Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Семихатов, Дифференциальная $\mathcal{U}$ -модульная алгебра для $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ в четном корне из единицы, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 1, 5–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 11:56:08

© 2009 г.

А. М. Семихатов*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ $\mathcal{U}$ -МОДУЛЬНАЯ АЛГЕБРА ДЛЯ $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ В ЧЕТНОМ КОРНЕ ИЗ ЕДИНИЦЫ

Показано, что полная матричная алгебра $\text{Mat}_p(\mathbb{C})$ является $\mathcal{U}$ -модульной алгеброй для $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ – квантовой группы $sl(2)$ в корне $2p$ -й степени из единицы. $\text{Mat}_p(\mathbb{C})$ разлагается в прямую сумму проективных $\mathcal{U}$ -модулей $\mathcal{P}_n^+$ по всем нечетным n , $1 \leq n \leq p$. В терминах генераторов и соотношений эта $\mathcal{U}$ -модульная алгебра описывается как алгебра q -дифференциальных операторов “от одной переменной” с соотношениями $\partial z = q - q^{-1} + q^{-2}z\partial$ и $z^p = \partial^p = 0$. Эти соотношения определяют “парафермионную” статистику, обобщающую фермионные коммутационные соотношения. В соответствии с двойственностью Кэджана–Люстига она должна реализовываться в логарифмических $(p, 1)$ -моделях конформной теории поля в формализме, обладающем явной квантово-групповой симметрией. Двойственность Кэджана–Люстига между $\mathcal{U}$ и логарифмическими $(p, 1)$ -моделями расширяется путем построения квантового комплекса де Рама новой $\mathcal{U}$ -модульной алгебры; обсуждается его полевой аналог.

Ключевые слова: квантовая группа, парафермионная статистика, $\mathcal{U}$ -модульная алгебра, двойственность Кэджана–Люстига, логарифмическая конформная теория поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Основные результаты. Пусть $q = e^{i\pi/p}$ для целого $p \geq 2$ и пусть $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ – квантовая группа с генераторами E, K, F и с соотношениями

$$KEK^{-1} = q^2 E, \quad KFK^{-1} = q^{-2} F, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad (1.1)$$

$$E^p = F^p = 0, \quad K^{2p} = 1 \quad (1.2)$$

и со структурой алгебры Хопфа, которая будет описана ниже.

Мы строим представление $\mathcal{U}$ на полной матричной алгебре $\text{Mat}_p(\mathbb{C})$. Если $X = (x_{ij}) - (p \times p)$ -матрица, то $(EX)_{ij}$ – линейная комбинация правого и верхнего соседей

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: ams@sci.lebedev.ru

элемента x_{ij} , а $(FX)_{ij}$ – линейная комбинация левого и нижнего соседей, причем коэффициенты в этих линейных комбинациях указаны на диаграммах

$$E : \begin{array}{c} \boxed{i-1, j} \\ \downarrow -\frac{q^{2(i-j-1)}}{q-q^{-1}} \\ \boxed{i, j} \end{array} \quad , \quad F : \begin{array}{c} \boxed{i, j-1} \xrightarrow{-q^{j-2i}[j-1]} \boxed{i, j} \\ \uparrow q^{1-i}[i] \\ \boxed{i+1, j} \end{array} \quad (1.3)$$

С необходимыми модификациями на границах точные формулы выглядят следующим образом:

$$E(X) = \frac{1}{q-q^{-1}} \begin{pmatrix} x_{12} & \dots & x_{i,j+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ x_{i,2} - q^{2(i-2)}x_{i-1,1} & \dots & x_{i,j+1} - q^{2(i-j-1)}x_{i-1,j} & \dots & -q^{2(i-1)}x_{i-1,p} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p,2} - q^{-4}x_{p-1,1} & \dots & x_{p,j+1} - q^{-2(j+1)}x_{p-1,j} & \dots & -q^{-2}x_{p-1,p} \end{pmatrix}$$

(единственный ноль – в правом верхнем углу), где явно указана i -я строка и j -й столбец, $(KX)_{ij} = q^{2(i-j)}x_{ij}$ и

$$F(X) = \begin{pmatrix} x_{21} & \dots & x_{2,j} - q^{j-2}[j-1]x_{1,j-1} & \dots & x_{2,p} + q^{-2}x_{1,p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ q^{1-i}[i]x_{i+1,1} \dots q^{1-i}[i]x_{i+1,j} - q^{j-2i}[j-1]x_{i,j-1} \dots q^{1-i}[i]x_{i+1,p} + q^{-2i}x_{i,p-1} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -q^j[j-1]x_{p,j-1} & \dots & x_{p,p-1} \end{pmatrix}$$

(единственный ноль – в левом нижнем углу), где снова показаны i -я строка и j -й столбец; здесь

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

ТЕОРЕМА. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) приведенные формулы определяют представление $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ на $\text{Mat}_p(\mathbb{C})$;
- 2) $\text{Mat}_p(\mathbb{C})$ является $\mathcal{U}$ -модульной алгеброй.

Напомним, что $\mathcal{H}$ -модульная алгебра для алгебры Хопфа $\mathcal{H}$ – это алгебра в тензорной категории $\mathcal{H}$ -модулей, т.е. (левый) $\mathcal{H}$ -модуль V с таким законом композиции $V \otimes V \rightarrow V$, что $h(vw) = \sum h'(v)h''(w)$ при $h \in \mathcal{H}$ и $v, w \in V$ (здесь $\Delta(h) = \sum h' \otimes h''$ – обозначение Свидлера для копроизведения)¹⁾.

Квантовая группа $\mathcal{U}$ имеет $2p$ неприводимых представлений $\mathcal{X}_r^\pm$, $1 \leq r \leq p$, причем $\dim \mathcal{X}_r^\pm = r$ [1]. Пусть $\mathcal{P}_r^\pm$ – их проективные накрывающие. “Плюс”-представления

¹⁾По-простому, данное условие означает естественное согласование между $\mathcal{H}$ -действием и умножением в V – “естественное” в том отношении, что $\mathcal{H}$ действует на произведение с помощью коумножения. Утверждение (2), таким образом, состоит в том, что стандартное матричное умножение согласовано с предлагаемым действием квантовой группы $\mathcal{U}$ (и с коумножением на ней).

отличаются от “минус”-представлений тем, что тензорные произведения $\mathcal{X}_r^+ \otimes \mathcal{X}_s^+$ разлагаются на $\mathcal{X}_{r'}^+$ и $\mathcal{P}_{r'}^+$ (и $\mathcal{X}_1^+$ – тривиальное представление).

ТЕОРЕМА (продолжение). *Дополнительно к утверждениям 1, 2 имеет место следующее утверждение:*

3) $\text{Mat}_p(\mathbb{C})$ разлагается на неразложимые $\mathcal{U}$ -модули как

$$\text{Mat}_p(\mathbb{C}) = \mathcal{P}_1^+ \oplus \mathcal{P}_3^+ \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_\nu^+, \quad (1.4)$$

где $\nu = p$, если p нечетно, и $\nu = p - 1$, если p четно.

Алгебра (1.4) есть наименьшая $\mathcal{U}$ -модульная алгебра, содержащая $\mathcal{P}_1^+$ – проективную накрывающую тривиального представления. Этот $2p$ -мерный модуль является линейной оболочкой $2p$ элементов, действие $\mathcal{U}$ на которых имеет вид [2]

$$\begin{array}{ccccccc} & & & t & & & \\ & E \swarrow & & \searrow F & & & \\ \ell_{p-1} & \rightleftharpoons & \ell_{p-2} & \rightleftharpoons & \cdots & \rightleftharpoons & \ell_1 \\ & F \searrow & & \swarrow E & & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \quad r_1 \rightleftharpoons \cdots \rightleftharpoons r_{p-2} \rightleftharpoons r_{p-1},$$

где горизонтальные стрелки представляют действие генераторов E (налево) и F (направо) с точностью до ненулевых множителей, а наклонные стрелки означают, что отображение в обратном направлении обращается в нуль. Используя структуру алгебры, определенную на сумме проективных модулей, можно сказать больше.

ТЕОРЕМА (продолжение). *Справедливо также следующее:*

4) существует изоморфизм $\mathcal{U}$ -модульных алгебр

$$\mathcal{P}_1^+ \oplus \mathcal{P}_3^+ \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_\nu^+ \cong \overline{\mathbb{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial],$$

где $\overline{\mathbb{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial]$ – ассоциативная алгебра с генераторами ∂ и z и соотношениями

$$\partial z = \mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1} + \mathfrak{q}^{-2} z \partial, \quad (1.5)$$

$$\partial^p = 0, \quad z^p = 0; \quad (1.6)$$

5) при этом изоморфизме каждое из “крыльев” проективного модуля $\mathcal{P}_1^+$ представляет собой степени одного из генераторов:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & t & & & \\ & E \swarrow & & \searrow F & & & \\ z^{p-1} & \rightleftharpoons & z^{p-2} & \rightleftharpoons & \cdots & \rightleftharpoons & z \\ & F \searrow & & \swarrow E & & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \quad \partial \rightleftharpoons \cdots \rightleftharpoons \partial^{p-2} \rightleftharpoons \partial^{p-1}, \quad (1.7)$$

а “верхний” элемент равен

$$t = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{[i]} z^i \partial^i. \quad (1.8)$$

Иначе говоря, наша $\mathcal{U}$ -модульная алгебра отождествляется с алгеброй q -дифференциальных операторов “от одной переменной” с условиями нильпотентности (1.6) (и со слегка необычным правилом “протаскивания” ∂ через z)²⁾. Если не брать в расчет матричных курьезов, то q -дифференциальные операторы дают более предпочтительное (“более инвариантное”) по сравнению с матричной реализацией описание алгебры на сумме “нечетных” проективных $\mathcal{U}$ -модулей $\mathcal{P}_1^+ \oplus \mathcal{P}_3^+ \oplus \dots$.

Заметим, что, очевидно, t в (1.7) определяется с точностью до прибавления $\alpha 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, а потому выражение (1.8) является частным представителем класса таких выражений; это подразумевается в дальнейшем.

В случае квазитреугольной алгебры Хопфа $\mathcal{H}$ говорят, что $\mathcal{H}$ -модульная алгебра квантово-коммулативна [3] (или $\mathcal{H}$ -, R -, или же косово (braided) коммулативна), если

$$vw = \sum R^{(2)}(w)R^{(1)}(v) \quad (1.9)$$

для всех $v, w \in V$, где $R = \sum R^{(1)} \otimes R^{(2)} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ – универсальная R -матрица. Наша $\mathcal{U}$ -модульная алгебра не является квантово-коммулативной, тем не менее соотношение (1.9) справедливо для $v = z^i \partial^j$ и $w = z^m \partial^n$, если и только если выполнено хотя бы одно из условий $n = 0$, $i = 0$ или $|i + m - j - n| \geq p$.

Возвращаясь к матричному описанию и представляя коммутационные соотношения (1.5) матрицами³⁾

$$z = \begin{pmatrix} 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial = (q - q^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1}[2] & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & q^{2-p}[p-1] \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

имеем первый матричный курьез – *целые*, а не q -*целые* в матричном представлении элемента (1.8):

$$t = (q - q^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots\dots & 0 & p-2 & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & p-1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Далее, оказывается, что для нашей алгебры $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$ можно развить дифференциальное исчисление (calculus) так, чтобы дифференциал (удовлетворяющий “классическому” правилу Лейбница!) коммутировал с действием квантовой группы. Пусть

²⁾Это параллельно классическому утверждению о том, что $\text{Mat}_p(\mathbb{C})$ порождается элементами x и y , удовлетворяющими соотношениям $yx = qxy$ и $x^p = y^p = 1$, где q – корень p -й степени из единицы [2] (конечная квантовая плоскость в современной терминологии), но мы не нашли прямого (“экспоненциального”) соответствия между нашей “нильпотентной” ($\partial^p = z^p = 0$) и классической “унипотентной” ($x^p = y^p = 1$) конструкциями.

