Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 1, 34–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:36:00

© 2009 г. А. И. Аптекарев*, В. Г. Лысов*, Д. Н. Туляков*

ГЛОБАЛЬНЫЙ РЕЖИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ С АНГАРМОНИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ И ВНЕШНИМ ИСТОЧНИКОМ

Рассматриваются ансамбли случайных эрмитовых матриц с мерой распределения, задаваемой полиномиальным потенциалом, который возмущен внешним источником. Найдена алгебраическая функция рода ноль, описывающая предельную среднюю плотность собственных значений, в случае ангармонического потенциала и диагонального внешнего источника с двумя симметричными собственными значениями. Обсуждаются критические режимы, когда носитель плотности меняет связность или увеличивается род алгебраической функции. Как следствие, получены локальные универсальные асимптотики плотности во внутренних и граничных точках ее носителя (в случаях общего положения). Методика исследований основана на анализе асимптотики совместно ортогональных многочленов, задачах равновесия для векторных потенциалов с матрицами взаимодействия и внешними полями и матричной задаче Римана–Гильберта.

Ключевые слова: случайные матрицы, матричные модели, распределение собственных значений, броуновские мосты, совместно ортогональные многочлены.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$ – ансамбль случайных матриц, где $\mathbf{H}_n$ – пространство эрмитовых $(n \times n)$ -матриц, а μ_n – вероятностная мера на $\mathbf{H}_n$,

$$\mu_n(dM) = \frac{1}{Z_n} e^{-\text{Tr}(V(M) - AM)} dM, \quad M \in \mathbf{H}_n. \quad (1.1)$$

Здесь dM – Лебегова мера на $\mathbf{H}_n$,

$$dM := \prod_{j=1}^n dM_{jj} \prod_{1 \leq j < k \leq n} d\text{Re}(M_{jk}) d\text{Im}(M_{jk}),$$

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия.
E-mail: aptekaa@keldysh.ru

фиксированная эрмитова матрица A называется внешним источником, функция V – потенциалом, а Z_n есть нормировочная константа. Для специальных потенциалов

$$V(x) = \frac{x^2}{2} \quad (1.2)$$

ансамбли $\{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$ называются *гауссовыми ансамблями с внешним источником*. Матрица этого ансамбля является примером суммы случайной и детерминированной матриц. В самом деле, для гауссового потенциала (1.2) мы можем (ввиду равенства $\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(MA)$) дополнить показатель в (1.1) до полного квадрата, следовательно, $M = A + M_0$, где M_0 – случайная матрица гауссового унитарного ансамбля.

Проблема расчета распределения собственных значений ансамблей случайных матриц достаточно большой размерности возникла в ядерной физике при статистическом описании сложной структуры энергетических спектров тяжелых ядер [1], [2]. Современные приложения теории случайных матриц проникли во многие разделы математики и физики от распределения на критической оси нулей дзета-функции Римана до таких задач квантовой теории поля, как генерация планарных диаграмм в квантовой хромодинамике с большим числом цветов и триангуляция случайных поверхностей в двумерной квантовой гравитации (обзор современного состояния теории см. в [3]).

Непосредственную интерпретацию гауссовых матричных ансамблей (1.1), (1.2) с внешним источником можно получить, анализируя непересекающиеся траектории броуновского движения (см., например, работу [4] и приведенные в ней ссылки). Это становится понятным, если мы рассмотрим совместную плотность распределения собственных значений M , которая (в случае потенциала (1.2)) по формуле Ициксона–Зюбера [5] имеет вид

$$\frac{1}{\tilde{Z}_n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_j - \lambda_k) \det(e^{n\lambda_j a_k})_{j,k=1}^n \prod_{j=1}^n e^{-n\lambda_j^2/2}. \quad (1.3)$$

Здесь $a_1, \dots, a_n$ – собственные значения матрицы A , которые в (1.3) предполагаются различными, $\tilde{Z}_n$ – нормировочная константа.

