слагаемые, которые содержат эти генераторы слева. Аналогично для вычисления проекции

P_e^- , действующей во втором тензорном пространстве в правой части (4.16а), необходимо переместить все генераторы, принадлежащие подалгебре U_e^+ , направо и положить равными нулю все слагаемые, которые содержат эти генераторы справа. Тем самым мы заключаем, что

$$(P_f^\pm \otimes P_e^\mp) \mathcal{R}_{\mp, \pm}(\tau) = 1 \otimes 1$$

и

$$(P_f^\pm \otimes P_e^\mp) (\mathcal{R}_{\mp, \pm}(\tau) \cdot I(\tau) \cdot (\mathcal{R}_{\mp, \pm}(\tau))^{-1}) = (P_f^\pm \otimes P_e^\mp) I(\tau) \equiv I_{\pm, \mp}(\tau). \quad (4.17)$$

Подстановка (4.17) в (4.16а) и (4.16б) доказывает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Проекции $\mathcal{R}_{\pm, \mp}(\tau) = (P_f^{\pm*} \otimes P_e^\mp) \overline{\mathcal{R}}(\tau)$ универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы $\mathcal{R}(\tau)$ (2.14) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:*

$$\tau (\mathcal{R}_{+, -}(\tau))^{-1} \cdot \frac{d\mathcal{R}_{+, -}(\tau)}{d\tau} = (P_f^- \otimes P_e^+) I(\tau), \quad (4.18)$$

$$\tau \frac{d\mathcal{R}_{-, +}(\tau)}{d\tau} \cdot (\mathcal{R}_{-, +}(\tau))^{-1} = (P_f^+ \otimes P_e^-) I(\tau), \quad (4.19)$$

где $I(\tau)$ заданы формулами (3.16) и (3.17).

Можно показать, что дифференциальные уравнения (4.18) и (4.19) эквивалентны рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} n\mathcal{R}_{+, -}^{(n)} &= \mathcal{R}_{+, -}^{(n-1)} I_{+, -}^{(1)} + \mathcal{R}_{+, -}^{(n-2)} I_{+, -}^{(2)} + \dots + \mathcal{R}_{+, -}^{(1)} I_{+, -}^{(n-1)} + I_{+, -}^{(n)}, \\ n\mathcal{R}_{-, +}^{(n)} &= I_{-, +}^{(1)} \mathcal{R}_{-, +}^{(n-1)} + I_{-, +}^{(2)} \mathcal{R}_{-, +}^{(n-2)} + \dots + I_{-, +}^{(n-1)} \mathcal{R}_{-, +}^{(1)} + I_{-, +}^{(n)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Система рекуррентных соотношений (4.20) с некоммутативными коэффициентами $I_{\pm, \mp}^{(n)}$ имеет формальное решение

$$\mathcal{R}_{\pm, \mp}^{(n)} = \sum_{m=1}^n \sum_{j_1+j_2+\dots+j_m=n} \mathcal{C}_{\pm}(j_1, j_2, \dots, j_m) I_{\pm, \mp}^{(j_1)} I_{\pm, \mp}^{(j_2)} \dots I_{\pm, \mp}^{(j_m)}, \quad (4.21)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_+(j_1, j_2, \dots, j_m) &= \frac{1}{j_1(j_1+j_2)(j_1+j_2+j_3)\dots(j_1+j_2+\dots+j_m)}, \\ \mathcal{C}_-(j_1, j_2, \dots, j_m) &= \\ &= \frac{1}{j_m(j_m+j_{m-1})(j_m+j_{m-1}+j_{m-2})\dots(j_m+j_{m-1}+\dots+j_1)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Таким образом, доказательства теорем 1 и 2 свелись к вычислению проекций сложных токов (4.17) на подалгебры $U_{e,f}^\pm$.

4.4. Проекция сложных токов и экранирующие операторы. Для вычисления проекций сложных токов на подалгебры $U_{e,f}^\pm$ нам необходимы рекуррентные определения этих токов

$$\begin{aligned} e^{(n)}(z) &= - \operatorname{res}_{w=z} e^{(n-1)}(zq^2)e(w) \frac{dw}{w} = - \oint_{\Gamma_1} \frac{dw}{2\pi i w} e^{(n-1)}(zq^2)e(w), \\ e^{(n)}(z) &= \operatorname{res}_{w=zq^{2(n-1)}} e(w)e^{(n-1)}(z) \frac{dw}{w} = \oint_{\Gamma_2} \frac{dw}{2\pi i w} e(w)e^{(n-1)}(z), \\ f^{(n)}(z) &= - \operatorname{res}_{w=zq^{2(n-1)}} f^{(n-1)}(z)f(w) \frac{dw}{w} = - \oint_{\Gamma_2} \frac{dw}{2\pi i w} f^{(n-1)}(z)f(w), \\ f^{(n)}(z) &= \operatorname{res}_{w=z} f(w)f^{(n-1)}(zq^2) \frac{dw}{w} = \oint_{\Gamma_1} \frac{dw}{2\pi i w} f(w)f^{(n-1)}(zq^2), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\Gamma_{1,2}$ – контуры в плоскости переменной w , обходящие против часовой стрелки точки $w = z$ и $w = zq^{2(n-1)}$, соответственно. Обозначим через S_{e_0} , $\tilde{S}_{e_0}$, S_{f_0} , $\tilde{S}_{f_0}$ следующие экранирующие операторы (скрининги), действующие посредством q -коммутаторов в алгебре $U_q(\widehat{sl}_2)$:

$$\begin{aligned} S_{e_0}(x) &= e_0x - kxk^{-1}e_0, & S_{f_0}(x) &= xf_0 - f_0kxk^{-1}, \\ \tilde{S}_{e_0}(x) &= xe_0 - e_0k^{-1}xk, & \tilde{S}_{f_0}(x) &= f_0x - k^{-1}xkf_0. \end{aligned}$$

Действие скринингов совпадает с присоединенным действием элементов e_0 и f_0 относительно коумножения (2.4):

$$\begin{aligned} S_{e_0}(x) &= e'_0 \cdot x \cdot a(e''_0), & S_{f_0}(x) &= a(f'_0) \cdot x \cdot f''_0, \\ \tilde{S}_{e_0}(x) &= a^{-1}(e''_0) \cdot x \cdot e'_0, & \tilde{S}_{f_0}(x) &= f''_0 \cdot x \cdot a^{-1}(f'_0). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Кроме того, операторы $\tilde{S}_{e_0}$ и $\tilde{S}_{f_0}$ связаны с S_{e_0} и S_{f_0} при помощи сопряжения генератором Картана k :

$$\tilde{S}_{e_0}(x) = -q^2k^{-1}S_{e_0}(x)k, \quad \tilde{S}_{f_0}(x) = -q^{-2}k^{-1}S_{f_0}(x)k. \quad (4.25)$$

Возможность применения скринингов к проблеме факторизации основана на следующей лемме.