³⁾Мы не упрощаем выражения за счет применения формул $q^p = -1$ и $[p-i] = [i]$, если упрощенный вариант помогает увидеть общую структуру.

$\mathbb{C}_q[\zeta, \delta]$ – “нечетный аналог” $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$, т.е. алгебра на элементах ζ и δ с соотношениями $\zeta^2 = 0$, $\delta^2 = 0$ и $\delta\zeta = -q^{-2}\zeta\delta$. Эти новые переменные следует рассматривать как дифференциалы “координат,” т.е. $\zeta = d(z)$ и $\delta = d(\partial)^4$.

ТЕОРЕМА (ПРОДОЛЖЕНИЕ). *Наконец, имеет место следующий факт:*

б) некоторый фактор алгебры $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial] \otimes \mathbb{C}_q[\zeta, \delta]$ можно снабдить структурой дифференциальной $\mathcal{U}$ -модульной алгебры $(\Omega \overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial], d)$, которая является квантовым комплексом де Рама для $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$.

Обозначение $\Omega \overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$ предполагает, что $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$ представляет собой алгебру 0-форм.

Точные формулы, определяющие фактор-алгебру и $\mathcal{U}$ -действие на ней, приводятся в разделе 4. В качестве иллюстрации того, как действие дифференциала d влияет на структуру модулей, заметим, что единица из $\mathcal{P}_1^+$ в (1.7) аннигилируется дифференциалом, а потому $\mathcal{P}_1^+$ не сохраняется под действием d . С другой стороны, имеется еще один, не являющийся d -замкнутым, элемент из $\Omega^1 \overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$ в той же градуировке, что и dt , кроме того, имеются элементы в когомологии оператора d , которые вместе с $d(\mathcal{P}_1^+)$ организуются в прямую сумму двух $\mathcal{U}$ -модулей

$$\begin{array}{ccc}
 z^{p-1}\zeta & & \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{[i]} d(z^i) \partial^i \\
 \searrow F & & \searrow E \\
 z^{p-2}\zeta \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons z\zeta \rightleftharpoons \zeta & & \oplus \\
 & & \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{[i]} z^i d(\partial^i) \\
 & & \searrow F \quad \quad \quad \searrow E \\
 & & \delta \rightleftharpoons \partial\delta \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons \partial^{p-2}\delta \quad \quad \quad \partial^{p-1}\delta
 \end{array} \tag{1.12}$$

где $d(z^i) = q^{1-i}[i] z^{i-1}\zeta$ и $d(\partial^i) = q^{i-1}[i] \partial^{i-1}\delta$. “Узлы” $z^{p-1}\zeta$ и $\partial^{p-1}\delta$ являются когомологиями дифференциала.

1.2. Мотивировка и некоторые (не)связанные подходы. Наш интерес к квантовой группе $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ и связанным с ней объектам определяется ее появлением в логарифмических конформных теориях поля [2], [4] (см. также [5], [6] по поводу аналогичных квантово-групповых структур, а также обзор [7] и дальнейшее развитие [8])⁵. По данный вариант квантовой группы $\mathfrak{sl}(2)$ в действительности

⁴Если нашу $\mathbb{C}_q[z, \partial]$ переобозначить как $\mathbb{C}_q^{2|0}[z, \partial]$, то ее “нечетный аналог” будет обозначаться как $\mathbb{C}_q^{0|2}[\zeta, \delta]$; мы используем упрощенные обозначения для краткости.

⁵По поводу логарифмических $(p, 1)$ -моделей, ни в коей мере не претендуя на исчерпывающее перечисление, отметим пионерские работы [9]–[11] (где, в частности, была установлена симметрия модели – триплетная алгебра), обзоры [12], [13] ранних этапов исследований, “логарифмические деформации” [14], определение триплетной алгебры $W(p)$ при общих p как ядра скринингов и получение fusion-алгебры для $2p$ неприводимых $W(p)$ -представлений [15] (см. также [16]), исследование $W(p)$ с помощью алгебры Жу [17] и интересные последние достижения в работах [18]–[20], [8], а также, разумеется, многочисленные приведенные в этих работах ссылки.

впервые появился намного раньше; достойным сожаления пропуском в работе [7] (в ее варианте, представленном в электронном архиве) является статья [21], где регулярное представление $\mathcal{U}$ изящно описано в терминах четной подалгебры в произведении матричной алгебры и грассмановой алгебры на двух генераторах для каждого блока (см. также работы [22]–[24] для очень близкой квантовой группы при $p = 3$). Эта квантовая группа была также предметом внимания в работах [25], [26].

Соответствие между $\mathcal{U}$ и логарифмическими $(p, 1)$ -моделями конформной теории поля, представляющее собой вариант двойственности Каждана–Люстига [27], распространяется не только на соответствующие теории представлений, но и на действие модулярной группы: модулярное действие, порождаемое из характеров алгебры $W(p)$, изоморфно модулярному действию на центре квантовой группы [2], [4]–[6]. Но алгебраические структуры на $\mathcal{U}$ -модулях в контексте двойственности Каждана–Люстига ранее не исследовались. Соотношения (1.5), (1.6) являются квантово-групповым аналогом “скрытой” квантово-групповой симметрии логарифмических конформных $(p, 1)$ -моделей (см. п. 1.3 ниже).

С другой стороны, коммутационное соотношение (1.5) можно сравнить с (значительно более общим) формализмом квантовых алгебр Вейля [28]–[30]. В рамках этого формализма рассматриваются определяющие соотношения (∂^j – не степени одного элемента, а различные элементы)

$$\begin{aligned} \sum R_{ij}^{kl} x_k x_l &= q x_i x_j, & \sum R_{kl}^{ij} \partial^k \partial^l &= q \partial^i \partial^j, \\ \partial^j x_i &= \delta_i^j + q \sum R_{il}^{jk} x_k \partial^l, & 1 \leq i, j, k, l \leq n, \end{aligned}$$

где $R - (n^2 \times n^2)$ -матричное решение уравнения Янга–Бакстера и соотношения Гекке. Для “ gl_n ” R -матрицы, в частности, имеем

$$\partial^i x_i = 1 + q^2 x_i \partial^i + (q^2 - 1) \sum_{j>i} x_j \partial^j,$$

что в случае $n = 1$ (малоинтересном с точки зрения общей теории квантовых алгебр Вейля) принимает вид $\partial x = 1 + q^2 x \partial$. Наше соотношение (1.5) содержит $q - q^{-1}$ вместо единицы, что определяется свойством $\mathcal{U}$ -модульности алгебры, коль скоро $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ – наш главный, исходный объект (в отличие от случая квантовых алгебр Вейля, где “ $\partial x - x \partial$ ”-соотношения считаются основными, а далее исследуется квантовая обертывающая алгебра, порожденная комбинациями $x_i \partial^j$; кроме того, наша R -матрица не удовлетворяет соотношению Гекке).

1.3. “Парафермионная статистика”.

1.3.1. При $p = 2$ соотношения (1.6) и (1.7) принимают “фермионный” вид

$$\{\partial, \partial\} = 0, \quad \{z, z\} = 0, \quad \{\partial, z\} = 2i,$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ – антикоммутатор⁶⁾. Хорошо известно, что эта “фермионная статистика” (соотношения алгебры Клиффорда) имеет непосредственное отношение к простейшей логарифмической модели конформной теории поля из $(p, 1)$ -семейства, т.е. $(2, 1)$ -модели, двойственная квантовая группа которой есть как раз наша $\mathcal{U}$ при $p = 2$ ($\mathfrak{q} = i$): эта модель описывается “симплектическими фермионами” – конформными полями, определенными на комплексной плоскости и удовлетворяющими фермионным коммутационным соотношениям [31]. Нас здесь интересует случай общих p (в соответствии с двойственностью Каждана–Люстига логарифмическая $(p, 1)$ -модель соответствует $\mathcal{U}$ при $\mathfrak{q} = e^{i\pi/p}$).

1.3.2. *Описание, обладающее явной квантово-групповой инвариантностью.* При $p > 2$ важная задача состоит в описании логарифмических $(p, 1)$ -моделей в терминах, поддерживающих явную инвариантность относительно квантовой группы. Идея явной квантово-групповой симметрии была (несколько неявно) выражена в работе [4], где было предсказано, что фермионная статистика, реализуемая при $p = 2$, обобщается в случае общих p до “парафермионной”⁷⁾ статистики; эта статистика реализуется на $p - 1$ парах полей (парах, поскольку суть квантования состоит в том, что каждой “переменной” сопоставляется “дифференцирование” по ней), которые также позволят реализовать проективные модули над триплетной алгеброй.

Соотношения (1.5) и (1.6) подсказывают эту “парафермионную” статистику логарифмических $(p, 1)$ -моделей конформной теории поля при общих p . Для ее реализации введем $p - 1$ пар полей $\zeta^m(w)$ и $\delta^m(w)$, $m = 1, \dots, p - 1$, несущих то же $\mathcal{U}$ -представление, что и z^m и ∂^m , и положим $\delta^0(w) = \zeta^0(w) = 1$ (здесь w – координата на комплексной плоскости). Поля $\zeta^m(w)$ и $\delta^m(w)$ имеют нулевой конформный вес. Перепишывая (1.7) в терминах полей как

$$\Lambda(w) = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{[n]} \zeta^n \delta^n(w)$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow E & \searrow F \\ \zeta^{p-1}(w) \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons \zeta^1(w) & & \delta^1(w) \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons \delta^{p-1}(w) \\ & \searrow F & \swarrow E \\ & 1 & \end{array}, \quad (1.13)$$

видим, что $\Lambda(w)$ – логарифмический партнер единичного оператора (ср. [4]).

1.3.3. *“Парафермионные” системы первого порядка.* На конформных полях действует дифференциал d (в терминах координаты w на комплексной плоскости); он коммутирует с действием квантовой группы на полях. Ситуация с дифференциалом d в комплексе де Рама $\Omega \overline{\mathcal{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial]$ с алгебраической стороны в точности такая же,

⁶⁾Эти три антикоммутатора не лишены связи с соотношениями в самой алгебре $\mathcal{U}$ при $p = 2$, которые можно переписать в виде $\{E, E\} = 0$, $\{\tilde{F}, \tilde{F}\} = 0$, и $\{E, \tilde{F}\} = (1 - K^2)/2i$ где $\tilde{F} = KF$, однако эти два набора антикоммутационных соотношений следует ясно различать.

⁷⁾Слово “парафермионная” здесь несколько перегружено (и, в частности, не имеет отношения к парафермионам, упоминаемым в контексте логарифмических модулей в работе [32]); хотя его употребление мотивировано работой [33], возможно, лучше говорить об “анионной” статистике.

и поэтому эти два дифференциала можно не различать. Интересно переписать (1.12) в терминах полей. Для этого введем $\eta^n(w)$ в соответствии с

$$d\delta^n(w) = [n]q^{n-1}\eta^n(w), \quad n = 1, \dots, p-1. \quad (1.14)$$

Тогда поля $\zeta^n(w)$ и $\eta^n(w)$ составляют $(p-1)$ -компонентный “парафермионный” аналог фермионной системы первого порядка. Полевая реализация одного из модулей из (1.12) имеет вид

$$\mathcal{J}(w) \equiv \sum_{n=1}^{p-1} q^{n-1} \zeta^n \eta^n(w) \xrightarrow{F} \eta^1(w) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \eta^{p-1}(w) \xleftarrow{E} e^{\sqrt{2p}\varphi(w)}, \quad (1.15)$$

где $\varphi(w)$ вводится в соответствии с $d\varphi(w) = \mathcal{J}(w)$,

$$\mathcal{J}(w) = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{[n]} d\zeta^n \delta^n(w), \quad (1.16)$$

а $e^{\sqrt{2p}\varphi(w)}$ представляет собой “скрининговый ток” – такое поле на комплексной плоскости, что взятие полюса первого порядка в операторном произведении (operator product expansion (ОРЕ)) с ним определяет оператор скрининга.

“Парафермионные” поля, обобщающие свободные фермионы, более подробно рассмотрены в приложении. Переход от фермионов ($p = 2$) к “парафермионам” (общие p) также тесно связан с алгебраическим подходом, который мы сейчас кратко напомним.