В тоже время формула (1.3) также описывает распределение непересекающихся броуновских путей. Рассмотрим n независимых броуновских движений (на самом деле, броуновских мостов) на прямой, начинающихся в некоторых фиксированных точках $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ в момент времени $t = 0$ и заканчивающихся в некоторых фиксированных точках $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ в момент времени $t = 1$ при условии, что пути не пересекаются при $t \in (0, 1)$. Тогда по теореме Карлина–Мак-Грегора [6] совместная плотность распределения положений броуновских мостов в момент времени $t \in (0, 1)$ дается следующей формулой:

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{C_n} \det(p(s_j, x_k; t))_{j,k=1}^n \det(p(x_j, b_k; 1-t))_{j,k=1}^n, \quad (1.4)$$

где $p(x, y; t)$ есть ядро вероятности перехода случайного движения, а C_n – нормировочная константа. Рассмотрим масштабированное броуновское движение, для

которого

$$p(x, y; t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi t}} e^{-\frac{n(x-y)^2}{2t}},$$

и устремим все начальные точки s_j к началу координат. В этом случае формула (1.4) принимает вид

$$p_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{C_n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k) \det(e^{\frac{n x_j b_k}{1-t}})_{j,k=1}^n \prod_{j=1}^n e^{-\frac{n}{2t(1-t)} x_j^2},$$

что совпадает с (1.3), если мы положим

$$\lambda_j = \frac{x_j}{\sqrt{t(1-t)}}, \quad a_k = b_k \sqrt{\frac{t}{1-t}}.$$

Таким образом, в любой момент времени $t \in (0, 1)$ распределение положения n непесекающихся броуновских мостов, начинающихся в нуле и заканчивающихся в наборе предписанных точек, совпадает с распределением собственных значений гауссовых случайных матриц с внешним источником.

Распределение собственных значений матриц, являющихся возмущением диагональных матриц случайными матрицами, изучалось Пастуром [7], который получил функциональное уравнение для преобразования Коши предельной (при $n \rightarrow \infty$) средней плотности собственных значений (глобальный режим). Также статистические свойства собственных значений ансамблей с внешним источником рассматривались в работах [8]–[12].

В цикле работ [13]–[16] был проведен полный анализ различных режимов распределения собственных значений гауссовых ансамблей с диагональным внешним источником, элементы которого принимают два произвольных (симметричных относительно нуля) значения. В основе этих работ лежат связь этих ансамблей с совместно ортогональными многочленами (детали см. ниже в разделе 2) и исследование сильных асимптотик этих многочленов методом матричной задачи Римана–Гильберта (см. раздел 6). Среди результатов этих работ (детали см. в разделе 3) выделим получение алгебраического уравнения для преобразования Коши предельной средней плотности собственных значений (глобальный режим), таким образом, предельная плотность является алгебраической функцией.

Настоящая работа мотивирована недавней статьей Мак-Лафлина [17], в которой была предпринята попытка распространить результаты работы [14], касающиеся глобального и локального режимов предельного распределения собственных значений гауссовых ансамблей (1.1), (1.2) с диагональным внешним источником, на ансамбли с другими полиномиальными потенциалами, в частности на случай

$$V(x) = \frac{x^4}{4}. \quad (1.5)$$

Основной вывод работы [17] заключался в следующем. Если расстояние между значениями элементов диагонального внешнего источника A “достаточно” велико, то

преобразование Коши предельной средней плотности собственных значений ансамбля (1.1), (1.5) является алгебраической функцией с четырьмя действительными точками ветвления, а носитель плотности состоит из двух непересекающихся отрезков с концами в этих точках ветвления. Кроме того, в этом случае на ансамбль (1.1), (1.5) переносятся результаты работы [14] об универсальности локальных режимов предельного распределения собственных значений ансамблей (1.1), (1.2). Однако явное выражение для коэффициентов уравнения этой алгебраической функции, а также количественная оценка “достаточности” различия значений элементов диагонального внешнего источника A в работе [17] получены не были.

В настоящей работе мы ликвидируем этот пробел. При *любой* двух значениях (симметричных относительно нуля) элементов диагонального внешнего источника A мы находим явный вид коэффициентов алгебраического уравнения для преобразования Коши предельной средней плотности собственных значений ансамбля (1.1), (1.5). Анализ этой алгебраической функции позволяет указать критический режим, т.е. те значения диагональных элементов A , при которых происходит перестройка топологии носителя плотности (два отрезка сливаются в один отрезок). Зная эту алгебраическую функцию, мы можем в полном объеме перенести результаты анализа различных режимов распределения собственных значений гауссовых ансамблей с диагональным внешним источником на случай ансамбля (1.1), (1.5). Более того, мы распространяем эти результаты на ансамбли (1.1) с ангармоническим потенциалом

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + b \frac{x^2}{2} \quad (1.6)$$

в случае, когда преобразование Коши предельной средней плотности собственных значений является алгебраической функцией рода ноль. Точная формулировка результатов настоящей работы будет приведена ниже (см. раздел 4).