ЛЕММА 3. 1. Подалгебры $U_e^\pm$ инвариантны относительно действия экранирующих операторов S_{e_0} и $\tilde{S}_{e_0}$, подалгебры $U_f^\pm$ инвариантны относительно действия скринингов S_{f_0} и $\tilde{S}_{f_0}$.

2. Экранирующие операторы S_{e_0} и $\tilde{S}_{e_0}$ коммутируют с проекциями $P_e^\pm$, скрининги S_{f_0} и $\tilde{S}_{f_0}$ коммутируют с проекциями $P_f^\pm$:

$$P_e^\pm S_{e_0}(x) = S_{e_0}P_e^\pm(x), \quad P_e^\pm \tilde{S}_{e_0}(x) = \tilde{S}_{e_0}P_e^\pm(x), \quad x \in U_e, \quad (4.26)$$

$$P_f^\pm S_{f_0}(x) = S_{f_0}P_f^\pm(x), \quad P_f^\pm \tilde{S}_{f_0}(x) = \tilde{S}_{f_0}P_f^\pm(x), \quad x \in U_f. \quad (4.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения 1 основано на простом вычислении, использующем коммутационные соотношения (2.6б) и (2.6в). Утверждение 2 следует из утверждения 1 и равенства $\varepsilon S(x) = 0$, которое справедливо для любого из определенных выше экранирующих операторов.

Основным результатом настоящего пункта является следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Проекции сложных токов $e^{(n)}(z)$ и $f^{(n)}(z)$ на подалгебры $U_{e,f}^\pm$ задаются формулами*

$$\begin{aligned} P_e^+(e^{(n)}(z)) &= \tilde{S}_{e_0}^{n-1}(e_+(zq^{2(n-1)})), & P_e^-(e^{(n)}(z)) &= -S_{e_0}^{n-1}(e_-(z)), \\ P_f^+(f^{(n)}(z)) &= S_{f_0}^{n-1}(f_+(z)), & P_f^-(f^{(n)}(z)) &= -\tilde{S}_{f_0}^{n-1}(f_-(zq^{2(n-1)})). \end{aligned} \quad (4.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции можно доказать (подробнее см. [16]), что токи $e^{(n)}(z)$ и $f^{(n)}(z)$ удовлетворяют квадратичным соотношениям

$$\begin{aligned} (w - zq^{2(n-2)})(w - zq^{2(n-1)})e(w)e^{(n-1)}(z) &= \\ &= q^{2(n-1)}(w - zq^{-2})(w - z)e^{(n-1)}(z)e(w), \\ (w - zq^{2(n-2)})(w - zq^{2(n-1)})f^{(n-1)}(z)f(w) &= \\ &= q^{2(n-1)}(w - zq^{-2})(w - z)f(w)f^{(n-1)}(z). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Более того, можно показать, что произведение $e(w)e^{(n-1)}(z)$ имеет единственный простой полюс в точке $w = q^{2(n-1)}z$ и простой нуль в точке $w = q^{-2}z$; произведение $f(w) \times f^{(n-1)}(z)$ имеет единственный простой полюс в точке $w = q^{-2}z$ и простой нуль в точке $w = q^{2(n-1)}z$.

Это означает, что определения (4.23) могут быть переписаны в виде следующих формальных интегралов:

$$\begin{aligned} e^{(n)}(z) &= \oint \frac{dw}{2\pi iw} \left(e^{(n-1)}(zq^2)e(w) - q^{-2(n-1)}e(w)e^{(n-1)}(zq^2)\alpha_n\left(\frac{z}{w}; q\right) \right), \\ e^{(n)}(z) &= \oint \frac{dw}{2\pi iw} \left(e(w)e^{(n-1)}(z) - q^{-2(n-1)}e^{(n-1)}(z)e(w)\beta_n\left(\frac{w}{z}; q\right) \right), \\ f^{(n)}(z) &= \oint \frac{dw}{2\pi iw} \left(f^{(n-1)}(z)f(w) - q^{2(n-1)}f(w)f^{(n-1)}(z)\beta_n\left(\frac{z}{w}; q^{-1}\right) \right), \\ f^{(n)}(z) &= \oint \frac{dw}{2\pi iw} \left(f(w)f^{(n-1)}(zq^2) - q^{2(n-1)}f^{(n-1)}(zq^2)f(w)\alpha_n\left(\frac{w}{z}; q^{-1}\right) \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n(x; q) &= \frac{(1 - q^{2(n-1)}x)(1 - q^{2n}x)}{(1 - x)(1 - q^2x)}, \\ \beta_n(x; q) &= \frac{(1 - q^2x)(1 - x)}{(1 - q^{-2(n-2)}x)(1 - q^{-2(n-1)}x)}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Правые части соотношений (4.30) могут быть переписаны через левое и правое присоединенные действия нулевых мод токов $e(w)$ и $f(w)$ относительно коумножения $\Delta^{(1)}$. Например, первое из соотношений (4.30) может быть записано в форме

$$e^{(n)}(z) = \text{ad}_{e_0} X = \oint \frac{dw}{2\pi i w} \text{ad}_{e(w)} X = \oint \frac{dw}{2\pi i w} a^{-1}(e''(w)) X e'(w),$$

где $X = e^{(n-1)}(zq^2)$.

Вычисляя формальные интегралы в (4.30), получим

$$\begin{aligned} e^{(n)}(z) &= e^{(n-1)}(zq^2)e_0 - q^{-2(n-1)}e_0e^{(n-1)}(zq^2) + \\ &\quad + \sum_{k < 0} \alpha_{n,k}(q)e_ke^{(n-1)}(zq^2)z^{-k}, \end{aligned} \quad (4.32a)$$

$$\begin{aligned} e^{(n)}(z) &= e_0e^{(n-1)}(z) - q^{-2(n-1)}e^{(n-1)}(z)e_0 + \\ &\quad + \sum_{k > 0} \beta_{n,k}(q)e^{(n-1)}(z)e_kz^{-k}, \end{aligned} \quad (4.32б)$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= f^{(n-1)}(z)f_0 - q^{2(n-1)}f_0f^{(n-1)}(z) + \\ &\quad + \sum_{k < 0} \beta_{n,k}(q^{-1})f_kf^{(n-1)}(z)z^{-k}, \end{aligned} \quad (4.32в)$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= f_0f^{(n-1)}(zq^2) - q^{2(n-1)}f^{(n-1)}(zq^2)f_0 + \\ &\quad + \sum_{k > 0} \alpha_{n,k}(q^{-1})f^{(n-1)}(zq^2)f_kz^{-k}, \end{aligned} \quad (4.32г)$$

где $\alpha_{n,k}(q)$ и $\beta_{n,k}(q)$ – коэффициенты разложения рациональных функций $\alpha_n(x; q)$ и $\beta_n(x; q)$ в ряды по x .