1.3.4. В алгебраических терминах идея “квантового” обобщения фермионных коммутационных соотношений была выдвинута в работе [3]. Руководящим принципом при этом является квантовая коммутативность, которая “охватывает коммутативность алгебр и супералгебр, с одной стороны, и квантовые плоскости и суперплоскости, с другой стороны” [3]. В цитируемой работе рассматривался ряд примеров, включающих и квантовую плоскость. Отметим также сходные моменты в работах [34], [35]; в частности, свободная алгебра на элементах ξ_i с соотношениями

$$\xi_i \xi_j = R_{ij}^{mn} \xi_m \xi_n$$

(где R_{ij}^{mn} – снова матричное решение уравнения Янга–Бакстера) является квантово-коммутативной в категории модулей Йеттера–Дринфельда над биалгеброй, построенной из R с помощью конструкции Фаддеева–Решетихина–Тахтаджяна, т.е. над свободной алгеброй элементов c_j^i с соотношениями

$$R_{mn}^{ij} c_k^n c_l^m = R_{lk}^{mn} c_m^i c_n^j.$$

До некоторой степени обратная логика использовалась также для нахождения решений уравнения Янга–Бакстера исходя из модулей Йеттера–Дринфельда (“янг–бактеровских” модулей) [36].

В нашем подходе, как и в работах [1], [7], квантовая группа $\mathcal{U}$ не восстанавливается из некоторой R -матрицы, но задается как основной объект (исходно определяемый двойственностью Каждана–Люстига с логарифмической конформной теорией поля). При этом мы определяем алгебру на ∂ и z с ключевым соотношением (1.5) и далее проверяем свойство $\mathcal{U}$ -модульности. Альтернативным образом можно было бы начать с подходящей суммы (“нечетных”) проективных модулей над квантовой группой и каким-то образом вывести, что эта сумма является ассоциативной алгеброй. С этой точки зрения результаты настоящей работы включают в себя нахождение генераторов ∂ и z и соотношений (1.5) и (1.6) в этой ассоциативной алгебре.

1.4. Квантовая группа $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)$. Приведем некоторые результаты, относящиеся к нашей квантовой группе $\mathcal{U}$ (1.1), (1.2) [1].

Структура алгебры Хопфа на $\mathcal{U}$ задается как

$$\begin{aligned}\Delta(E) &= E \otimes K + 1 \otimes E, & \Delta(K) &= K \otimes K, & \Delta(F) &= F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F, \\ \varepsilon(E) &= \varepsilon(F) = 0, & \varepsilon(K) &= 1, \\ S(E) &= -EK^{-1}, & S(K) &= K^{-1}, & S(F) &= -KF.\end{aligned}$$

Поэтому, в частности, условие, что некоторая алгебра V , на которой задано представление $\mathcal{U}$, является $\mathcal{U}$ -модульной алгеброй, имеет вид

$$\begin{aligned}E(vw) &= (Ev)(Kw) + v(Ew), \\ K(vw) &= (Kv)(Kw), \\ F(vw) &= F(v)w + (K^{-1}v)Fw,\end{aligned}$$

где $v, w \in V$.

Для каждого $1 \leq r \leq p-1$ проективный модуль $\mathcal{F}_r^\pm$, накрывающий неприводимое представление $\mathcal{X}_r^\pm$, имеет размерность $2p$; при $r = p$ проективный модуль совпадает с неприводимым представлением [1]. Структура проективных $\mathcal{U}$ -модулей в очень явных терминах описана в работе [1]; в работе [4] приведена классификация всех неразложимых представлений $\mathcal{U}$ (эту классификацию можно также вывести на основании более общего подхода работы [36]).

Универсальная R -матрица для $\mathcal{U}$ была найдена в работе [1]:

$$R = \frac{1}{4p} \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{a,b=0}^{4p-1} \frac{(\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1})^i}{[i]!} \mathfrak{q}^{i(i-1)/2 + i(a-b) - ab/2} E^i K^{a/2} \otimes F^i K^{b/2}. \quad (1.17)$$

Строго говоря, это выражение не является R -матрицей для квантовой группы $\mathcal{U}$ из-за входящих в него полуцелых степеней генератора K . Это подробно обсуждалось в работе [1]; существенным оказывается то обстоятельство, что так называемая матрица монодромии $M = R_{21}R$ является элементом $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$; в нашем нынешнем контексте подобный эффект состоит в том, что нет необходимости вводить полуцелые степени величины $\mathfrak{q}$, поскольку все собственные значения генератора K (равные $\mathfrak{q}^n$) возникают у нас с четными n . Таким образом, если K действует умножением на $\mathfrak{q}^{2n} = e^{2i\pi n/p}$, $0 \leq n \leq p-1$, то мы полагаем, что $K^{1/2}$ действует умножением на $\mathfrak{q}^n = e^{i\pi n/p}$.

Выше были определены q -целые $[n]$; введем, кроме того, стандартные обозначения

$$[n]! = [1][2] \dots [n], \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m]!}{[m-n]![n]!} \quad (1.18)$$

(где $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = 0$ при $m < n$).

Большая часть того, что относится к доказательству теоремы, собрана в разделе 2; некоторые замечания о матричной реализации приведены в разделе 3; расширение до дифференциальной алгебры (квантового комплекса де Рама для $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$) дается в разделе 4; следствия из “парафермионной статистики” (т.е. коммутационных соотношений в нашей $\mathcal{U}$ -модульной алгебре) для конформных полей обсуждаются в приложении.

2. q -ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ПРЯМОЙ В КОРНЕ ИЗ ЕДИНИЦЫ

Рассмотрим “квантовую прямую” $\mathbb{C}[z]$, т.е. пространство многочленов от одной переменной; “квантовость” (т.е. некоммутативность) проявляет себя не в самих многочленах, а в действующих на них операторах, поэтому “квантовая прямая” представляет собой некоторое насилие над терминологией, если только эта прямая не снабжается какими-то дополнительными структурами.

2.1. Генераторы z , ∂ и $\mathcal{U}$ -действие.

2.1.1. Определим $\mathcal{U}$ -действие на $\mathbb{C}[z]$ как

$$Ez^m = -q^m[m]z^{m+1}, \quad Kz^m = q^{2m}z^m, \quad Fz^m = [m]q^{1-m}z^{m-1}.$$

То, что это действительно $\mathcal{U}$ -действие, несложно проверить. Ясно, что единица порождает подмодуль. Структура модуля на $\mathbb{C}[z]$ выражается диаграммой (бесконечным аналогом зигзаг-модулей, рассмотренных в [4]; см. также [37])

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & & z^{2p+1} & & z^{2p-1} & \rightleftharpoons & \dots & \rightleftharpoons & z^{p+1} & & z^{p-1} & \rightleftharpoons & \dots & \rightleftharpoons & z & & \dots \\ & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & & & & \searrow & \swarrow & & & & \searrow & \swarrow & & \dots \\ & & \dots & & z^{2p} & & & & z^p & & & & & & 1 & & \dots \end{array}$$

где горизонтальные стрелки $\rightleftharpoons$ обозначают действие генераторов F (направо) и E (налево) с точностью до ненулевых множителей.

2.1.2. Выписанные выше формулы в действительности превращают $\mathbb{C}[z]$ в $\mathcal{U}$ -модульную алгебру. Элементарная проверка этого факта сводится к цепочке равенств

$$\begin{aligned} \sum E'(z^m)E''(z^n) &= z^m E(z^n) + E(z^m)K(z^n) = -q^n[n]z^m z^{n+1} - q^m[m]z^{m+1}q^{2n}z^n = \\ &= -(q^n[n] + q^{m+2n}[m])z^{m+n+1} = -q^{m+n}[m+n]z^{m+n+1} = E(z^{m+n}) \end{aligned}$$

и аналогичной цепочке для F .

2.1.3. Введем далее “дуальную” квантовую прямую $\mathbb{C}[\partial]$ – многочлены по оператору q -дифференцирования ∂ на $\mathbb{C}[z]$ – и постулируем коммутационное соотношение (1.5). Простое упражнение в рекурсии тогда приводит к соотношениям

$$\partial^m z^n = \sum_{i \geq 0} \mathfrak{q}^{-(2m-i)n+im-i(i-1)/2} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} [i]! (\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1})^i z^{n-i} \partial^{m-i}$$

(из-за $\mathfrak{q}$ -биномиальных коэффициентов суммирование по i ограничено сверху величиной $\min(m, n)$). Предвосхищая результат (1.7), мы, таким образом, имеем коммутационные соотношения между элементами проективного модуля $\mathcal{P}_1^+$.

Пусть $\mathbb{C}_{\mathfrak{q}}[z, \partial]$ обозначает ассоциативную алгебру, порожденную элементами z и ∂ с соотношением (1.5). В формулах, подобных приведенным выше, z – это оператор умножения на z , и все выражения типа $\partial^m z^n$ понимаются соответствующим образом; что же касается действия ∂ на $\mathbb{C}[z]$, то оно задается слагаемым с $i = m$ в последней формуле:

$$\partial^m (z^n) = \mathfrak{q}^{m(m-n)+m(m-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} [m]! (\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1})^m z^{n-m}.$$

2.1.4. Из рассуждений, приведенных в предыдущем пункте, следует, что

$$\begin{aligned} \partial^m z &= \mathfrak{q}^{-2m} z \partial^m + \mathfrak{q}(1 - \mathfrak{q}^{-2m}) \partial^{m-1}, \\ \partial z^n &= \mathfrak{q}^{-2n} z^n \partial + \mathfrak{q}(1 - \mathfrak{q}^{-2n}) z^{n-1}, \end{aligned}$$

и поэтому элементы ∂^p и z^p являются центральными в $\mathbb{C}_{\mathfrak{q}}[z, \partial]$.

Заметим, что люстиговский прием разрешения неопределенностей в $X \mapsto (\partial^p X - X \partial^p)/[p]$ и $X \mapsto (z^p X - X z^p)/[p]$ дает два дифференцирования алгебры $\mathbb{C}_{\mathfrak{q}}[z, \partial]$:

$$\begin{aligned} \partial^{\flat}: \quad z^n &\mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathfrak{q}^{in-i(i-1)/2} \frac{[n-i+1] \cdots [n]}{[i]} (\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1})^i z^{n-i} \partial^{p-i}, \\ \partial^n &\mapsto 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} z^n &\mapsto 0, \\ \partial^{\sharp}: \quad \partial^n &\mapsto - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathfrak{q}^{in-i(i-1)/2} \frac{[n-i+1] \cdots [n]}{[i]} (\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1})^i z^{p-i} \partial^{n-i}. \end{aligned}$$

2.1.5. Определим далее $\mathcal{U}$ -действие на $\mathbb{C}[\partial]$ следующим образом:

$$E \partial^n = \mathfrak{q}^{1-n} [n] \partial^{n-1}, \quad K \partial^n = \mathfrak{q}^{-2n} \partial^n, \quad F \partial^n = -\mathfrak{q}^n [n] \partial^{n+1}.$$

Ясно, что это в самом деле $\mathcal{U}$ -действие, что единица $1 = \partial^0$ порождает подмодуль и что это действие превращает $\mathbb{C}[\partial]$ в $\mathcal{U}$ -модульную алгебру.

2.1.6. ЛЕММА. Алгебра $\mathbb{C}_q[z, \partial]$ является $\mathcal{U}$ -модульной алгеброй.

Доказательство сводится к проверке того, что E и F сохраняют идеал, порожденный левой частью (1.5):

$$\begin{aligned} E(\partial z - (q - q^{-1}) - q^{-2}z\partial) &= E(\partial)Kz + \partial E(z) - q^{-2}(E(z)K(\partial) + zE(\partial)) = \\ &= q^2z - q\partial z^2 - q^{-2}(-qz^2q^{-2}\partial + z) = 0 \end{aligned}$$

в силу формулы из п. 2.1.3. Аналогично,

$$\begin{aligned} F(\partial z - (q - q^{-1}) - q^{-2}z\partial) &= K^{-1}(\partial)F(z) + F(\partial)z - q^{-2}(K^{-1}(z)F\partial + F(z)\partial) = \\ &= q^2\partial - q\partial^2z - q^{-2}(-q^{-2}zq\partial^2 + \partial) = 0 \end{aligned}$$

снова в силу формулы из п. 2.1.3.