2. СВЯЗЬ С СОВМЕСТНО ОРТОГОНАЛЬНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

В работе [13] была установлена связь между матричными ансамблями с внешним источником и совместно (multiple) ортогональными многочленами. Было обнаружено, что средний характеристический многочлен

$$P_n(x) := \mathbb{E}[\det(Ix - M)] \quad (2.1)$$

ансамбля $\{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$ (1.1) удовлетворяет свойствам совместной ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) x^k e^{-[V(x) - a_i x]} dx = 0 \quad (2.2)$$

для любого собственного значения a_i матрицы A ; здесь $k = 0, \dots, n_i - 1$, где n_i есть кратность собственного значения a_i . Тем самым для определения n коэффициентов полинома P_n соотношения (2.2) дают $n_1 + n_2 + \dots = n$ линейных алгебраических уравнений. В силу (2.1) статистические свойства собственных значений связаны с распределением нулей совместно ортогональных многочленов.

Приведем основные соотношения (полученные в [13]), касающиеся статистики собственных значений случайных матриц и их связи с совместно ортогональными многочленами. Вероятностной мерой (1.1), заданной на пространстве эрмитовых матриц $\mathbf{H}_n$, соответствует вероятностная мера $\sigma(d\lambda)$ на $\mathbb{R}^n$ – совместная плотность распределения собственных значений

$$\sigma_n(d\lambda) := \frac{1}{\tilde{Z}_n} \prod_{j=1}^n w_j(\lambda_j) W(\lambda) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n, \quad (2.3)$$

где $\tilde{Z}_n$ – нормировочная константа, $W(\lambda)$ – определитель Вандермонда,

$$W(\lambda) := \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_k - \lambda_j).$$

В формуле (2.3) $w_j(x) = x^{d_j-1} e^{-(V(x)-\alpha_j x)}$, $j = 1, \dots, n$, где различные собственные значения $\{a_i\}_{i=1}^p$ матрицы A с кратностями $\{n_i\}_{i=1}^p$ формируют массив показателей $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$, например

$$\{\alpha_j\}_{j=1}^n := \{\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{n_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_p, \dots, a_p}_{n_p}\},$$

а $d_j := j - \sum_{k=1}^{i-1} n_k$ и $i := i_j$, так что $\sum_{k=1}^{i-1} n_k < j \leq \sum_{k=1}^i n_k$, и для данного $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$

$$\{d_j\}_{j=1}^n := \{\underbrace{1, 2, \dots, n_1}_{n_1}, \underbrace{1, 2, \dots, n_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{1, 2, \dots, n_p}_{n_p}\}.$$

Таким образом, соотношение (2.3) для многочлена (2.1) дает представление

$$P_n(x) = \frac{1}{\tilde{Z}_n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j) \prod_{j=1}^n w_j(\lambda_j) W(\lambda) d\lambda.$$

Зафиксируем $n = n_1 + \dots + n_p$. В линейном пространстве

$$\text{span}\{x^j e^{a_i x} \mid i = 1, \dots, p, j = 0, \dots, n_i - 1\}$$

существует единственная форма Q_{n-1} такая, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^j Q_{n-1}(x) e^{-V(x)} dx &= 0, \quad j = 0, \dots, n-2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} Q_{n-1}(x) e^{-V(x)} dx &= 1. \end{aligned}$$

Представим $n \in \mathbb{N}$ в виде $n = pm + l$. Зафиксируем следующий порядок собственных значений с учетом кратностей:

$$\begin{aligned} \{\alpha_j\}_{j=1}^n &:= \{\underbrace{a_1, \dots, a_p}_{p}, \underbrace{a_1, \dots, a_p}_{p}, \dots, \underbrace{a_1, \dots, a_l}_l\}, \\ \{d_j\}_{j=1}^n &:= \{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_p, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_p, \dots, \underbrace{m+1, m+1, \dots, m+1}_l\}, \end{aligned}$$

тем самым для $n \in \mathbb{N}$ зафиксированы кратности собственных значений ($n = n_1 + \dots + n_p$):

$$n_1 = n_2 = \dots = n_l = m + 1, \quad n_{l+1} = \dots = n_p = m.$$

Полиномы $\{P_n\}$ и формы $\{Q_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, образуют биортогональную систему:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(x) Q_k(x) e^{-V(x)} dx = \delta_{jk}.$$

Воспроизводящее ядро

$$K_n(x, y) = e^{-(V(x)+V(y))/2} \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) Q_k(y), \quad (2.4)$$