Из определений проекционных операторов (4.7) и (4.11) следует, что суммы в правых частях формул (4.32) обращаются в нуль при действии соответствующих проекторов, тогда получим

$$\begin{aligned} P_e^+(e^{(n)}(z)) &= P_e^+(e^{(n-1)}(zq^2)e_0 - q^{-2(n-1)}e_0e^{(n-1)}(zq^2)) = \\ &= P_e^+\tilde{S}_{e_0}e^{(n-1)}(zq^2), \end{aligned} \quad (4.33a)$$

$$\begin{aligned} P_e^-(e^{(n)}(z)) &= P_e^-(e_0e^{(n-1)}(z) - q^{2(n-1)}e^{(n-1)}(z)e_0) = \\ &= P_e^-S_{e_0}e^{(n-1)}(z), \end{aligned} \quad (4.33б)$$

$$\begin{aligned} P_f^+(f^{(n)}(z)) &= P_f^+(f^{(n-1)}(z)f_0 - q^{-2(n-1)}f_0f^{(n-1)}(z)) = \\ &= P_f^+S_{f_0}f^{(n-1)}(z), \end{aligned} \quad (4.33в)$$

$$\begin{aligned} P_f^-(f^{(n)}(z)) &= P_f^-(f_0f^{(n-1)}(zq^2) - q^{2(n-1)}f^{(n-1)}(zq^2)f_0) = \\ &= P_f^-\tilde{S}_{f_0}f^{(n-1)}(zq^2). \end{aligned} \quad (4.33г)$$

Итерирование формул (4.33) с использованием (4.26), (4.27) завершает доказательство предложения. Знаки минус в двух формулах (4.28) появляются согласно определениям (2.7): $P_e^-(e(z)) = -e_-(z)$ и $P_f^-(f(z)) = -f_-(z)$. Заметим, что коэффициенты перед

$e^{(n-1)}(z)e_0$ и $f_0 f^{(n-1)}(z)$ в (4.33б) и (4.33в) изменены по сравнению с (4.32б) и (4.32в), чтобы иметь возможность применить лемму 3.

Применение предложений 3 и 4 завершает доказательство теорем 1 и 2. Заметим, что в формулировках этих теорем скрининги $\tilde{S}_{e_0}$ и $\tilde{S}_{f_0}$ не использовались. Это возможно, так как

$$\tilde{S}_{f_0}^k(f_+(z)) \otimes \tilde{S}_{e_0}^k(e_-(z)) = S_{f_0}^k(f_+(z)) \otimes S_{e_0}^k(e_-(z))$$

вследствие (4.25). Следствие к теореме 2 вытекает из предложения 4 в силу результатов работы [21].

Присоединенное действие экранирующих операторов на производящие функции $e_{\pm}(z)$, $f_{\pm}(z)$ может быть выражено через их степени. Справедлива следующая

ЛЕММА 4. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{e_0}^{n-1}(e_+(z)) &= \prod_{k=2}^n (1 - q^{-2(k-1)}) e_+^n(z), \\ S_{e_0}^{n-1}(e_-(z)) &= \prod_{k=2}^n (1 - q^{2(k-1)}) e_-^n(z), \\ S_{f_0}^{n-1}(f_+(z)) &= \prod_{k=2}^n (q^{-2(k-1)} - 1) f_+^n(z), \\ \tilde{S}_{f_0}^{n-1}(f_-(z)) &= \prod_{k=2}^n (q^{2(k-1)} - 1) f_-^n(z). \end{aligned} \tag{4.34}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем только первое равенство в (4.34), так как остальные доказываются аналогично. Доказательство проведем индукцией по n . Для $n = 2$ тождество

$$\tilde{S}_{e_0}(e_+(z)) = [e_0, e_+(z)]_{q^{-2}} = e_0 e_+(z) - q^{-2} e_+(z) e_0 = (1 - q^{-2}) e_+^2(z)$$

следует из коммутационных соотношений (2.6б). Предположим, что тождество

$$\tilde{S}_{e_0}^{m-1}(e_+(z)) = \prod_{k=2}^m (1 - q^{-2(k-1)}) e_+^m(z)$$

справедливо для $m = 2, \dots, n-1$. Тогда можно вычислить

$$\tilde{S}_{e_0}^n(e_+(z)) = \prod_{k=2}^{n-1} (1 - q^{-2(k-1)}) \tilde{S}_{e_0}(e_+^{n-1}(z)) = \prod_{k=2}^n (1 - q^{-2(k-1)}) e_+^n(z),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 4 позволяет переписать интегральные формулы для элементов $\mathcal{R}_{\pm, \mp}^{(n)}$ в виде формальных интегралов от тензоров, составленных из степеней производящих функций $e_{\pm}(z)$, $f_{\pm}(z)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\pm, \mp}^{(n)} = & (-2\pi i)^{-n} \sum_{m=1}^n \sum_{j_1+j_2+\dots+j_m=n} \tilde{C}_{\pm}(j_1, j_2, \dots, j_m) \times \\ & \times \oint \dots \oint \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_m}{z_m} f_{\pm}^{j_1}(z_1) \dots f_{\pm}^{j_m}(z_m) \otimes e_{\mp}^{j_1}(z_1) \dots e_{\mp}^{j_m}(z_m) \end{aligned} \quad (4.35)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{+}(j_1, j_2, \dots, j_m) &= \frac{(q^{-1} - q)^{2n-m}}{j_1(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + j_3) \dots (j_1 + j_2 + \dots + j_m)} \prod_{i=1}^m \frac{1}{[j_i]}, \\ \tilde{C}_{-}(j_1, j_2, \dots, j_m) &= \\ &= \frac{(q^{-1} - q)^{2n-m}}{j_m(j_m + j_{m-1})(j_m + j_{m-1} + j_{m-2}) \dots (j_m + j_{m-1} + \dots + j_1)} \prod_{i=1}^m \frac{1}{[j_i]}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Заметим, что представление (4.35) является специфическим для рассматриваемого случая алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ и в ситуации общего положения $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ возможно только с использованием экранирующих операторов.

5. ФАКТОРИЗАЦИЯ ФОРМАЛЬНОГО ТЕНЗОРА СПАРИВАНИЯ

Рекуррентные соотношения и соответствующие дифференциальные уравнения для сомножителей универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы могут быть получены из факторизации тензора спаривания, заданного в виде формального интеграла. Мы покажем, что в этом подходе указанные соотношения будут представлены в другой форме. Их эквивалентность полученным выше результатам сведется к нетривиальному комбинаторному тождеству. Мы приводим доказательство этого тождества, предложенное А. Окуньковым.