2.1.7. Как отмечено во введении, свойство квантовой коммутативности (1.9) нарушается для нашей $\mathcal{U}$ -модульной алгебры, хотя в базисе мономов $z^m\partial^n$ равенство (1.9) выполнено в упомянутых выше случаях, которые, в частности, включают все пары $v = z^i\partial^j$, $w = z^m$ и все пары $v = \partial^j$, $w = z^m\partial^n$ такие, что ∂^n в wv стоит справа от z^m . Например, используя универсальную R -матрицу (1.16), вычисляем

$$R(\partial \otimes z) = \sum_{i=0}^1 \frac{(q - q^{-1})^i}{[i]!} q^{i(i-1)/2 - 2(i-1)^2} E^i\partial \otimes F^i z = q^{-2}\partial \otimes z + (q - q^{-1})1 \otimes 1,$$

и поэтому правая часть (1.9) принимает вид

$$\sum R^{(2)}(z)R^{(1)}(\partial) = q - q^{-1} + q^{-2}z\partial,$$

что действительно равно ∂z . В коммутативных подалгебрах $\mathbb{C}[z]$ и $\mathbb{C}[\partial]$ все еще проще:

$$R(z \otimes z) = \sum_{i=0}^1 \frac{(q - q^{-1})^i}{[i]!} q^{i(i-1)/2 - 2(i^2-1)} E^i z \otimes F^i z = q^2 z \otimes z + (q - q^{-1})(-q)z^2 \otimes 1,$$

что превращает (1.9) в тождество; аналогичные формулы справедливы для $R(\partial \otimes \partial)$.

2.2. Фактор-алгебра $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$. Мы видели в п. 2.1.4, что z^p и ∂^p — центральные элементы в $\mathbb{C}_q[z, \partial]$. Из формул для $\mathcal{U}$ -действия также следует, что $Ez^p = Fz^p = E\partial^p = F\partial^p = 0$. Можно поэтому взять фактор $\mathbb{C}_q[z, \partial]$ по соотношениям (1.7). Получающаяся в факторе $\mathcal{U}$ -модульная алгебра в дальнейшем обозначается как $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$.

Заметим, что дифференцирования, введенные в п. 2.1.4, не проталкиваются на $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$, поскольку, например, $\partial(z^p) = p(q - q^{-1})1$.

2.3. $\mathcal{U}$ -действие на $\mathbb{C}[z]/z^p$ в терминах q -дифференциальных операторов.

Этот пункт не является необходимым для понимания оставшейся части статьи.

2.3.1. “Скейлинговый” оператор $\mathcal{E}$. Оператор

$$\mathcal{E} = \frac{\partial z - z \partial}{q - q^{-1}} = 1 - q^{-1} z \partial$$

коммутирует с z и ∂ в соответствии с

$$\mathcal{E} z^n = q^{-2n} z^n \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} \partial^n = q^{2n} \partial^n \mathcal{E}.$$

Когда в дальнейшем речь будет идти о *действии* q -дифференциальных операторов на $\mathbb{C}[z]$, подразумевается, конечно, что $\mathcal{E}(z^n) = q^{-2n} z^n$.

Мы имеем

$$\mathcal{E}^n = 1 + \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^i q^{-ni} z^i \partial^i$$

и, в частности, $\mathcal{E}^p = 1 + z^p \partial^p$, а потому $\mathcal{E}^p = 1$ в $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$. Следовательно, оператор $\mathcal{E}$ обратим в $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$. Более того, легко видеть, что в $\mathbb{C}_q[z, \partial]$ приведенная формула для $\mathcal{E}^n$ продолжается на отрицательные n как

$$\mathcal{E}^n = 1 + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{[n-i+1] \dots [n]}{[i]!} (-1)^i q^{-ni} z^i \partial^i, \quad n \in \mathbb{Z},$$

что, в частности, дает явное представление для $\mathcal{E}^{-1}$.

Следующая лемма показывает, что, как и можно было ожидать, действие генераторов E и F на $\mathbb{C}[z]/z^p$ (почти) задается умножением на z и q -производной.

2.3.2. ЛЕММА. $\mathcal{U}$ -действие на $\mathbb{C}[z]/z^p$ задается q -дифференциальными операторами

$$E = \frac{1}{q - q^{-1}} z(1 - \mathcal{E}^{-1}), \quad K = \mathcal{E}^{-1}, \quad F = \frac{1}{q - q^{-1}} \partial.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, в силу п. 2.3.1 E , K и F являются q -дифференциальными операторами. Далее проверяем, что правые части трех выписанных формул действуют на z^m , как полагается. Этого достаточно для доказательства, однако довольно поучительно еще проверить коммутационные соотношения для $\mathcal{U}$ в терминах указанных выше E , K и F . Например,

$$\begin{aligned} EF - FE &= \frac{1}{(q - q^{-1})^2} z(1 - \mathcal{E}^{-1}) \partial - \frac{1}{(q - q^{-1})^2} \partial z(1 - \mathcal{E}^{-1}) = \\ &= \frac{1}{(q - q^{-1})^2} (1 - q^{-2} \mathcal{E}^{-1}) z \partial - \frac{1}{(q - q^{-1})^2} \partial z(1 - \mathcal{E}^{-1}) = \frac{\mathcal{E}^{-1} - \mathcal{E}}{q - q^{-1}}, \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы подставили $z \partial = q(1 - \mathcal{E})$ и $\partial z = q - q^{-1} \mathcal{E}$.

2.4. Разложение $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$. Теперь разложим p^2 -мерный $\mathcal{U}$ -модуль $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$ на неразложимые представления.

2.4.1. Проективный модуль $\mathcal{P}_1^+ \subset \overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$ отождествляется без сложностей. Для t из (1.8) имеем

$$Et = z + qz^p\partial^{p-1}, \quad Ft = \partial + qz^{p-1}\partial^p.$$

Поэтому в $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$ оказывается, что модуль $\mathcal{P}_1^+$ реализован, как указано в (1.7) (где снова горизонтальные стрелки представляют действие F и E с точностью до ненулевых множителей).

2.4.2. ТЕОРЕМА. Как $\mathcal{U}$ -модуль, $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$ имеет разложение

$$\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial] = \mathcal{P}_1^+ \oplus \mathcal{P}_3^+ \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_\nu^+,$$

где $\nu = p$, если p нечетно, и $\nu = p - 1$, если p четно.

Напомним, что $\dim \mathcal{P}_n^+ = 2p$ при $1 \leq n \leq p - 1$ и $\dim \mathcal{P}_p^+ = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При помощи “ловкости рук” удастся провести только половину доказательства; другая половина представляет собой вычисления, в одном месте достаточно хлопотные; было бы желательно редуцировать вычислительную часть.

Модуль $\mathcal{P}_1^+$ приведен в п. 5 теоремы из раздела 1 (см. формулу (1.7)). Модуль $\mathcal{P}_p^+$, возникающий в прямой сумме (1.4) при нечетных p , является неприводимым представлением с вектором старшего веса

$$t_1(s) = \sum_{i=0}^s q^{is} \begin{bmatrix} s+i-1 \\ i \end{bmatrix} z^{i+s} \partial^i, \quad p = 2s + 1.$$

Вычисление с помощью формул

$$\begin{aligned} E(z^m \partial^n) &= q^{1-n} [n] z^m \partial^{n-1} - q^{m-2n} [m] z^{m+1} \partial^n, \\ F(z^m \partial^n) &= q^{1-m} [m] z^{m-1} \partial^n - q^{n-2m} [n] z^m \partial^{n+1} \end{aligned}$$

позволяет легко проверить, что $Et_1(s) = 0$. Кроме того, $F^{p-1}t_1(s) \neq 0$,

$$F^{p-1}t_1(s) = [p-1]! \sum_{i=0}^s q^{is} \begin{bmatrix} s+i-1 \\ i \end{bmatrix} z^i \partial^{i+s}.$$

Как известно из [1], каждый из прочих модулей $\mathcal{P}_{2r+1}^+$ при $1 \leq r \leq [(p-1)/2]$ имеет структуру (мы опускаем аргументы r для краткости)

$$\begin{array}{ccc} & t_1 \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows t_{2r+1} & \\ E \swarrow & & \searrow F \\ l_{p-2r-1} \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows l_1 & & r_1 \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows r_{p-2r-1} \\ F \searrow & & \swarrow E \\ & b_1 \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows b_{2r+1} & \end{array} \quad (2.1)$$

и наша задача состоит в отождествлении всех указанных элементов в $\overline{\mathbb{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial]$.

Начнем построение модуля $\mathcal{P}_{2r+1}^+$ с его “дна”, полагая

$$b_1 = \sum_{i=0}^{p-r-1} \frac{[r+i-1]!}{[i]!} \mathfrak{q}^{ri} z^{i+r} \partial^i,$$

при этом b_1 , как легко проверить, удовлетворяет соотношению $Eb_1 = 0$; кроме того,

$$F^{2r} b_1 = [2r]! \sum_{i=0}^{p-r-1} \frac{[r+i-1]!}{[i]!} \mathfrak{q}^{ri} z^i \partial^{i+r} \neq 0,$$

а также $F^{2r+1} b_1 = 0$. Этим полностью описан лежащий на дне $(2r+1)$ -мерный подмодуль (неприводимое представление $\mathcal{X}_{2r+1}^+$).

Далее найдем такой элемент l_1 , что $b_1 = Fl_1$; очевидно, l_1 имеет общий вид

$$l_1 = \sum_{i=0}^{p-r-2} \lambda_i \mathfrak{q}^{ri} z^{i+r+1} \partial^i.$$

Условие $b_1 = Fl_1$ эквивалентно рекуррентным соотношениям (здесь мы вновь пишем аргумент r)

$$\lambda_{i+1}(r)[i+r+2] - \mathfrak{q}^{-2r-1}[i]\lambda_i(r) = \mathfrak{q}^{r+i+1} \frac{[i+r]!}{[i+1]!}. \quad (2.2)$$

Задача поиска $\lambda_i(r)$, $i \geq 1$, нетривиальна из-за наличия двух граничных условий: должны быть одновременно выполнены равенства

$$\lambda_0(r) = \mathfrak{q}^r \frac{[r-1]!}{[r+1]}, \quad (2.3)$$

$$\lambda_{p-r-2}(r) = \mathfrak{q}^{2r} \frac{[r]!}{[r+2]}. \quad (2.4)$$

Проведем рекурсию, начиная с границы $i = 0$. Задача, таким образом, состоит в нахождении $\lambda_i(r)$ при $i \geq 1$ из (2.2) и (2.3) и в проверке соотношения (2.4).

Решение особенно просто при $r = 1$, когда $\lambda_i(1) = \mathfrak{q}^2/[3]$ для всех $i \geq 1$. При $r = 2$ решение “линейно по i ”:

$$\lambda_i(2) = \left[\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right]^{-1} (\mathfrak{q}^3[i+4] + \mathfrak{q}^4[i-1]), \quad i \geq 1;$$

при $r = 3$ оно “квадратично” в подобном же смысле:

$$\lambda_i(3) = \left[\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right]^{-1} \left(\mathfrak{q}^4[i+5][i+6] + \mathfrak{q}^5[i+5] \left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right] [i-1] + \mathfrak{q}^6[i-2][i-1] \right), \quad i \geq 1,$$

и т.д. Общее решение для $i \geq 1$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_i(r) = & \left[\begin{matrix} 2r+1 \\ r \end{matrix} \right]^{-1} \left(\mathfrak{q}^{r+1} \left[\begin{matrix} i+2r \\ r-1 \end{matrix} \right] [r-1]! + \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{r-1} \mathfrak{q}^{r+n} \left[\begin{matrix} i+2r+1-n \\ r-n \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} r-1 \\ n \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} r \\ n-1 \end{matrix} \right] [r-n-1]! \prod_{j=1}^{n-1} [i-j] + \mathfrak{q}^{2r} \prod_{j=1}^{r-1} [i-j] \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в скобках можно включить в сумму по n , распространив суммирование на $n = 1$, но мы выписали этот член отдельно, потому что это единственное слагаемое, не содержащее множитель $[i - 1]$, и оно ясно показывает, что решение начинается как $\left[\begin{smallmatrix} 2r+1 \\ r \end{smallmatrix} \right]^{-1} q^{r+1} [i + r + 2] \dots [i + 2r]$ (все остальные слагаемые относительно несложно вывести отсюда, используя рекурсию). Замечательна простота, с которой проверяется граничное условие при $i = p - r - 2$: вклад вносит только одно (последнее) слагаемое, и желаемый результат следует немедленно.