удовлетворяющее условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x, x) dx = n, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x, y) K_n(y, z) dy = K_n(x, z), \quad (2.5)$$

определяет плотность совместного распределения собственных значений (2.3):

$$\sigma_n(d\lambda) = \frac{1}{n!} \det(K_n(\lambda_j, \lambda_k))_{1 \leq j, k \leq n} d\lambda_1 \dots d\lambda_n. \quad (2.6)$$

Ансамбли $\{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$, у которых плотность совместного распределения собственных значений выражается в виде определителя (2.6) воспроизводящего ядра (2.4), удовлетворяющего (2.5), называются детерминантными ансамблями. Следствием соотношений (2.6), (2.5) является то, что все m -маргинальные плотности (m -корреляционные функции) R_m тоже имеют детерминантные представления:

$$\begin{aligned} R_m &:= \frac{m!}{(n-m)!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m} \frac{1}{\widetilde{Z}_n} \prod_{i=1}^n w_j(\lambda_j) W(\lambda) d\lambda_1 \dots d\lambda_n = \\ &= \det(K_n(\lambda_j, \lambda_k))_{1 \leq j, k \leq m} d\lambda_1 \dots d\lambda_m. \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. ГЛОБАЛЬНЫЙ И ЛОКАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ГАУССОВЫХ АНСАМБЛЕЙ С ВНЕШНИМ ИСТОЧНИКОМ

В цикле работ [13]–[16] был проведен полный анализ предельных статистических свойств собственных значений гауссова матричного ансамбля $\{\mathbf{H}_n, \mu_n\}$ (1.1) с потенциалом

$$V(M) := \frac{n}{2} M^2 \quad (3.1)$$

и внешним источником вида

$$A := n \operatorname{diag} \left(\underbrace{a, \dots, a}_{n/2}, \underbrace{-a, \dots, -a}_{n/2} \right); \quad (3.2)$$

получены масштабированные пределы при $n \rightarrow \infty$ ядер (2.4) для различных режимов.

Для так называемого глобального режима показано существование для любого $a > 0$ в (3.2) предельной средней плотности собственных значений

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} K_n(x, x) \quad (3.3)$$

и определен ее явный вид:

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} |\operatorname{Im} H_0(x_+) - \operatorname{Im} H_0(x_-)|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

где H_0 есть та ветвь алгебраической функции третьего порядка $H := \{H_j\}_{j=0}^2$, задаваемой уравнением

$$H^3 - xH^2 - (a^2 - 1)H + xa^2 = 0, \quad (3.5)$$

которая однозначно определяется условием

$$H_0(x) \asymp x + \dots, \quad x \rightarrow \infty.$$

Анализ дискриминанта уравнения (3.5),

$$x^4 - \frac{8a^4 + 20a^2 - 1}{4a^2} x^2 + \frac{(a-1)^3(a+1)^3}{a^2} = 0,$$

показывает, что при $a \in (0, 1)$ носитель плотности ρ состоит из одного отрезка $\Delta := [-e_1, e_1]$, а при $a \in (1, \infty)$ – из двух отрезков $\Delta_1 := [-e_1, -e_2]$ и $\Delta_2 := [e_2, e_1]$, где

$$e_1^2 = \frac{(v+3)^3}{8(v+1)}, \quad e_2^2 = \frac{(v-3)^3}{8(v-1)}, \quad v := \sqrt{8a^2 + 1}, \quad a > 0,$$

причем в окрестности граничных точек носителя плотность ρ стремится к нулю следующим образом:

$$\rho(x) = \frac{\rho_i}{\pi} |x \mp e_i|^{1/2} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \pm e_i, \quad i = 1, 2, \quad x \in \operatorname{supp} \rho. \quad (3.6)$$

Из глобального режима плотности распределения собственных значений в работах [14], [15] получены “универсальные” локальные масштабированные асимптотики для ядер

$$\hat{K}_n(x, y) = e^{n(g(x) - g(y))} K_n(x, y), \quad (3.7)$$

где

$$g(x) := \operatorname{Re} G_0(x) - \frac{1}{2} V(x), \quad G_0(x) := \int_{e_1}^x H_0(s) ds, \quad x \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-\infty, e_1].$$

Во внутренних точках спектра, т.е. при

$$x_0 \in \begin{cases} (-e_1, e_1), & a \in (0, 1), \\ (-e_1, -e_2) \cup (e_2, e_1), & a \in [1, \infty), \end{cases}$$

справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\rho(x_0)} \widehat{K}_n \left(x_0 + \frac{u}{n\rho(x_0)}, x_0 + \frac{v}{n\rho(x_0)} \right) = \frac{\sin(\pi(u-v))}{\pi(u-v)}, \quad (3.8)$$

а в граничных точках – соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\rho_i n)^{2/3}} \widehat{K}_n \left(e_i + \frac{u}{(\rho_i n)^{2/3}}, e_i + \frac{v}{(\rho_i n)^{2/3}} \right) = \frac{\text{Ai}(u) \text{Ai}'(v) - \text{Ai}'(u) \text{Ai}(v)}{u-v}, \quad (3.9)$$

где Ai – функция Эйри, а константа ρ_i определена в (3.6).

Асимптотике дважды масштабированного ядра (3.7) в окрестности точки соприкосновения двух отрезков носителей средней предельной плотности собственных значений посвящена работа [16].

4. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ

В статье [17] была предпринята попытка получения явных формул в виде алгебраических кривых (типа (3.5)) для предельной средней плотности (3.3) собственных значений матричных ансамблей с общими аналитическими потенциалами $V(x)$ и внешним источником вида (3.2). В частности, для потенциала

$$V(x) = n \frac{x^4}{4} \quad (4.1)$$

искомая алгебраическая функция задается уравнением

$$H^3 - x^3 H^2 + (x^2 + \alpha)H + a^2 x^3 + \beta x = 0 \quad (4.2)$$

с некоторыми $\alpha(a)$ и $\beta(a)$. В работе [17] для этого потенциала доказано следующее утверждение (см. теоремы 6.1 и 8.1).

ТЕОРЕМА 4.1 [17]. *Для достаточно больших значений параметра a внешнего источника (3.2) существует предельная средняя плотность (3.3) собственных значений $\rho(x)$, определяемая формулой (3.4), в которой $H_0(x)$ есть (стремящаяся к бесконечности при $x \rightarrow \infty$) ветвь алгебраической кривой (4.2), с некоторыми $\alpha(a)$ и $\beta(a)$. При этом носитель плотности ρ состоит из двух симметричных отрезков $[-e_1, -e_2] \cup [e_2, e_1]$ при некоторых e_1 и e_2 .*

Целью настоящей работы является получение явных выражений (в виде алгебраических функций, подобных (3.5)) для предельных средних плотностей $\rho(x)$ матричных ансамблей (1.1) с внешним источником (3.2) и полиномиальными потенциалами (см. (1.6))

$$V(x) := nT(x), \quad T(x) := \frac{x^4}{4} + b \frac{x^2}{2}, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

В частности, для потенциала (4.1) нами получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.2. *При любом значении параметра $a > 0$ внешнего источника (3.2) имеют место следующие утверждения.*

1. Существует предельная средняя плотность собственных значений $\rho(x)$ (см. (3.3)) для ансамбля случайных матриц, заданного формулами (1.1), (3.2), (4.1).

2. Явный вид плотности $\rho(x)$ задается формулой (3.4), где $H_0(x)$ – ветвь алгебраической функции (4.2) такая, что $H_0(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, причем в (4.2)

$$\alpha(a) := \frac{1}{9c} (a - 4c^3)(4 + 3c^4), \quad \beta(a) := \frac{c(a - c^3)(4 + 3c^4)}{3}, \quad (4.4)$$

а $c = c(a)$ есть единственный положительный корень уравнения

$$2c^6 - ac^3 + 3c^2 - a^2 = 0 \quad \text{при} \quad a > 0. \quad (4.5)$$

3. Существует критическое значение a_0 такое, что при $a \in (0, a_0]$ носитель плотности $\rho(x)$ состоит из одного отрезка $[-e_1, e_1]$, а при $a \in (a_0, \infty)$ – из двух отрезков $[-e_1, -e_2] \cup [e_2, e_1]$; критическое значение

$$a_0 = \frac{2}{3} \sqrt[4]{6} \simeq 1.043 \dots, \quad (4.6)$$

а концы отрезков находятся по формулам

$$e_{1,2}^2 = \frac{3c^4 + 21c - 1 \pm \sqrt{1029ac^5 - 1029c^8 + 485c^4 + 22ac + 1}}{24c^2}, \quad (4.7)$$

где знак плюс соответствует e_1 , а знак минус – e_2 , поведение плотности в концах отрезков (при $a \neq a_0$) определяется асимптотикой (3.6).