5.1. Другая форма дифференциальных уравнений и комбинаторное тождество. Представим элемент (3.24)

$$\overline{\mathcal{R}} = : \exp \oint t(z) \underline{dz} : = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} : \oint \dots \oint \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n} t(z_1) \dots t(z_n) :, \quad (5.1)$$

где функция $t(z)$ определена в (3.14), в виде произведения

$$\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_{+, -} \cdot \mathcal{R}_{-, +}. \quad (5.2)$$

Если использовать обозначения $(a \otimes b)_{\pm, \mp}$ для $P_f^{\pm*}(a) \otimes P_e^{\mp}(b)$, то факторизация (5.2) означает, что

$$\mathcal{R}_{\pm, \mp} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \oint \dots \oint \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n} (t(z_1) \dots t(z_n))_{\pm, \mp}.$$

Пусть

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}}^{(n)} &= \frac{1}{n!} : \oint \cdots \oint \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n} t(z_1) \cdots t(z_n) :, \\ \mathcal{R}_{\pm, \mp}^{(n)} &= \frac{1}{n!} \oint \cdots \oint \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n} (t(z_1) \cdots t(z_n))_{\pm, \mp}.\end{aligned}$$

Тогда соотношение (5.2) эквивалентно тождеству

$$\overline{\mathcal{R}}^{(n)} = \sum_{0 \leq l \leq n} \mathcal{R}_{+, -}^{(l)} \mathcal{R}_{-, +}^{(n-l)}. \quad (5.3)$$

Мы можем вычислить $\mathcal{R}_{+, -}^{(n)}$ методом индукции по n , используя (5.3):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{+, -}^{(n)} &= \frac{1}{n} \left(: \overline{\mathcal{R}}^{(n-1)} \oint t(z) \frac{dz}{z} : \right)_{+, -} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{0 \leq l \leq n-1} \mathcal{R}_{+, -}^{(n-1-l)} \left(: \mathcal{R}_{-, +}^{(l)} \oint t(z) \frac{dz}{z} : \right)_{+, -}.\end{aligned} \quad (5.4)$$

Обозначим

$$\tilde{I}_{+, -}^{(l)} = \left(: \mathcal{R}_{-, +}^{(l)} \oint t(z) \frac{dz}{z} : \right)_{+, -}, \quad \tilde{I}_{-, +}^{(l)} = \left(: \oint t(z) \frac{dz}{z} \mathcal{R}_{+, -}^{(l)} : \right)_{-, +} \quad (5.5)$$

и

$$\tilde{I}_{\pm, \mp}(\tau) = \sum_{n \geq 0} \tilde{I}_{\pm, \mp}^{(n)} \tau^n.$$

Используя эти обозначения, мы можем представить рекуррентное соотношение (5.4) в виде дифференциального уравнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Элементы $\mathcal{R}_{\pm, \mp}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$\tau \frac{d\mathcal{R}_{+, -}(\tau)}{d\tau} = \mathcal{R}_{+, -}(\tau) \cdot \tilde{I}_{+, -}(\tau), \quad (5.6)$$

$$\tau \frac{d\mathcal{R}_{-, +}(\tau)}{d\tau} = \tilde{I}_{-, +}(\tau) \cdot \mathcal{R}_{-, +}(\tau). \quad (5.7)$$

Благодаря единственности логарифмической производной элемента $\overline{\mathcal{R}}$ мы получим отождествление

$$\tilde{I}_{\pm, \mp}(\tau) = I_{\pm, \mp}(\tau). \quad (5.8)$$

Вычисление интегралов (5.5) является нетривиальной технической проблемой. Однако мы можем воспользоваться эквивалентностью уравнений (5.6), (5.7) и (2.15а), (2.15б). Сравнивая выражения (5.5) с (2.17) и (4.34), мы заключаем, что равенство (5.8) можно рассматривать как эффективный способ вычисления интегралов (5.5).

Используя технику спаривания, мы покажем в приложении, что имеют место более общие, чем (5.8), тождества

$$\oint \cdots \oint \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_k}{z_k} ((f(z_1) \cdots f(z_k))_- f_+(z_{k+1}))_+ \otimes ((e(z_1) \cdots e(z_k))_+ e_-(z_{k+1}))_- =$$

$$= k! \frac{(1-q^2)^k}{(k+1)q^2} f_+^{k+1}(z_{k+1}) \otimes e_-^{k+1}(z_{k+1}), \quad (5.9a)$$

$$\oint \cdots \oint \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_k}{z_k} (f_-(z_{k+1})(f(z_k) \cdots f(z_1))_+)_- \otimes (e_+(z_{k+1})(e(z_k) \cdots e(z_1))_+)_+ =$$

$$= k! \frac{(1-q^2)^k}{(k+1)q^2} f_-^{k+1}(z_{k+1}) \otimes e_+^{k+1}(z_{k+1}). \quad (5.9b)$$

Эти тождества (как и (5.8)) эквивалентны определенному комбинаторному тождеству. В частности, для $|q| < 1$ соотношение (5.9a) эквивалентно

$$\frac{1}{(n)_{q^2}!(n+1)_{q^2}!} = (1-q^2)^n \sum_{0 \leq \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1} C_{\{\lambda\}}(q) q^{4(\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n)}, \quad (5.10)$$

где константы $C_{\{\lambda\}}(q)$ параметризованы разбиениями $\{\lambda_m\}$ натурального числа n :

$$C_{\{\lambda\}}(q) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda'_i - \lambda'_{i+1})_{q^2}!}. \quad (5.11)$$

Здесь $\{\lambda'_j\}$ — дуальное к $\{\lambda_k\}$ разбиение, $\lambda'_j = \#k$, такое, что $\lambda_k \geq j$. В (5.11) мы предполагаем, что $(0)_q! \equiv 1$ и $\lambda'_0 = n$. Другими словами, константы $C_{\{\lambda\}}(q)$ могут быть определены следующим образом. Пусть $m: \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \rightarrow \{m_1, \dots, m_k\}$, $1 \leq k \leq n$, — отображение, построенное по правилу

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}, \lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_{m_1+m_2}, \dots, \lambda_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}, \dots, \lambda_{m_1+\cdots+m_k},$$

так что $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{m_1} > \lambda_{m_1+1} = \cdots = \lambda_{m_1+m_2} > \cdots > \lambda_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1} = \cdots = \lambda_{m_1+\cdots+m_k}$. Тогда

$$C_{\{\lambda\}}(q) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{(m_i)_{q^2}!}.$$

А. Окуньков предложил независимое доказательство этого тождества, основанное на формуле специализации полиномов Макдональда [23], доказанной в общем виде Чердиком [24].