Структуру общей формулы может прояснить следующий более представительный пример:

$$\begin{aligned} \lambda_i(5) = & \left[\begin{smallmatrix} 11 \\ 5 \end{smallmatrix} \right]^{-1} \left(q^6 [i + 10] [i + 9] [i + 8] [i + 7] + q^7 [i + 9] [i + 8] [i + 7] \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] [i - 1] + \right. \\ & + q^8 [i + 8] [i + 7] \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] [i - 2] [i - 1] + q^9 [i + 7] \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] [i - 3] [i - 2] [i - 1] + \\ & \left. + q^{10} [i - 4] [i - 3] [i - 2] [i - 1] \right). \end{aligned}$$

Он также иллюстрирует общую ситуацию с граничным условием при $i = p - r - 2$ (только последнее слагаемое в $\lambda_{p-7}(5)$ является ненулевым).

Определив таким образом λ_i и l_1 , получаем остальные l_n за счет действия генератора E .

Все r_n из (2.1), начиная с r_1 , для которого $Er_1 = b_{2r+1}$, определяются совершенно аналогично (или, с соблюдением должной осторожности, получаются из l_n заменой z на ∂ и обратно).

Для завершения доказательства обратимся к теории представлений квантовой группы $\mathcal{U}$ [4]. Для определенности рассмотрим случай нечетного p , $p = 2s + 1$. Уже установленные факты – это существование элементов, изображенных черными точками на рисунке и являющихся элементами неприводимого проективного модуля $\mathcal{P}_p^+$ и элементами того, что должно стать проективными модулями $\mathcal{P}_{p-2}^+, \mathcal{P}_{p-4}^+, \dots, \mathcal{P}_1^+$. Чтобы и в самом деле увидеть, что черные точки дополняются до соответствующих проективных модулей, установим наличие стрелок (отображений генератором E), идущих из некоторых элементов, изображенных светлыми точками (которые тем самым станут соответствующими t_1 из (2.1)). Градуировка, показанная на рисунке, такова, что $\deg z = 1$ и $\deg \partial = -1$. В каждой градуировке $u > 0$ имеется $p - u$ линейно независимых элементов из $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$:

$$z^u, \quad z^{u+1}\partial, \quad z^{u+2}\partial^2, \quad \dots, \quad z^{p-1}\partial^{p-1-u}.$$

В градуировке s , в частности, имеются $p - s = s + 1$ элементов, и в точности $s + 1$ черных точек построено во всех $\mathcal{P}_p^+, \mathcal{P}_{p-2}^+, \dots, \mathcal{P}_1^+$. Но в градуировке $s - 1$ имеются $s + 2$ линейно независимых элементов, лишь $s + 1$ из которых учтены – они отвечают построенным черным точкам. Пусть $\circ_{s-1}$ временно обозначает остающийся элемент – светлую точку в градуировке $s - 1$ на рисунке.

Отождествление проективных модулей в $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$.

Поскольку градуировка s исчерпывается черными точками, $E(\circ_{s-1})$ есть либо нуль, либо линейная комбинация черных точек. Но легко видеть, что в каждой градуировке имеется только один (с точностью до ненулевого множителя, разумеется) элемент, аннигилируемый генератором E , причем в градуировке $s-1$ он уже найден – это состояние b_1 (самая левая $\bullet$) из $\mathcal{P}_{p-2}^+$ (точнее, оговоримся еще раз, из того, что должно превратиться в $\mathcal{P}_{p-2}^+$, когда мы закончим доказательство). Поэтому $E(\circ_{s-1})$ является линейной комбинацией черных точек в градуировке s , но из работы [4] мы знаем, что это может быть только соответствующий элемент модуля $\mathcal{P}_{p-2}^+$ (причина в том, что это единственный элемент в данной градуировке, на котором F действует нулем оператор в факторе модуля $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$).

Коль скоро наличие стрелки $\bullet \nearrow \circ$, исходящей из *единственного* элемента в градуировке $s-1$, таким образом установлено, остальная часть модуля $\mathcal{P}_{p-2}^+$ восстанавливается автоматически [4]. В частности, имеются элементы $*$, показанные на рисунке, и поэтому есть ровно один недостающий элемент из $\overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial]$ в градуировке $s-2$, к которому мы снова применим то же рассуждение. Повторяя эти рассуждения, получаем все проективные модули из (1.4). Теорема доказана.

3. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

3.1. Для основного коммутационного соотношения (1.5) найти матричное представление несложно (оно имеет много параллелей в q -литературе, но выглядит тем не менее новым). Поскольку z и ∂ являются p -нильпотентными, представляющие их матрицы должны иметь треугольный вид и начинаться со следующей после главной диагонали; равенство (1.5) тогда фиксирует матрицы (1.10) (по модулю

преобразований подобия). Остальное представляет собой предмет прямой проверки (и, конечно, следствие того факта, что $\dim \overline{\mathbb{C}}_q[z, \partial] = p^2$).

Что касается действия $\mathcal{U}$ в явном виде (1.3), мы сначала проверяем его на генераторах ∂ и z , представленных, как в (1.10), а далее распространяем действие на $\text{Mat}_p(\mathbb{C})$ в соответствии со свойством $\mathcal{U}$ -модульности нашей алгебры.

Занятно посмотреть на то, как свойство $\mathcal{U}$ -модульности алгебры, т.е. $h(XY) = \sum h'(X)h''(Y)$, выполнено для обычного матричного умножения. Для $h = F$, например, имеем (для “неограниченных” значений i и j)

$$\begin{aligned} \left(\sum F'(X)F''(Y) \right)_{ij} &= \sum_{k=1}^p (K^{-1}(X))_{ik} (F(Y))_{kj} + \sum_{k=1}^p (F(X))_{ik} (Y)_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} q^{k-2i+1} x_{ik}[k] y_{k+1,j} - \sum_{k=1}^p q^{j-2i}[j-1] x_{ik} y_{k,j-1} + \\ &\quad + q^{1-i}[i] x_{i+1,1} y_{1,j} + \sum_{k=1}^{p-1} (q^{1-i}[i] x_{i+1,k+1} - q^{k-2i+1}[k] x_{i,k}) y_{k+1,j} = \\ &= - \sum_{k=1}^p q^{j-2i}[j-1] x_{ik} y_{k,j-1} + \sum_{k=0}^{p-1} q^{1-i}[i] x_{i+1,k+1} y_{k+1,j}, \end{aligned}$$

что совпадает с $(F(XY))_{ij}$. Формулы для $E(XY)$ столь же просты.

3.2. Примеры.

3.2.1. В качестве еще одного примера матриц как “наглядного пособия” заметим, что коинтеграл $\Lambda \in \mathcal{U}$ должен отображать любую $X \in \text{Mat}_p(\mathbb{C})$ в единичную матрицу с точностью до множителя; нормируя коинтеграл, как в работе [2],

$$\Lambda = \sqrt{\frac{p}{2}} \frac{1}{([p-1]!)^2} F^{p-1} E^{p-1} \sum_{j=0}^{2p-1} K^j,$$

получаем

$$\Lambda(X) = \mathbf{1} \left((-1)^p \sqrt{2p} \sum_{i=1}^p q^{2i-1} x_{ii} \right).$$

Легко также видеть, что в матричном виде левый нижний элемент b_1 в каждом $\mathcal{P}_{2r+1}^+$ ($r \geq 1$) является нижнедиагональной матрицей с одной ненулевой диагональю:

$$(b_1(r))_{ij} = \delta_{i,j+r} q^{2r(j-1)} [r-1]!.$$

3.2.2. Выберем “умеренно большое” значение $p = 4$ для дальнейшей иллюстрации. Идея того, как генераторы $\mathcal{U}$ действуют на матрицы, ясно видна из следующих формул:

$$(q - q^{-1})EX = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & 0 \\ -x_{11} + x_{22} & q^2 x_{12} + x_{23} & x_{13} + x_{24} & -q^2 x_{14} \\ -q^2 x_{21} + x_{32} & -x_{22} + x_{33} & q^2 x_{23} + x_{34} & x_{24} \\ x_{31} + x_{42} & -q^2 x_{32} + x_{43} & -x_{33} + x_{44} & q^2 x_{34} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1})^2 E^2 X &= \\
&= \begin{pmatrix} x_{13} & x_{14} & 0 & 0 \\ (\mathfrak{q}^2 - 1)x_{12} + x_{23} & (\mathfrak{q}^2 + 1)x_{13} + x_{24} & (1 - \mathfrak{q}^2)x_{14} & 0 \\ \mathfrak{q}^2 x_{11} - (\mathfrak{q}^2 + 1)x_{22} + x_{33} & -\mathfrak{q}^2 x_{12} + (\mathfrak{q}^2 - 1)x_{23} + x_{34} & \mathfrak{q}^2 x_{13} + (\mathfrak{q}^2 + 1)x_{24} & -\mathfrak{q}^2 x_{14} \\ -\mathfrak{q}^2 x_{21} + (1 - \mathfrak{q}^2)x_{32} + x_{43} & \mathfrak{q}^2 x_{22} - (\mathfrak{q}^2 + 1)x_{33} + x_{44} & (\mathfrak{q}^2 - 1)x_{34} - \mathfrak{q}^2 x_{23} & \mathfrak{q}^2 x_{24} \end{pmatrix}, \\
(\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1})^3 E^3 X &= \begin{pmatrix} x_{14} & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{q}^2 x_{13} + x_{24} & x_{14} & 0 & 0 \\ x_{12} - x_{23} + x_{34} & \mathfrak{q}^2 x_{24} - x_{13} & x_{14} & 0 \\ \mathfrak{q}^2 x_{11} - \mathfrak{q}^2 x_{33} - x_{22} + x_{44} & -x_{12} + x_{23} - x_{34} & -\mathfrak{q}^2 x_{13} - x_{24} & x_{14} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

и

$$FX = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} - x_{11} & (-\mathfrak{q}^2 - 1)x_{12} + x_{23} & x_{24} - \mathfrak{q}^2 x_{13} \\ (1 - \mathfrak{q}^2)x_{31} & \mathfrak{q}^2 x_{21} + (1 - \mathfrak{q}^2)x_{32} & (\mathfrak{q}^2 - 1)x_{22} + (1 - \mathfrak{q}^2)x_{33} & (1 - \mathfrak{q}^2)x_{34} - x_{23} \\ -\mathfrak{q}^2 x_{41} & x_{31} - \mathfrak{q}^2 x_{42} & (\mathfrak{q}^2 + 1)x_{32} - \mathfrak{q}^2 x_{43} & \mathfrak{q}^2 x_{33} - \mathfrak{q}^2 x_{44} \\ 0 & -\mathfrak{q}^2 x_{41} & (1 - \mathfrak{q}^2)x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}.$$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА $\Omega \overline{\mathcal{C}}_{\Omega}[Z, \partial]$

Построим квантовый комплекс де Рама $(\Omega \overline{\mathcal{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial], d)$ алгебры $\overline{\mathcal{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial]$, в котором дифференциал d коммутирует с действием $\mathcal{U}$. Это требует введения несколько необычного (в сравнении со случаем квантовой плоскости [28], [38]) действия $\mathcal{U}$ на дифференциалах $dz \equiv \zeta$ и $d\partial \equiv \delta$.