Отметим, что теорема 4.2 дает явное выражение для кривой (4.2) при любом a , что существенно уточняет теорему 4.1, утверждающую лишь существование этой кривой для больших a . Кроме того, в теореме 4.2 предъявлено точное значение (4.6) критического параметра a_0 , при переходе через который носитель плотности собственных значений претерпевает перестройку.

В общем случае потенциала (4.3) алгебраическая функция (4.2) принимает вид

$$H^3 - (x^3 + bx)H^2 + (x^2 + \alpha)H + a^2x^3 + \beta x = 0, \quad (4.8)$$

где значения α, β теперь зависят от двух параметров a и b . Однако для ангармонического потенциала (4.3) не для всех значений $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$ глобальный режим распределения собственных значений описывается алгебраической кривой рода ноль (4.8). Последнее можно гарантировать для a и b , лежащих вне криволинейного треугольника Δ_{cr} с вершинами в точках

$$V_1 := (-\sqrt{3}, 3^{-3/4}), \quad V_2 := (-2, 0), \quad V_3 := (-\sqrt{6}, 0) \quad (4.9)$$

на плоскости переменных (b, a) , ограниченного осью $a = 0$ и аналитическими дугами (см. рисунок)

$$\widehat{V_2 V_1}: a_m(b) := \frac{\sqrt{6b^3 - 27b - 6\sqrt{b^6 - 9b^4 + 27b^2 - 27}}}{9}, \quad b \in (-2, -\sqrt{3}), \quad (4.10)$$

Критические режимы $a(b)$ для потенциала $V(x) := x^4/4 + bx^2/2$.

и

$$\widehat{V_3 V_1}: \quad \begin{aligned} a_M(s) &:= \frac{(3s^2 - 2)\sqrt{s^3(3s^2 + 1)}}{\sqrt{2}}, \\ b_M(s) &:= -\frac{9s^3}{2} + \frac{3s}{2} - \frac{1}{s}, \end{aligned} \quad s \in \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \quad (4.11)$$

Сформулируем результат, обобщающий теорему 4.2.

ТЕОРЕМА 4.3. Для ансамбля случайных матриц (1.1) со значениями параметров a и b внешнего источника (3.2) и потенциала (4.3), лежащими вне треугольника $\triangle_{\text{cr}}$ (4.9)–(4.11), существует предельная средняя плотность собственных значений $\rho(x)$ вида (3.4), где $H_0(x)$ – ветвь алгебраической функции (4.8) такая, что $H_0(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. При этом в (4.8)

$$\begin{aligned} \alpha(a, b) &:= \frac{(1-u)(c^4 + 2c^4u - u^2)^2}{c^2u^3}, \\ \beta(a, b) &:= -\frac{(3c^4 - u)(c^4 + 2c^4u - u^2)^2}{c^4u^2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $u := 2c^4 + ac$, а $c = c(a, b)$ – максимальный (положительный) при $a > 0$ корень уравнения

$$2c^6 + 2bc^4 + 3c^2 - ac^3 + bac - a^2 = 0, \quad a > 0. \quad (4.13)$$

Носитель плотности $\rho(x)$ имеет следующую структуру:

1) при $b > -\sqrt{3}$ и $a \in (0, a_{\text{cr}}(b)]$ носитель состоит из одного отрезка, а при $a \in (a_{\text{cr}}(b), \infty)$ – из двух отрезков; здесь критическая кривая $a_{\text{cr}}(b)$ есть (см. рисунок)

$$a_{\text{cr}}(b) := i \left[\left(\frac{b - 2i\sqrt{6}}{6} \right)^{3/2} - \left(\frac{b + 2i\sqrt{6}}{6} \right)^{3/2} \right] = 2 \operatorname{Im} \left[\left(\frac{b + 2i\sqrt{6}}{6} \right)^{3/2} \right]; \quad (4.14)$$

2) при $b \in [-2, -\sqrt{3}]$ и $a \in (0, a_m(b)]$ носитель состоит из одного отрезка; здесь критическая кривая $a_m(b)$ определена в (4.10);

3) при $b \in [-\sqrt{6}, -\sqrt{3}]$ и $a \in (a_M(b), \infty)$ носитель состоит из двух отрезков; здесь критическая кривая $a_M(b)$ определена в (4.11);

4) при $b < -\sqrt{6}$ и $a > 0$ носитель состоит из двух отрезков.