Рассмотрим определяющее тождество Коши для полиномов Макдональда

$$\prod_{i,j} \frac{(tx_i y_j)_{\infty}}{(x_i y_j)_{\infty}} = \sum_{\lambda} P_{\lambda}(x; q, t) Q_{\lambda}(x; q, t), \quad (5.12)$$

где $(a)_{\infty} = (1-a)(1-qa)(1-q^2a) \cdots$, P_{λ} — полиномы Макдональда, а Q_{λ} — дуальные полиномы Макдональда, отвечающие диаграмме Юнга λ . Положим

$$x = (t, t^2, t^3, \dots, t^n, 0, 0, \dots), \quad y = (t, t^2, \dots, t^n, t^{n+1}, t^{n+2}, \dots)$$

и

$$q = 0,$$

специализируя многочлены Макдональда к полиномам Холла–Литтлвуда. Тогда левая часть (5.12) равна

$$\frac{1}{(1-t)^n(n+1)t!}, \quad (5.13)$$

а правая часть, в силу формулы (VI.6.11') из книги [23] для вычислений значений полиномов Макдональда в точке $(t, t^2, \dots, t^n)$

$$P_\lambda(t, \dots, t^n; 0, t) = t^{n(\lambda)+|\lambda|} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-t^{n-i+1}}{1-t^{\lambda'_i-i+1}}, \quad (5.14)$$

а также

$$Q_\lambda(t, \dots, t^{n+1}, t^{n+2}, \dots; 0, t) = t^{n(\lambda)+|\lambda|}, \quad (5.15)$$

равна

$$(n)_t! \sum_{\ell(\lambda) \leq n} \frac{t^{2 \sum i \lambda_i}}{\prod_{k \geq 0} (\lambda'_k - \lambda'_{k+1}) t!}. \quad (5.16)$$

В формулах (5.14) и (5.15) $n(\lambda) = \sum_i (i-1)\lambda_i$, $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ и $\ell(\lambda) = \lambda'_1$ – количество рядов в диаграмме λ . Сравнивая формулы (5.13) и (5.16) при $t = q^2$, получим (5.10).

5.2. Примеры вычислений и обращение в нуль перекрестных членов в интегралах. Покажем, как работает факторизация в простейшем нетривиальном случае члена $\overline{\mathcal{R}}^{(2)}$. Этот элемент имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{(q^{-1} - q)^2}{(2\pi i)^2} \frac{1}{2} \oint \oint \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2} (f_+(z_1) - f_-(z_1))(f_+(z_2) - f_-(z_2)) \otimes \\ & \otimes (e_+(z_1) - e_-(z_1))(e_+(z_2) - e_-(z_2)). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Действие проекционных операторов $P_f^{+*} \otimes P_e^-$, описанное выше, приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} & \frac{(q^{-1} - q)^2}{(2\pi i)^2} \frac{1}{2} \oint \oint \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \left(f_+(z_1)f_+(z_2) - \psi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)f_+^2(z_2) \right) \otimes \\ & \otimes \left(e_-(z_1)e_-(z_2) - \psi\left(\frac{z_2}{z_1}\right)e_-^2(z_2) \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Раскроем скобки и рассмотрим полученные слагаемые. Первое регулярное слагаемое оставляем без изменений. В следующих двух слагаемых интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz_1}{z_1} e_-(z_1) \psi\left(\frac{z_1}{z_2}\right), \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz_1}{z_1} f_+(z_1) \psi\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \quad (5.19)$$

обращаются в нуль согласно аналитическим свойствам токов $f_+(z)$ и $e_-(z)$. В последнем слагаемом необходимо вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz_1}{z_1} \psi\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \psi\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{1-q^2}{1+q^2}.$$

В результате мы получим

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{+,-}^{(2)} &= \frac{(q^{-1}-q)^2}{2} \left(\oint \oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \frac{dz_2}{2\pi i z_2} f_+(z_1) f_+(z_2) \otimes e_-(z_1) e_-(z_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-q^2}{1+q^2} \oint \frac{dz}{2\pi i z} f_+^2(z) \otimes e_-^2(z) \right), \end{aligned}$$

что, очевидно, совпадает с (2.19) для $n = 2$.

Как мы видим из данного упражнения, наиболее неочевидной составляющей этой процедуры является обращение в нуль перекрестных членов типа (5.19). Этот факт можно доказать в общем случае для произвольного n . Действительно, соотношения (4.10) эквивалентны равенствам

$$\begin{aligned} &\oint \cdots \oint \prod_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i} (f(z_1) \cdots f(z_n))_{\pm} \otimes (e(z_1) \cdots e(z_n))_{\mp} = \\ &= \oint \cdots \oint \prod_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i} (f(z_1) \cdots f(z_n))_{\pm} \otimes e(z_1) \cdots e(z_n) = \\ &= \oint \cdots \oint \prod_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i} f(z_1) \cdots f(z_n) \otimes (e(z_1) \cdots e(z_n))_{\mp}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Пусть $I \subset \{1, \dots, n\}$, $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$, $J = \{j_1 < \cdots < j_{n-k}\}$ — некоторые подмножества из множества $\{1, \dots, n\}$. Для этих множеств определим следующие формальные степенные ряды:

$$g_{I,J}(z_1, \dots, z_n) = \prod_{\substack{i \in I, j \in J \\ i > j}} g\left(\frac{z_i}{z_j}\right), \quad g'_{I,J}(z_1, \dots, z_n) = \prod_{\substack{i \in I, j \in J \\ i > j}} g'\left(\frac{z_j}{z_i}\right). \quad (5.21)$$

Для дальнейших рассуждений нам необходимо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. В алгебрах $\overline{U}_f^>$ и $\overline{U}_e^<$ имеют место следующие равенства формальных степенных рядов:

$$\begin{aligned} &f(z_1) \cdots f(z_n) = \\ &= \sum_{I,J} g_{I,J}(z_1, \dots, z_n) (f(z_{i_1}) \cdots f(z_{i_k}))_+ (f(z_{j_1}) \cdots f(z_{j_{n-k}}))_-, \end{aligned} \quad (5.22a)$$

$$\begin{aligned} &e(z_1) \cdots e(z_n) = \\ &= \sum_{I,J} g'_{I,J}(z_1, \dots, z_n) (e(z_{i_1}) \cdots e(z_{i_k}))_- (e(z_{j_1}) \cdots e(z_{j_{n-k}}))_+. \end{aligned} \quad (5.22b)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства равенства (5.22а) применим соотношение (4.4) к произведению $f(z_1) \dots f(z_n)$, получим

$$\begin{aligned} f(z_1) \dots f(z_n) &= \mu(P_f^{+*} \otimes P_f^-) (1 \otimes f(z_1) + f(z_1) \otimes \psi^+(z_1)) \dots \\ &\quad \dots (1 \otimes f(z_n) + f(z_n) \otimes \psi^+(z_n)) = \\ &= \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ I = \{i_1 < \dots < i_k\}}} (f(z_{i_1}) \dots f(z_{i_k}))_+ (a(z_1) \dots a(z_n))_-, \end{aligned}$$

где $a(z_k) = \psi^+(z_k)$, если $k \in I$, и $a(z_k) = f(z_k)$, если $k \notin I$. Переставляя все функции $\psi^+(z_k)$ налево в произведении $a(z_1) \dots a(z_n)$ и замечая, что $\varepsilon(\psi^+(z_k)) = 1$, мы получим утверждение предложения.