4.1. Пусть $\mathbb{C}_{\mathfrak{q}}[\zeta, \delta]$ – унитарная алгебра с соотношениями

$$\zeta^2 = 0, \quad \delta^2 = 0, \quad \delta\zeta = -\mathfrak{q}^{-2}\zeta\delta. \quad (4.1)$$

На $\mathbb{C}_{\mathfrak{q}}[z, \partial] \otimes \mathbb{C}_{\mathfrak{q}}[\zeta, \delta]$ определим дифференциал формулами

$$d(z) = \zeta, \quad d(\partial) = \delta, \quad d(\zeta) = 0, \quad d(\delta) = 0 \quad (4.2)$$

(и $d(1) = 0$) и положим

$$\begin{aligned}
\zeta z &= \mathfrak{q}^{-2} z \zeta, & \delta \partial &= \mathfrak{q}^2 \partial \delta, \\
\zeta \partial &= \mathfrak{q}^2 \partial \zeta, & \delta z &= \mathfrak{q}^{-2} z \delta.
\end{aligned} \quad (4.3)$$

Из первой строчки немедленно следует, что

$$d(z^m) = \mathfrak{q}^{1-m} [m] z^{m-1} \zeta, \quad d(\partial^n) = \mathfrak{q}^{n-1} [n] \partial^{n-1} \delta.$$

4.1.1. ЛЕММА. Алгебра с генераторами z , ∂ , ζ и δ , с соотношениями (1.6), (4.1), (4.3) и с дифференциалом (4.2) является ассоциативной дифференциальной алгеброй.

Доказательство состоит в прямой проверке⁸⁾.

⁸⁾С точки зрения сравнения с более привычным случаем дифференциального исчисления Весса–Зумино на квантовой плоскости [28], [38] может представлять интерес замечание, что ассоциативность требует обращения в нуль обоих коэффициентов ν и β в пробных соотношениях $\zeta \partial = \mu \partial \zeta + \nu z \delta$ и $\delta z = \alpha z \delta + \beta \partial \zeta$. Как бы то ни было, сходство с квантовой плоскостью, будь оно существенным или поверхностным, теряется, как только мы переходим к рассмотрению действия квантовой группы: формулы из п. 4.2 мало напоминают случай квантовой плоскости.

4.2. Далее определим действие $\mathcal{U}$ на данной алгебре, полагая

$$\begin{aligned} E\zeta &= -[2]z\zeta, & K\zeta &= \mathfrak{q}^2\zeta, & F\zeta &= 0, \\ E\delta &= 0, & K\delta &= \mathfrak{q}^{-2}\delta, & F\delta &= -\mathfrak{q}^2[2]\partial\delta. \end{aligned}$$

4.2.1. ЛЕММА. Действие $\mathcal{U}$, введенное выше, определяет дифференциальную $\mathcal{U}$ -модульную алгебру.

Доказательство сводится к проверке того факта, что действие $\mathcal{U}$ сохраняет двусторонний идеал, порожденный (4.1)–(4.3).

4.2.2. Отметим простые следствия из приведенных выше формул:

$$\begin{aligned} E^i(z^m\zeta) &= (-1)^i \mathfrak{q}^{im+i(i-1)/2} \begin{bmatrix} m+i+1 \\ i \end{bmatrix} [i]! z^{m+i}\zeta, \\ F^i(z^m\zeta) &= \mathfrak{q}^{i(1-m)+i(i-1)/2} \begin{bmatrix} m \\ m-i \end{bmatrix} [i]! z^{m-i}\zeta, \\ E^i(\partial^m\delta) &= \mathfrak{q}^{-i(m+1)+i(i-1)/2} \begin{bmatrix} m \\ m-i \end{bmatrix} [i]! \partial^{m-i}\delta, \\ F^i(\partial^m\delta) &= (-1)^i \mathfrak{q}^{i(m+2)+i(i-1)/2} \begin{bmatrix} m+i+1 \\ i \end{bmatrix} [i]! \partial^{m+i}\delta. \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} E(z^m\zeta) &= -\mathfrak{q}^m[m+2]z^{m+1}\zeta, \\ F(\partial^m\delta) &= -\mathfrak{q}^{m+2}[m+2]\partial^{m+1}\delta. \end{aligned}$$

4.3. Поскольку $d(z^p) = 0$ и $d(\partial^p) = 0$, мы видим, что структура дифференциальной $\mathcal{U}$ -модульной алгебры проталкивается на фактор по соотношениям $z^p = 0$ и $\partial^p = 0$. Введем, наконец, обозначение $\Omega\overline{\mathbb{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial]$ для получающейся в факторе дифференциальной $\mathcal{U}$ -модульной алгебры – искомого квантового комплекса де Рама:

$$\Omega\overline{\mathbb{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial] = (\overline{\mathbb{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial] \otimes \mathbb{C}_{\mathfrak{q}}[\zeta, \delta], d) / \mathcal{I},$$

где $\mathcal{I}$ – идеал, порожденный (1.5), (1.6) и (4.1)–(4.3).

Как векторное пространство, $\Omega\overline{\mathbb{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial]$ естественно разлагается на 0-, 1- и 2-формы. В $\Omega^1\overline{\mathbb{C}}_{\mathfrak{q}}[z, \partial]$ элементы $z^{p-1}\zeta$ и $\partial^{p-1}\delta$ являются когомологиями дифференциала d (“когомологические углы” модулей, изображенных в (1.12)).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже отмечалось, классический результат состоит в том, что матричная алгебра порождается (в современной терминологии) генераторами x и y конечной квантовой плоскости (при $x^p = y^p = 1$) в соответствующем корне из единицы [2]. Возможно, еще лучше этого известно, что квантовая плоскость несет действие квантовой группы $sl(2)$ [28], [38]; комбинация этих двух утверждений, разумеется, задает действие квантовой $sl(2)$ на матрицах (см. [23], [39]). Мы построили действие $\overline{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)$ при $\mathfrak{q} = e^{i\pi/p}$ на $(p \times p)$ -матрицах исходя не из квантовой плоскости,

а из q -дифференциальных операторов на “квантовой прямой”; явные формулы для этого действия, быть может, не лишены некоторого интереса.

Кроме того, построенная нами $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -модульная алгебра (наиболее “инвариантно” описываемая в терминах q -дифференциальных операторов), актуальна, в частности, ввиду соответствия Каждана–Люстига между $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ и логарифмическими конформными $(p, 1)$ -моделями. До сих пор соответствие Каждана–Люстига в логарифмических конформных теориях поля было установлено на уровне теорий представлений (квантовой группы и киральной алгебры) и модулярных преобразований (на центре квантовой группы и на обобщенных характерах киральной алгебры) [1]–[7]. Наши результаты показывают, как это соответствие можно продолжить на уровень полей; ключевое наблюдение состоит при этом в том, что объект, возникающий при квантово-групповом подходе, представляет собой алгебру с “хорошими” свойствами относительно действия $\mathcal{U}$ и с дифференциалом, который коммутирует с этим действием.

Другой возможный подход к соответствию Каждана–Люстига доставляется как раз $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -модульной алгеброй, определенной на $\text{Mat}_p(\mathbb{C})$: можно определить “спиновую цепочку,” помещая в каждый узел алгебру, порожденную z и ∂ (как мы помним, тем самым получается обобщение свободных фермионов, возникающих при $p = 2$). При выборе гамильтониана очевидная возможность состоит в поддержке его связи с вирасоровским генератором L_0 ; интересной исходной точкой на конечной решетке при этом является соотношение [4] $e^{2i\pi L_0} = \nu$, где ν – ленточный элемент из $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$. На матричном языке спиновая цепочка с $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -модульной алгеброй, порожденной z и ∂ в каждом узле, эквивалентно описывается просто действием $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ на $\text{Mat}_p(\mathbb{C}) \otimes \text{Mat}_p(\mathbb{C}) \otimes \cdots$, что может оказаться полезным в практических вычислениях. Эти конструкции представляют дополнительный интерес, поскольку соответствующее действие неполупросто (ср. с работами [40]–[43]), но в то же время все возникающие здесь неразложимые представления контролируются разложением (1.5). Кроме того, интересно также ответить на некоторые вопросы “с $\mathbb{C}_q[z, \partial]$ -стороны,” например на вопрос о том, где “скрываются” четномерные модули $\mathcal{X}_{2r}^+$ и их проективные накрывающие $\mathcal{P}_{2r}^+$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОРЕ-алгебра и парафермионная статистика

Опишем в общих чертах, как парафермионную статистику можно включить в формализм конформной теории поля.

П.1. Напоминание: операторные разложения. Для конформных полей (операторов) $A(w), B(w), \dots$, определенных на комплексной плоскости, ОРЕ-алгебра [44], [45]⁹⁾ – это правила, с помощью которых можно вычислить операторное произведение любых двух составных операторов A и B , т.е. найти выражения (называ-

⁹⁾Мы придерживаемся весьма “приземленного” способа изложения; см. [46] и цитированную там литературу по поводу гораздо более продвинутого подхода.

емые ОРЕ-полюсами) $[A, B]_n$, входящие в “разложение на малых расстояниях”

$$A(z)B(w) = \sum_{n \ll \infty} \frac{[A, B]_n(w)}{(z - w)^n}, \quad (\text{П.1})$$

если известны $[\cdot, \cdot]_m$ для набора “базисных” операторов. Под составным оператором для всяких $A(w)$ и $B(w)$ понимается $[A, B]_0(w)$, что также называется нормальным произведением и часто записывается как $AB(w)$ или $A(w)B(w)$. Правила вычисления операторных произведений имеют вид [44], [45]

$$[B, A]_n = (-1)^{AB} \sum_{\ell \geq n} \frac{(-1)^\ell}{(\ell - n)!} d^{\ell - n} [A, B]_\ell,$$

$$[A, [B, C]_0]_n = (-1)^{AB} [B, [A, C]_n]_0 + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} [[A, B]_{n-\ell}, C]_\ell,$$

где в знаковом множителе $(-1)^{AB}$ – характерном признаке ферми-статистики – A и B обозначают грассмановы четности соответствующих операторов¹⁰⁾.

Первое из приведенных правил позволяет вычислить “переставленное” операторное произведение $B(z)A(w)$, если известно $A(z)B(w)$; второе правило дает способ вычисления операторного произведения с составным оператором $[B, C]_0$. Имеется и третье правило, утверждающее, что d дифференцирует нормальное произведение $[A, B]_0$. Этих трех правил (и простого соотношения $[dA, B]_n = -(n-1)[A, B]_{n-1}$) достаточно для вычисления любого операторного произведения составных операторов [45].

Каждая из двух выписанных выше формул неизбежно содержит обращение порядка операторов (оно сопровождается знаком минус в случае фермионов); именно здесь нам предстоит сделать обобщение на случай парафермионной статистики.

П.2. Парафермионные операторные произведения. Мы будем предполагать, что поля несут действие квантовой группы и что задана R -матрица. В качестве обобщенного ОРЕ-правила “перестановки” постулируем следующее:

$$[B, A]_k = \sum_{\ell \geq k} \frac{(-1)^\ell}{(\ell - k)!} d^{\ell - k} [R^{(2)}(A), R^{(1)}(B)]_\ell, \quad (\text{П.2})$$

где $R^{(2)}$ и $R^{(1)}$ понимаются, в точности как в (1.4) (и подразумевается свидлерово суммирование), и где предполагается, что все операторные произведения в правой части известны. В качестве “составного” ОРЕ-правила, аналогично, положим

$$[A, [B, C]_0]_k = [R^{(2)}(B), [R^{(1)}(A), C]_k]_0 + \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} [[A, B]_{k-\ell}, C]_\ell. \quad (\text{П.3})$$

¹⁰⁾Мы используем обозначение d для оператора дифференцирования по координате на комплексной плоскости вместо более стандартного ∂ , чтобы не усиливать перегрузку обозначений, уже случившуюся с буквой z , которая является теперь координатой на комплексной плоскости наряду с w .