Концы отрезков (при любых a, b вне треугольника Δ_{cr}) являются действительными корнями уравнения

$$4x^4 - \frac{c^2(8u^2 + 20u - 1)}{u^2} x^2 + \frac{4c^4(u - 1)^3}{u^3} = 0. \quad (4.15)$$

Поведение плотности в концах отрезков (при $a = a(b)$ вне критических кривых) определяется асимптотикой (3.6).

Отметим также, что, зная явный вид плотности ρ , мы можем перенести результаты работ [14], [15] об универсальности локальных режимов ансамблей с внешним источником (3.2) на потенциал (4.3). Справедлива

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть ансамбль случайных матриц задается формулой (1.1), причем значения параметров a, b внешнего источника (3.2) и потенциала (4.3) лежат вне треугольника Δ_{cr} . Пусть $\hat{K}_n(x, y)$ – воспроизводящее ядро (3.7), где $K_n(x, y)$ – ядро из детерминантных формул (2.6), (2.7). Тогда для $\hat{K}_n(x, y)$ во внутренних точках носителя плотности $\rho(x)$ справедлива локальная универсальная асимптотика (3.8), а в граничных точках носителя – локальная универсальная асимптотика (3.9).

В следующих двух разделах мы вкратце обсудим вопрос о том, как наличие алгебраической функции вида (3.5), (4.2) или (4.8) позволяет доказать существование пределов типа (3.3) и (3.8), (3.9). Речь пойдет о равновесии векторного потенциала (раздел 5) и о матричной задаче Римана–Гильберта, связанной с совместно ортогональными полиномами (2.2) (раздел 6). Более детально связь с матричной задачей Римана–Гильберта освещена в работах [15], [17]. В итоге этого обсуждения мы сформулируем некоторую обратную задачу поиска алгебраической кривой рода ноль, решение которой приведет к доказательству теорем 4.2–4.4.

Далее, в разделе 7 мы приведем общее решение этой обратной задачи поиска уравнения римановой поверхности для алгебраической функции третьего порядка рода ноль, у которой известны несколько членов разложений ее ветвей в окрестности бесконечной точки.

Наконец, в заключительном разделе 8 мы рассмотрим примеры конкретных полиномиальных потенциалов и соответствующих им алгебраических функций (это завершит доказательство теорем 4.2–4.4).

5. СЛАБАЯ АСИМПТОТИКА СОВМЕСТНО ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И РАВНОВЕСИЕ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Предельные (при $n \rightarrow \infty$) свойства собственных значений случайных матричных ансамблей (1.1) (в силу (2.1)) связаны с предельным распределением нулей совместно ортогональных многочленов P_n (см. (2.2)). Обозначим через ν_{P_n} меру, равномерно распределенную в нулях полинома совместной ортогональности P_n :

$$\nu_{P_n}(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(z - z_n^{(k)}), \quad P_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_n^{(k)}). \quad (5.1)$$

Слабые пределы меры ν_{P_n} связаны с глобальным режимом распределения собственных значений. С другой стороны, слабые пределы мер, считающих нули совместно ортогональных многочленов, активно изучались в теории рациональных аппроксимаций аналитических функций, где совместно ортогональные многочлены возникают как знаменатели рациональных аппроксимаций Эрмита–Паде, а предельное (при $n \rightarrow \infty$) поведение их нулей (т.е. полюсов аппроксимаций) дает информацию о сингулярностях функции [18]. Одной из наиболее известных общих систем совместно ортогональных многочленов, пришедших из теории аппроксимаций, является так называемая система Анжелеско:

$$\int P_n(x) x^k e^{-V_i(x)} dx = 0, \quad k = 0, \dots, n_i, \quad i = 1, 2, \quad n_1 + n_2 = n, \quad (5.2)$$

где носители весовых функций $e^{-V_i(x)}$ суть непересекающиеся интервалы Δ_i , $i = 1, 2$, действительной оси т.е. $V_i(x) := +\infty$ на $\mathbb{R} \setminus \Delta_i$, где $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$. Нетрудно убедиться, что n_1 нулей полинома P_n лежат на отрезке Δ_1 , а другие n_2 нулей – на отрезке Δ_2 .