Рассмотрим сумму интегралов

$$\begin{aligned} \sum_{I, J} \oint \dots \oint \prod_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i} g_{I, J}(z_1, \dots, z_n) (f(z_{i_1}) \dots f(z_{i_k}))_+ \times \\ \times (f(z_{j_1}) \dots f(z_{j_{n-k}}))_- \otimes e(z_1) \dots e(z_n), \end{aligned}$$

в которой мы заменили, используя предложение 6, произведение $f(z_1) \dots f(z_n)$ в первом тензорном пространстве. Теперь мы можем переупорядочить произведение $e(z_1) \dots e(z_n)$ при помощи (3.22) и переписать эту сумму интегралов в виде

$$\begin{aligned} \sum_{I, J} \oint \dots \oint \prod_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i} (f(z_{i_1}) \dots f(z_{i_k}))_+ (f(z_{j_1}) \dots f(z_{j_{n-k}}))_- \otimes \\ \otimes e(z_{i_1}) \dots e(z_{i_k}) e(z_{j_1}) \dots e(z_{j_{n-k}}). \end{aligned}$$

Проведем раздельное интегрирование по группам переменных $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$ и $z_{j_1}, \dots, z_{j_{n-k}}$ и для интегрирования по $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$ воспользуемся (5.20) с индексами $(+, -)$, а для второго – с индексами $(-, +)$, в результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{I, J} \oint \dots \oint \prod_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i} g_{I, J}(z_1, \dots, z_n) (f(z_{i_1}) \dots f(z_{i_k}))_+ \times \\ \times (f(z_{j_1}) \dots f(z_{j_{n-k}}))_- \otimes e(z_1) \dots e(z_n) = \\ = \sum_{I, J} \oint \dots \oint \prod_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i} (f(z_{i_1}) \dots f(z_{i_k}))_+ \times \\ \times (f(z_{j_1}) \dots f(z_{j_{n-k}}))_- \otimes (e(z_{i_1}) \dots e(z_{i_k}))_- (e(z_{j_1}) \dots e(z_{j_{n-k}}))_+. \end{aligned}$$

Это вычисление доказывает, что перекрестные члены в интеграле

$$\oint \dots \oint \prod_{i=1}^n \frac{dz_i}{z_i} (f(z_1) \dots f(z_n))_+ \otimes (e(z_1) \dots e(z_n))_-$$

обращаются в нуль.

Благодарности. Авторы благодарят А. Окунькова за предоставленное доказательство тождества (5.10), а также С. Харчева за полезные дискуссии на первых этапах выполнения работы. С. Пакуляк благодарит Физический институт Боннского университета, теоретическую группу ЦЕРН и Университет Анжуа за гостеприимство. Работа С.Х. и С.П. была поддержана грантами INTAS OPEN 97-01312, CNRS PICS № 608, РФФИ № 98-01-22033. С.Х. был также поддержан грантом РФФИ № 98-01-00303, а С.П. – грантом РФФИ № 97-01-1041 и грантом программы Гейзенберг–Ландау HL-99-12.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисления с помощью спаривания

Мы преследуем здесь две цели. Во-первых, мы докажем эквивалентность между равенствами (5.9) и комбинаторным тождеством (5.10). Во-вторых, мы объясним некоторые приемы работы с ортогональными дуальными базисами в нильпотентных подалгебрах $U_q(\widehat{sl}_2)$. Кроме того, мы воспользуемся гомоморфизмом вычисления значения в точке (evaluation homomorphism) для проверки факторизации элемента $\overline{\mathcal{R}}$.

Эквивалентность между равенствами (5.9) и (5.10). Используя мультипликативное представление элемента $\overline{\mathcal{R}}$ (3.8), мы можем определить дуальные базисы в нильпотентных подалгебрах $\overline{U}_f^>$ и $\overline{U}_e^<$, соответствующие разложению алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ в две борелевские подалгебры, ассоциированные с первой хопфовой структурой Дринфелда:

$$\begin{aligned} E^{\{p\}} &= \{e_{p_1} e_{p_2} \dots e_{p_n} \mid p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n\}, \\ F_{\{p\}} &= \{C_{\{p\}}(q) f_{-p_1} f_{-p_2} \dots f_{-p_n} \mid p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n\}, \\ \langle F_{\{p\}}, E^{\{m\}} \rangle &= \delta_{\{p\}}^{\{m\}} = \delta_{p_1}^{m_1} \delta_{p_2}^{m_2} \dots \delta_{p_n}^{m_n}, \quad p_k, m_k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где $C_{\{p\}}$ заданы формулой (5.11). Как видно из (П.1), упорядоченные мономы, составленные из генераторов e_n в пополнении $\overline{U}_e^<$, дуальны антиупорядоченным мономам, составленным из генераторов f_n в пополнении $\overline{U}_f^>$.

Вычислим правую часть равенства (5.9а). Для этого мы перепишем произведения токов $f(z_1) \dots f(z_k)$ и $e(z_1) \dots e(z_k)$ в упорядоченной форме, используя дуальные базисы в подалгебрах $\overline{U}_f^>$ и $\overline{U}_e^<$:

$$\begin{aligned} f(z_1) \dots f(z_k) &= \sum_{p_1 \geq \dots \geq p_k} C_{\{p\}}(q) \langle f(z_1) \dots f(z_k), e_{-p_1} \dots e_{-p_k} \rangle f_{p_1} \dots f_{p_k}, \\ e(z_1) \dots e(z_k) &= \sum_{s_1 \leq \dots \leq s_k} C_{\{s\}}(q) \langle f_{-s_1} \dots f_{-s_k}, e(z_1) \dots e(z_k) \rangle f_{p_1} \dots f_{p_k}. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Тогда с учетом (П.7), (П.8) (см. ниже), получим

$$\begin{aligned} &\oint \dots \oint \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_k}{z_k} ((f(z_1) \cdot f(z_k))_- f_+(z))_+ \otimes ((e(z_1) \cdot e(z_k))_+ e_-(z))_- = \\ &= \left(\left(\sum_{p_1 \geq \dots \geq p_k} C_{\{p\}}(q) f_{p_1} \dots f_{p_k} \right)_- f_+(z) \right)_+ \otimes \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \otimes \left(\left(\sum_{s_1 \leq \dots \leq s_k} C_{\{s\}}(q) e_{s_1} \dots e_{s_k} \right)_+ e_-(z) \right)_- \times \\
& \times \oint \dots \oint \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_k}{z_k} \langle f_{-s_1} \dots f_{-s_k}, e(z_1) \dots e(z_k) \rangle \times \\
& \times \langle f(z_1) \dots f(z_k), e_{-p_1} \dots e_{-p_k} \rangle = \\
& = \left(\sum_{0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_k} C_{\{p\}}(q) f_{p_1} \dots f_{p_k} f_+(z) \right)_+ \otimes \\
& \otimes \left(\sum_{0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_k} C_{\{s\}}(q) e_{s_1} \dots e_{s_k} e_-(z) \right)_- \times \\
& \times k! (q^{-1} - q)^k \langle f_{-s_1} \dots f_{-s_k}, e_{-p_1} \dots e_{-p_k} \rangle = \\
& = k! \sum_{0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_k} C_{\{p\}}(q) (f_{-p_1} \dots f_{-p_k} f_+(z))_+ \otimes (e_{p_1} \dots e_{p_k} e_-(z))_- . \quad (\text{П.3})
\end{aligned}$$