Непротиворечивость этих формул заранее не очевидна вследствие хотя бы наличия новых полей, помимо самих B и A , возникающих при действии “правых и левых коэффициентов” R -матрицы, в $R^{(2)}(B)$ и $R^{(1)}(A)$. Более того, всякий раз, когда квадрат операции перестановки двух полей не равен тождественному преобразованию (ситуация, о которой в общих терминах говорят как о дробной статистике), следует выбирать некоторые разрезы на комплексной плоскости (или некоторую накрывающую комплексной плоскости, на которой будут определены поля). Более того, предложенные ОРЕ-правила следует еще расширить на случай появления $\ln(z - w)$, что мы оставим на будущее. Тем не менее интересно посмотреть, как эта схема работает для нашей R -матрицы (1.16) и парафермионных полей, моделирующих проективный модуль (1.7).

П.3. Пример $\overline{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)$. Введем $p - 1$ пар конформных полей $\zeta^m(w)$ и $\delta^m(w)$, $m = 1, \dots, p - 1$, несущих то же действие $\mathcal{U}$, что и z^m и ∂^m из раздела 2, т.е.

$$\begin{aligned} E^i \zeta^m(w) &= (-1)^i \mathfrak{q}^{im+i(i-1)/2} \begin{bmatrix} i+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} [i]! \zeta^{m+i}(w), \\ F^i \zeta^m(w) &= \mathfrak{q}^{i(1-m)+i(i-1)/2} \begin{bmatrix} m \\ m-i \end{bmatrix} [i]! \zeta^{m-i}(w), \\ E^i \delta^m(w) &= \mathfrak{q}^{i(1-m)+i(i-1)/2} \begin{bmatrix} m \\ m-i \end{bmatrix} [i]! \delta^{m-i}(w), \\ F^i \delta^m(w) &= (-1)^i \mathfrak{q}^{im+i(i-1)/2} \begin{bmatrix} i+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} [i]! \delta^{m+i}(w), \\ K \zeta^m(w) &= \mathfrak{q}^{2m} \zeta^m(w), \quad K \delta^m(w) = \mathfrak{q}^{-2m} \delta^m(w), \end{aligned}$$

где $\delta^0(w) = \zeta^0(w) = 1$ (и, формально, $\delta^m(w) = \zeta^m(w) = 0$ при $m < 0$ или $m \geq p$). Здесь $w \in \mathbb{C}$ (комплексная плоскость, т.е. наше “пространство-время”).

Производные $d\zeta^m(w)$ и $d\delta^m(w)$ каждого поля мы будем рассматривать как 1-формы в пространстве-времени и тем самым будем понимать d как дифференциал. Дифференциал должен коммутировать с действием квантовой группы, равно как и дифференциал d из раздела 4, что позволяет перенести алгебраические конструкции, содержащие этот дифференциал, на поля.

Зафиксируем соответствие в обозначениях между разделами 2–4 и данным приложением. Имеется словарь

$$\begin{aligned} z^m|_{\text{Разд. 2}} &\leftrightarrow \zeta^m(w)|_{\text{Прил.}}, & \partial^m|_{\text{Разд. 2}} &\leftrightarrow \delta^m(w)|_{\text{Прил.}}, & m &= 0, \dots, p-1, \\ d(z^m)|_{\text{Разд. 2}} &\leftrightarrow d\zeta^m(w)|_{\text{Прил.}}, & d(\partial^m)|_{\text{Разд. 2}} &\leftrightarrow d\delta^m(w)|_{\text{Прил.}}, & m &= 1, \dots, p-1 \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

(напомним, что $\zeta^0(w) = \delta^0(w) = 1$) и, если вспомнить (1.14),

$$\partial^{m-1} \delta|_{\text{Разд. 4}} \leftrightarrow \eta^m(w)|_{\text{Прил.}}, \quad m = 1, \dots, p-1.$$

П.3.1. Или E , или F (по соглашению) ассоциируется с действием оператора скрининга в конформной теории поля (ср. с работой [1]); скрининги коммутируют с генераторами Вирасоро и поэтому не меняют конформный вес. Поскольку имеются отображения $F: \zeta^1(w) \rightarrow 1$ и $E: \delta^1(w) \rightarrow 1$, получаем, что и $\delta^n(w)$, и $\zeta^n(w)$ должны иметь конформный вес 0 (см. (1.13)).

Фиксируем базисные операторные произведения полей веса 0: $\delta^m(z)\zeta^n(w) = [m]\delta^{m,n} \ln(z-w)$. Нелогарифмические операторные произведения возникают, если взять производную $\zeta^n(w)$ или $\delta^n(z)$:

$$d\delta^m(z)\zeta^n(w) = \frac{[m]\delta^{m,n}}{z-w}, \quad \delta^m(z)d\zeta^n(w) = -\frac{[m]\delta^{m,n}}{z-w}.$$

П.3.2. Как уже отмечалось, поля дробной статистики, вообще говоря, требуют разрезов на комплексной плоскости, поскольку обнесение одного из таких полей вокруг другого не является тождественным преобразованием. Поэтому для каждой упорядоченной пары полей (A, B) следует указать, используется формула (П.2) с R или с R^{-1} . Правило, которое мы примем в данном конкретном случае, можно сформулировать на языке диаграмм типа (1.13): мы не используем формулы с R -матрицей, когда и $R^{(1)}$, и $R^{(2)}$ действуют в сторону цоколя (самого нижнего подмодуля) в (1.13). Например, это правило позволяет переписать Λ с обращенным порядком полей в нормальных произведениях:

$$\Lambda = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{[n]} [R^{(2)}(\delta^n), R^{(1)}(\zeta^n)]_0 = \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{g(i, n)}{[n]} [\delta^{n+i}, \zeta^{n+i}]_0 = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{q^{-2n}}{[n]} [\delta^n, \zeta^n]_0, \quad (\text{П.5})$$

где $R^{(2)} \sim F^i$ и $R^{(1)} \sim E^i$ действуют “наружу”; здесь использовано временное обозначение

$$g(i, n) = (q - q^{-1})^i q^{i(i-1)/2 - i^2 - i - 2n(i+n)} \begin{bmatrix} i+n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}^2 [i]!.$$

Та же стратегия приводит к транспонированному операторному произведению $\zeta^n(z)d\delta^m(w)$:

$$[\zeta^m, d\delta^n]_1 = -[R^{(2)}(d\delta^n), R^{(1)}(\zeta^m)]_1 = -\delta^{m,n} \sum_{i=0}^{p-1} g(i, n)[n+i] = -\delta^{m,n} q^{2n} [n]$$

или, в виде, более удобном для человеческого восприятия,

$$\zeta^m(z)d\delta^n(w) = -\frac{\delta^{m,n} q^{2n} [n]}{z-w}.$$

Таким образом, эффект R -матрицы сводится в этих случаях к фазовому множителю $q^{2n} = e^{2i\pi n/p}$, возникающему при перестановке.

П.3.3. В качестве следующего примера используем полученные выше элементарные операторные произведения для вычисления

$$\begin{aligned} [d\zeta^m, \Lambda]_1 &= \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{[n]} [R^{(2)}(\zeta^n), [R^{(1)}(d\zeta^m), \delta^n]_1]_0 = \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} (\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1})^i (-1)^i \mathfrak{q}^{i(i-1)/2 + 2m(i+m)} \begin{bmatrix} m+i \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} [i]! \mathfrak{q}^{2(m+i)} \zeta^m = \zeta^m. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $[\Lambda, d\zeta^m]_1 = -[R^{(2)}(d\zeta^m), R^{(1)}(\Lambda)]_1 = -[d\zeta^m, \Lambda]_1 = -\zeta^m$, потому что вклад в $[\cdot, \cdot]_1$ вносит только слагаемое в R -матрице с $i = 0$.

Далее, попытка непосредственно применить (П.3) для вычисления $[d\delta^m, \Lambda]_1$ согласно формуле

$$[d\delta^m, \Lambda]_1 = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{[n]} ([R^{(2)}(\zeta^n), [R^{(1)}(d\delta^m), \delta^n]_1]_0 + [[d\delta^m, \zeta^n]_1, \delta^n]_0)$$

приводит к запрещенному направлению отображений, реализуемых левыми и правыми коэффициентами R -матрицы; предвосхищая результат, мы можем утверждать, что это не важно в данном случае (по существу, по той причине, что d в $d\delta^m$ аннигилирует подмодуль, порожденный единицей), но тем не менее поучительно избежать запрещенных направлений, используя “переставленное” представление (П.5) для Λ :

$$\begin{aligned} [d\delta^m, \Lambda]_1 &= \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\mathfrak{q}^{-2n}}{[n]} [d\delta^m, [\delta^n, \zeta^n]_0]_1 = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\mathfrak{q}^{-2n}}{[n]} [R^{(2)}\delta^n, [R^{(1)}d\delta^m, \zeta^n]_1]_0 = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1})^i \mathfrak{q}^{i(i-1)/2 + 2m(m-i)} (-1)^i \begin{bmatrix} m-1 \\ m-i-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ m-i \end{bmatrix} [i]! \delta^m = \delta^m. \end{aligned}$$

Имеем также $[\Lambda, d\delta^m]_1 = -\delta^m$.

П.3.4. “Парафермионная” $\zeta\eta$ -система. Возвращаясь к операторному произведению из п. П.3.2, выразим производную поля $\delta^n(w)$ согласно (1.14). Тогда поля $\zeta^n(w)$ и $\eta^n(w)$, имеющие операторные произведения

$$\eta^m(z)\zeta^n(w) = \frac{\delta^{m,n}\mathfrak{q}^{1-n}}{z-w}, \quad \zeta^m(z)\eta^n(w) = -\frac{\delta^{m,n}\mathfrak{q}^{n+1}}{z-w},$$

составляют $(p-1)$ -компонентную “парафермионную” систему первого порядка; они обобщают свободные фермионы, которые действительно получаются при $p = 2$, где, кроме того, $m = n = 1$ (и $\mathfrak{q} = i$). Поведение $\eta^n(w)$ под действием $\mathcal{U}$ дается формулами из п. 4.2.2 в соответствии со словариком (П.4).

Аналогично случаю свободных фермионов мы имеем поле веса 1 (ток) $\mathcal{J} = \sum_{n=1}^{p-1} \mathfrak{q}^{n-1} [\zeta^n, \eta^n]_0$. Из (1.12) заключаем, что это поле участвует в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}(w) = \sum_{n=1}^{p-1} \mathfrak{q}^{n-1} \zeta^n \eta^n(w) & & ? \\ \searrow F & & \swarrow E \\ \eta^1(w) \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons \eta^{p-1}(w) & & \end{array}, \quad (\text{П.6})$$

где остается отождествить “когомологический угол” в терминах полей (в нашем рас-
поряжении нет $\eta^p(w)$, см. (П.4)).

“Угол” должен быть полем конформного веса 1, но не должен выражаться как
билинейная комбинация полей $\zeta^m(w)$ и $\eta^m(w)$. Такое поле естественным образом
возникает, если следовать работе [15], где киральная алгебра $W(p)$ и простран-
ства ее представлений определяются как ядро “короткого” оператора скрининга S_- ,
тогда как “длинный” скрининг S_+ действует на полях. Действие любого скрининга S
задается взятием полюса первого порядка в операторном произведении со скринин-
говым током $s(w)$, что часто выражают записью

$$S_{\pm} = \oint s_{\pm}(w)$$

(где подразумевается контурное интегрирование по w). В стандартной реализации
в терминах свободного бозонного поля $\phi(w)$ имеем $s_+(w) = e^{\sqrt{2p}\phi(w)}$ и $s_-(w) =$
 $e^{-\sqrt{2/p}\phi(w)}$. Когда $E \in \mathcal{U}$ отождествляется со скринингом S_- , мы перемасшта-
бируем градуировку, использованную на рисунке из п. 2.4, следующим образом:
полю $\mathcal{J}(w)$ из (П.6) приписывается градуировка 0, а каждая F -стрелка увеличивает
градуировку на $\sqrt{2/p}$. Тогда знак вопроса в (П.6) имеет градуировку $\sqrt{2p}$, а пото-
му когомологический угол заполняется скрининговым током $s_+(w)$. Таким образом
получаем (1.15).