Окончательно для доказательства эквивалентности (5.9а) и комбинаторного тождества (5.10) мы воспользуемся формулами

$$\begin{aligned}
(f_{-p_1} \dots f_{-p_k} f_+(z))_+ &= \prod_{m=1}^k (1 - q^{2m}) q^{2(p_k + 2p_{k-1} + \dots + kp_1)} f_+^{k+1}(z) z^{-p_1 - \dots - p_k}, \\
(e_{p_1} \dots e_{p_k} e_-(z))_- &= \prod_{m=1}^k (1 - q^{2m}) q^{2(p_k + 2p_{k-1} + \dots + kp_1)} e_-^{k+1}(z) z^{p_1 + \dots + p_k},
\end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

являющимися частными случаями более общих формул

$$\begin{aligned}
(f_-^k(z_1) f_+^{n-k+1}(z_2))_+ &= \prod_{m=n-k-1}^n \frac{1 - q^{2m}}{1 - q^{2m} z_1/z_2} f_+^{n+1}(z_2), \\
(e_+^k(z_1) e_-^{n-k+1}(z_2))_- &= \prod_{m=n-k-1}^n \frac{1 - q^{2m}}{1 - q^{2m} z_2/z_1} e_-^{n+1}(z_2), \\
(f_-^{n-k+1}(z_1) f_+^k(z_2))_- &= \prod_{m=n-k-1}^n \frac{(1 - q^{2m}) z_1/z_2}{1 - q^{2m} z_1/z_2} f_-^{n+1}(z_1), \\
(e_+^{n-k+1}(z_1) e_-^k(z_2))_+ &= \prod_{m=n-k-1}^n \frac{(1 - q^{2m}) z_2/z_1}{1 - q^{2m} z_2/z_1} e_+^{n+1}(z_1).
\end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Эквивалентность между мультипликативной и интегральной формами тензора спаривания. В тензорном произведении алгебр $\overline{U}_f^> \otimes \overline{U}_e^<$ справедливо тождество

$$\overrightarrow{\prod_{n \in \mathbb{Z}}} \exp_{q^2}((q^{-1} - q) f_{-n} \otimes e_n) = : \exp \left((q^{-1} - q) \oint \underline{dz} f(z) \otimes e(z) \right) :, \quad (\text{П.6})$$

где обозначение $: \cdot :$ означает антиупорядочение в левом тензорном пространстве и упорядочение в правом.

Для доказательства тождества (П.6) нам необходимы следующие формулы:

$$\oint \cdots \oint \underline{dz_n} \cdots \underline{dz_n} \langle f(w_1) \cdots f(w_n), e(z_1) \cdots e(z_n) \rangle \times \\ \times \langle f(z_1) \cdots f(z_n), e(u_1) \cdots e(u_n) \rangle = \\ = n! (q^{-1} - q)^{-n} \langle f(w_1) \cdots f(w_n), e(u_1) \cdots e(u_n) \rangle, \quad (\text{П.7})$$

$$\langle f_{-p_1} f_{-p_2} \cdots f_{-p_n}, e_{s_1} e_{s_2} \cdots e_{s_n} \rangle = \\ = \delta_{p_1, s_1} \delta_{p_2, s_2} \cdots \delta_{p_n, s_n} C_{\{p\}}^{-1}(q) (q^{-1} - q)^{-n} \quad (\text{П.8})$$

для $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$ и $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$. Формула (П.7) может быть доказана с использованием простой комбинаторики и явных формул спаривания (3.7), а формула (П.8) является прямым следствием факторизационного свойства этого спаривания.

Теперь утверждение (П.6) вытекает из следующего вычисления, в котором использованы формулы (П.2), (П.7), (П.8):

$$\frac{1}{n!} \oint \cdots \oint \underline{dz_1} \cdots \underline{dz_n} f(z_1) \cdots f(z_n) \otimes e(z_1) \cdots e(z_n) = \\ = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{p_1 \leq \cdots \leq p_n \\ s_1 \leq \cdots \leq s_n}} C_{\{p\}}(q) C_{\{s\}}(q) f_{-s_1} \cdots f_{-s_n} \otimes e_{p_1} \cdots e_{p_n} \times \\ \times \oint \cdots \oint \underline{dz_n} \cdots \underline{dz_n} \langle f_{-p_1} \cdots f_{-p_n}, e(z_1) \cdots e(z_n) \rangle \times \\ \times \langle f(z_1) \cdots f(z_n), e_{s_1} \cdots e_{s_n} \rangle = \\ = \sum_{p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n} C_{\{p\}}(q) f_{-p_1} \cdots f_{-p_n} \otimes e_{p_1} \cdots e_{p_n}. \quad (\text{П.9})$$

Гомоморфизм “вычисления” и универсальная $\mathcal{R}$ -матрица. Пусть E , F и H — генераторы $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям

$$q^H E q^{-H} = q^2 E, \quad q^H F q^{-H} = q^{-2} F, \quad [E, F] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}. \quad (\text{П.10})$$

Отображение $\mathcal{E}v_a: U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathbb{C}[[a, a^{-1}]]$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{E}v_a(e_n) = a^n q^{nH} E, \quad \mathcal{E}v_a(f_n) = a^n F q^{nH}, \\ \mathcal{E}v_a(\psi_n^\pm) = \pm (q - q^{-1}) a^n q^{nH} (EF - q^{2n} FE), \quad (\text{П.11})$$

или эквивалентно

$$\mathcal{E}v_a(f_-(z)) = -F \frac{1}{1 - (z/a)q^{-H}}, \quad \mathcal{E}v_a(e_+(z)) = \frac{1}{1 - (a/z)q^H} E, \\ \mathcal{E}v_a(f_+(z)) = F \frac{(a/z)q^H}{1 - (a/z)q^H}, \quad \mathcal{E}v_a(e_-(z)) = -\frac{(z/a)q^{-H}}{1 - (z/a)q^{-H}} E. \quad (\text{П.12})$$