Полевая реализация другого модуля из (1.12) требует рассмотрения “дуальной”
картины в терминах “парафермионной” системы первого порядка, образованной по-
лями $d\zeta^m(w)$ и $\delta^m(w)$ и со скринингом, построенным с использованием тока $\mathcal{J}(w)$ ¹¹⁾.

П.3.5. Для тока $\mathcal{J}(w)$ правила из п. П.2 приводят к стандартному операторно-
му произведению $[\eta^m, \mathcal{J}]_1 = \eta^m$. Делая перестановку, отсюда находим $[\mathcal{J}, \eta^m]_1 =$
 $-[R^{(2)}(\eta^m), R^{(1)}(\mathcal{J})]_1 = -[\eta^m, \mathcal{J}]_1 = -\eta^m$, поскольку вклад вносит только слагае-
мое из R -матрицы (1.16) с $i = 0$. Хотя ток $\mathcal{J}(w)$ не является $\mathcal{U}$ -инвариантом, он
эффективно ведет себя как инвариант в ряде операторных произведений.

Вычислим далее первый (и единственный) полюс в операторном произведении
 $\zeta^m(z)\mathcal{J}(w)$:

$$\begin{aligned} [\zeta^m, \mathcal{J}]_1 &= \sum_{n=1}^{p-1} q^{n-1} [R^{(2)}(\zeta^n), [R^{(1)}(\zeta^m), \eta^n]_1]_0 = \\ &= - \sum_{i=0}^{p-1} (q - q^{-1})^i q^{i(i-1)/2 + 2(m+i)m} (-1)^i \begin{bmatrix} i + m - 1 \\ m - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m + i \\ m \end{bmatrix} [i]! q^{2(m+i)} \zeta^m = -\zeta^m. \end{aligned}$$

Теперь легко получаем, что $[\mathcal{J}, \zeta^m]_1 = \zeta^m$.

¹¹⁾ Ни одна из этих систем свободных полей, как хорошо известно из примера при $p = 2$, не
позволяет построить “логарифмические” модули над алгеброй Вирасоро или триплетной алгеброй
(т.е. неразложимые модули, в которых L_0 недиагонализуем). Логарифмические модули требуют
такого интегрирования, как $d^{-1}\eta^n(w)$, что приводит к полям ζ^n , δ^n . Знаменательный след этого
интегрирования можно наблюдать уже на алгебраическом уровне в (1.8) в виде q -целых, стоящих
в знаменателе, и “постоянной интегрирования” $\alpha 1$.

Полезное вычисление представляет собой операторное произведение $\mathcal{J}(z)\mathcal{J}(w)$:

$$[\mathcal{J}, \mathcal{J}]_2 = \sum_{n=1}^{p-1} \mathfrak{q}^{n-1} [\mathcal{J}, \zeta^n]_1, \eta^n]_1 = \sum_{n=1}^{p-1} \mathfrak{q}^{n-1} [\zeta^n, \eta^n]_1 = - \sum_{n=1}^{p-1} \mathfrak{q}^{2n} = 1.$$

Таким образом, хотя $\mathcal{J}(w)$ является суммой $p-1$ слагаемых $\mathfrak{q}^{n-1} \zeta^n \eta^n(w)$, в операторном произведении $\mathcal{J}(z)\mathcal{J}(w)$ не возникает множителя $p-1$.

Естественно, это же наблюдается и в “дуальном” описании в терминах другой системы первого порядка, в которой ток выражается формулой (1.16). Из $[\delta^m, \mathcal{J}]_1 = -\delta^m$ и $[d\zeta^m, \mathcal{J}]_1 = d\zeta^m$ (где в последней формуле вычисление очень похоже на вычисление для $[d\zeta^m, \Lambda]_1$) следует, что $[\mathcal{J}, \mathcal{J}]_2 = - \sum_{n=1}^{p-1} \mathfrak{q}^{2n} = 1$, в точности как и для тока $\mathcal{J}$.

П.3.6. То же “суммирование к минус единице” имеет место для простейшего тензора энергии-импульса – нормального произведения

$$\mathcal{T} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{[n]} [d\zeta^n, d\delta^n]_0 = \sum_{n=1}^{p-1} \mathfrak{q}^{n-1} [d\zeta^n, \eta^n]_0.$$

Он является инвариантом действия $\mathcal{U}$, что сводит вычисления операторных произведений к стандартным, за исключением последнего шага при вычислении половины центрального заряда:

$$[\mathcal{T}, \mathcal{T}]_4 = \sum_{n=1}^{p-1} \mathfrak{q}^{n-1} (3[d\zeta^n, \eta^n]_2 + [d^2\zeta^n, \eta^n]_3) = (3-2) \sum_{n=1}^{p-1} \mathfrak{q}^{2n} = -1$$

и, аналогичным образом, $[\mathcal{T}, \mathcal{J}]_3 = -1$.

Тензор энергии-импульса можно, конечно, улучшить за счет прибавления производной тока. Такой $\mathcal{J}$ -улучшенный тензор энергии-импульса $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} - \beta d\mathcal{J}$ имеет центральный заряд $-2 - 12\beta^2 + 12\beta$, что совпадает с центральным зарядом $(p, 1)$ -модели при

$$\beta = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2p}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{p}{2}}\right).$$

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 07-01-00523) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1615.2008.2). Я признателен А. Гайнутдинову за полезные замечания и П. Пятову за указания на ряд статей.

Список литературы

- [1] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Comm. Math. Phys.*, **265**:1 (2006), 47–93; [arXiv: hep-th/0504093](#).
- [2] Г. Вейль, *Теория групп и квантовая механика*, Наука, М., 1986.
- [3] M. Cohen, S. Westreich, *J. Algebra*, **168**:1 (1994), 1–27.
- [4] А. М. Гайнутдинов, А. М. Семикхатов, И. Ю. Типунин, Б. Л. Фейгин, *ТМФ*, **148**:3 (2006), 398–427; [arXiv: math.QA/0512621](#).
- [5] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **757**:3 (2006), 303–343; [arXiv: hep-th/0606196](#).

- [6] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *J. Math. Phys.*, **48**:3 (2007), 032303; [arXiv:math.QA/0606506](#).
- [7] A. М. Семихатов, *ТМФ*, **154**:3 (2008), 510–535; [arXiv:0705.4267](#).
- [8] А. М. Гайнутдинов, *ТМФ*, **159**:2 (2009), 193–205.
- [9] H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **259**:4 (1991), 448–455.
- [10] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Nucl. Phys. B*, **477**:1 (1996), 293–318; [arXiv:hep-th/9604026](#).
- [11] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **386**:1–4 (1996), 131–137; [arXiv:hep-th/9606050](#).
- [12] M. R. Gaberdiel, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:25 (2003), 4593–4638; [arXiv:hep-th/0111260](#).
- [13] M. Flohr, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:25 (2003), 4497–4591; [arXiv:hep-th/0111228](#).
- [14] J. Fjelstad, J. Fuchs, S. Hwang, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **633**:3 (2002), 379–413; [arXiv:hep-th/0201091](#).
- [15] J. Fuchs, S. Hwang, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Comm. Math. Phys.*, **247**:3 (2004), 713–742; [arXiv:hep-th/0306274](#).
- [16] M. Flohr, H. Knuth, *On Verlinde-like formulas in $c_{p,1}$ logarithmic conformal field theories*, [arXiv:0705.0545](#).
- [17] D. Adamović, A. Milas, *Adv. Math.*, **217**:6 (2008), 2664–2699; [arXiv:0707.1857](#).
- [18] M. Flohr, M. R. Gaberdiel, *J. Phys. A*, **39**:8 (2006), 1955–1967; [arXiv:hep-th/0509075](#).
- [19] M. R. Gaberdiel, I. Runkel, *J. Phys. A*, **39**:47 (2006), 14745–14779; [arXiv:hep-th/0608184](#).
- [20] M. R. Gaberdiel, I. Runkel, *J. Phys. A*, **41**:7 (2008), 075402; [arXiv:0707.0388](#).
- [21] А. Ю. Алексеев, Д. В. Глущенков, А. В. Ляховская, *Алгебра и анализ*, **6**:5 (1994), 88–125.
- [22] R. Coquereaux, *Lett. Math. Phys.*, **42**:4 (1997), 309–328; [arXiv:hep-th/9610114](#).
- [23] L. Dabrowski, F. Nesti, P. Siniscalco, *Internat. J. Modern Phys. A*, **13**:24 (1998), 4147–4161; [arXiv:hep-th/9705204](#).
- [24] R. Coquereaux, A. O. García, R. Trincherо, *Rev. Math. Phys.*, **12**:2 (2000), 227–285; [arXiv:math-ph/9807012](#).
- [25] Y. Arike, *Symmetric linear functions of the restricted quantum group $\overline{U}_qsl_2(\mathbb{C})$* , [arXiv:0706.1113](#).
- [26] P. Furlan, L. Hadjiivanov, I. Todorov, *Lett. Math. Phys.*, **82**:2–3 (2007), 117–151; [arXiv:0710.1063](#).
- [27] D. Kazhdan, G. Lusztig, *J. Amer. Math. Soc.*, **6**:4 (1993), 905–947; 949–1011; **7**:2 (1994), 335–381; 383–453.
- [28] J. Wess, B. Zumino, *Nucl. Phys. B*, **18** Suppl. 2 (1991), 302–312.
- [29] A. Giaquinto, J. Zhang, *J. Algebra*, **176**:3 (1995), 861–881.
- [30] N. Jing, J. Zhang, *Pacific J. Math.*, **171**:2 (1995), 437–454.
- [31] H. G. Kausch, *Nucl. Phys. B*, **583**:3 (2000), 513–541; [arXiv:hep-th/0003029](#).
- [32] A. М. Семихатов, *Comm. Math. Phys.*, **286** (2009), 559–592; [arXiv:0710.2028](#).
- [33] F. A. Smirnov, *Comm. Math. Phys.*, **132**:2 (1990), 415–439.
- [34] J.-H. Lu, *Internat. J. Math.*, **7**:1 (1996), 47–70; [arXiv:q-alg/9505024](#).
- [35] T. Brzeziński, G. Militaru, *J. Algebra*, **251**:1 (2002), 279–294; [arXiv:math.QA/0012164](#).
- [36] L. A. Lambe, D. E. Radford, *J. Algebra*, **154**:1 (1993), 228–288.
- [37] K. Erdmann, E. L. Green, N. Snashall, R. Taillefer, *J. Pure Appl. Algebra*, **204**:2 (2006), 413–454; [arXiv:math.RT/0410017](#).
- [38] Ю. И. Манин, *ТМФ*, **92**:3 (1992), 425–450.
- [39] R. Coquereaux, G. E. Schieber, “Action of a finite quantum group on the algebra of complex $N \times N$ matrices”, *Particles, Fields, and Gravitation*, AIP Conf. Proc., **453**, ed. J. Rembieliński, AIP, Woodbury, N.Y., 1998, 9–23; [arXiv:math-ph/9807016](#).

- [40] H. Hinrichsen, V. Rittenberg, *Phys. Lett. B*, **304**:1–2 (1993), 115–120; [arXiv: hep-th/9301056](#).
- [41] A. Nichols, V. Rittenberg, J. de Gier, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2005, №3, 03003; [arXiv: cond-mat/0411512](#).
- [42] P. A. Pearce, J. Rasmussen, J.-B. Zuber, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2006, №11, 11017; [arXiv: hep-th/0607232](#).
- [43] N. Read, H. Saleur, *Nucl. Phys. B*, **777**:3 (2007), 263–315; [arXiv: cond-mat/0701259](#).
- [44] F. A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, K. Schoutens, *Nucl. Phys. B*, **304**:2 (1988), 348–370.
- [45] K. Thielemans, *Internat. J. Modern Phys. C*, **2**:3 (1991), 787–798.
- [46] M. Rosellen, *Int. Math. Res. Not.*, **2005**:7 (2005), 433–447; [arXiv: math.QA/0312313](#).

Поступила в редакцию 13.09.2008