Используя формулы (4.34), мы можем переписать тензоры $I_{\pm, \mp}^{(n)}$ через контурные интегралы по единичным окружностям ($|a| < 1$, $|b| > 1$):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}v_a \otimes \mathcal{E}v_b(I_{+, -}^{(n)}) &= \frac{(q^{-1} - q)^{2n-1}}{(2\pi i)^n [n]_q} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} F \frac{(a/z)q^H}{1 - (a/z)q^H} \cdots F \frac{(a/z)q^H}{1 - (a/z)q^H} \otimes \\ &\quad \otimes \frac{(z/b)q^H}{1 - (z/b)q^{-H}} E \cdots \frac{(z/b)q^H}{1 - (z/b)q^{-H}} E, \\ \mathcal{E}v_a \otimes \mathcal{E}v_b(I_{-, +}^{(n)}) &= \frac{(q^{-1} - q)^{2n-1}}{(2\pi i)^n [n]_q} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} F \frac{1}{1 - (a/z)q^{-H}} \cdots F \frac{1}{1 - (a/z)q^{-H}} \otimes \\ &\quad \otimes \frac{1}{1 - (z/b)q^H} E \cdots \frac{1}{1 - (z/b)q^H} E. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Коммутационные соотношения (П.10) и теорема Коши позволяют вычислить эти интегралы:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}v_a \otimes \mathcal{E}v_b(I_{+, -}^{(n)}) &= \frac{(q^{-1} - q)^{2n-1}}{[n]_q} \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q^{2(i-j)}}{1 - q^{2(i-j)}} \prod_{\ell=1}^n \frac{Z q^{2(\ell+j-1)}}{1 - Z q^{2(\ell+j-1)}} F^n \otimes E^n, \\ \mathcal{E}v_a \otimes \mathcal{E}v_b(I_{-, +}^{(n)}) &= \frac{(q^{-1} - q)^{2n-1}}{[n]_q} F^n \otimes \\ &\quad \otimes E^n \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{1 - q^{2(i-j)}} \prod_{\ell=1}^n \frac{1}{1 - Z^{-1} q^{2(\ell+j-1)}}, \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

где

$$Z = \frac{a}{b} q^{H \otimes 1 - 1 \otimes H}.$$

С другой стороны, выражения для $\mathcal{E}v_a \otimes \mathcal{E}v_b(\mathcal{R}_{\pm, \mp}^{(n)})$ получены в работе [25]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}v_a \otimes \mathcal{E}v_b(\mathcal{R}_{+, -}^{(n)}) &= \frac{(q^{-1} - q)^n}{(n)_{q^{-2}}!} \left(\prod_{i=1}^n \frac{q^{2i} Z}{1 - q^{2i} Z} \right) F^n \otimes E^n, \\ \mathcal{E}v_a \otimes \mathcal{E}v_b(\mathcal{R}_{-, +}^{(n)}) &= \frac{(q^{-1} - q)^n}{(n)_{q^2}!} F^n \otimes E^n \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - q^{2i} Z^{-1}} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Для $n = 2, 3$ мы проверили, что элементы (П.15) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (4.20) с $I_{\pm, \mp}^{(n)}$, заданными (П.14). К сожалению, мы не смогли непосредственно проверить соответствующие дифференциальные уравнения для $\mathcal{E}v_a \otimes \mathcal{E}v_b(\mathcal{R}_{\pm, \mp}(\tau))$. Было бы интересно найти такое доказательство.

Список литературы

- [1] Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев. УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 13–63.
- [2] В. Г. Дринфельд. ДАН СССР. 1987. Т. 286. № 1. С. 13–17.
- [3] М. Jimbo. Lett. Math. Phys. 1985. V. 10. P. 63–69; Commun. Math. Phys. 1986. V. 102. P. 537–547.
- [4] С. Frønsdal. Lett. Math. Phys. 1997. V. 40. P. 117–134.
- [5] D. Arnaudon, E. Buffenoir, E. Ragoucy, Ph. Roche. Lett. Math. Phys. 1998. V. 44. P. 201.
- [6] М. Jimbo, H. Konno, S. Odake, J. Shiraishi. Elliptic algebra $U_{q,p}(\widehat{sl}_2)$: Drinfeld currents and vertex operators. math.QA/9802002; Quasi-Hopf twistors for elliptic quantum groups. q-alg/9712029.
- [7] G. Andrews, R. Baxter, J. Forrester. J. Stat. Phys. 1984. V. 35. P. 193–266.
- [8] Р. Бэкстер. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [9] А. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov. Ann. Phys. (N. Y.). 1979. V. 120. P. 253–291.
- [10] В. Г. Дринфельд. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 6. С. 114–148.
- [11] V. G. Drinfeld. Quantum groups. In: Proc. Int. Congr. Math. Berkley, Ca, 1986. V. 1. Ed. A. M. Cleason. Providence: Amer. Math. Soc., 1987. P. 798–820.
- [12] S. Khoroshkin, V. Tolstoy. Twisting of quantum (super)algebras. Connection of Drinfeld's and Cartan–Weyl realizations for quantum affine algebras. Preprint MPI/94-23. Bonn: Max Plank Institut, 1994. hep-th/9404036.
- [13] B. Enriquez, G. Felder. Elliptic quantum groups $E_{\tau,\eta}(\widehat{sl}_2)$ and quasi-Hopf algebras. q-alg/9703018.
- [14] B. Enriquez, V. Rubtsov. Quasi-Hopf algebras associated with $\mathfrak{sl}(2)$ and complex curves. q-alg/9608005.
- [15] J. Ding, S. Khoroshkin. Weyl group extension of quantized current algebras. math.QA/9804139.
- [16] J. Ding, S. Khoroshkin, S. Pakuliak. Integral representations for universal $\mathcal{R}$ -matrix. Preprint ITEP-TH-67/99. М.: ИТЕП, 1999; <http://wwwth.itep.ru/mathphys/psfiles/99.67.ps>.
- [17] S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak. Commun. Math. Phys. 1998. V. 190. P. 597–627.
- [18] J. Beck. Commun. Math. Phys. 1994. V. 165. P. 555–568.
- [19] S. Khoroshkin, V. Tolstoy. J. Geom. Phys. 1993. V. 11. P. 101–108.
- [20] I. Damiani. J. Algebra. 1993. V. 161. P. 291–310.
- [21] J. Ding, T. Miwa. Zeros and poles of quantum current operators and the condition of quantum integrability. q-alg/9608001.
- [22] В. Н. Толстой, С. М. Хорошкин. Функц. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. № 1. С. 85–88.
- [23] И. Макдональд. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985.
- [24] I. Cherednik. Invent. Math. 1995. V. 122. P. 119–145.
- [25] S. Khoroshkin, V. Tolstoy, A. Stolin. Mod. Phys. Lett. A. 1995. V. 10. № 19. P. 1375–1392.

Поступила в редакцию 30.III.2000 г.