Задача нахождения слабого предела меры ν_{P_n} для системы Анжелеско была решена в работе [19], где доказано (применительно к рассматриваемому здесь диагональному случаю $n_1 = n_2 = n/2$), что

$$\nu_{P_n} \xrightarrow{*} \lambda, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.3)$$

где носитель меры λ состоит из двух отрезков:

$$S(\lambda) := \text{supp } \lambda = \Delta_1^* \cup \Delta_2^*, \quad \Delta_i^* \subset \Delta_i, \quad i = 1, 2,$$

а компоненты $\lambda_i = \lambda|_{\Delta_i}$ предельной меры $\lambda = \{\lambda_1 + \lambda_2\}$ имеют равные массы

$$|\lambda_i| := \int d\lambda_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2,$$

и однозначно определяются следующими соотношениями равновесия:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{P}^{\lambda_1} + \mathcal{P}^{\lambda_2} &\begin{cases} = \gamma_1 & \text{на } \Delta_1^* = S(\lambda_1), \\ \geq \gamma_1 & \text{на } \Delta_1, \end{cases} \\ 2\mathcal{P}^{\lambda_2} + \mathcal{P}^{\lambda_1} &\begin{cases} = \gamma_2 & \text{на } \Delta_2^* = S(\lambda_2), \\ \geq \gamma_2 & \text{на } \Delta_2; \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

здесь $\mathcal{P}^\lambda$ есть логарифмический потенциал меры λ ,

$$\mathcal{P}^\lambda(z) := \int \ln \frac{1}{|z-x|} d\lambda(x),$$

а γ_j – некоторые константы (так называемые константы равновесия), $j = 1, 2$.

Соответственно, главный член асимптотики совместно ортогонального многочлена P_n выражается как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln |P_n|^{1/n} = -\mathcal{P}^\lambda \quad \text{на } K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\Delta_1^* \cup \Delta_2^*\}. \quad (5.5)$$

В работе [20] было замечено (см. также [21] и [17]), что существуют константы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ (определяемые по константам равновесия γ_1 и γ_2 из (5.4): $2\varkappa_1 + \varkappa_2 = \gamma_1$, $2\varkappa_2 + \varkappa_1 = \gamma_2$) такие, что функции

$$g_0 := \mathcal{P}^\lambda - \varkappa_1 - \varkappa_2, \quad g_j := -\mathcal{P}^{\lambda_j} + \varkappa_j, \quad j = 1, 2, \quad (5.6)$$

являются тремя ветвями гармонической функции $g := (g_0, g_1, g_2)$, однозначной на трехлистной римановой поверхности $\mathfrak{R}$, образованной подклейкой к листу $\mathfrak{R}^{(0)} := \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_1^* \cup \Delta_2^*)$ по соответствующим разрезам листов $\mathfrak{R}^{(j)} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j^*$, $j = 1, 2$:

$$\mathfrak{R} := \bigcup_{j=0}^2 \mathfrak{R}^{(j)}. \quad (5.7)$$

При этом функция

$$G := g + i\tilde{g}, \quad (5.8)$$

где $\tilde{g}$ есть гармоническая функция, сопряженная к g , является абелевым интегралом третьего рода на $\mathfrak{R}$, имеющим только логарифмические сингулярности (расположенные в бесконечных точках всех листов) с вычетами:

$$G(z) \asymp \begin{cases} -\ln z, & z \rightarrow \infty^{(0)}, \quad j = 0, \\ \frac{1}{2} \ln z, & z \rightarrow \infty^{(j)}, \quad j = 1, 2, \end{cases} \quad (5.9)$$

а ее производная является однозначной мероморфной (рациональной) функцией на $\mathfrak{R}$,

$$H(z) := G'(z) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{R}), \quad (5.10)$$

с фиксированным поведением на бесконечности:

$$H(z) \asymp \begin{cases} -\frac{1}{z}, & z \rightarrow \infty^{(0)}, \quad j = 0, \\ \frac{1}{2z}, & z \rightarrow \infty^{(j)}, \quad j = 1, 2. \end{cases} \quad (5.11)$$

Таким образом, чтобы найти равновесную меру в задаче (5.4) (а тем самым и главный член асимптотики (5.5)), достаточно явно определить абелев интеграл (5.8), (5.9) или алгебраическую функцию (5.10), (5.11) и проверить, что скачок H на Δ_j^* , $j = 1, 2$, является чисто мнимым и его мнимая часть знакопостоянна (для данной задачи проверки этих признаков достаточно).

В настоящей работе весовые функции, определяющие в (5.2) многочлен совместной ортогональности P_n , сами зависят от n (так называемые переменные веса):

$$V_1(x) = n(T(x) + ax), \quad V_2(x) = n(T(x) - ax). \quad (5.12)$$

В этом случае для достаточно больших a в векторные соотношения равновесия (5.4) для меры $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ добавляется действие внешнего поля, и они принимают вид

$$\begin{aligned} 2\mathcal{P}^{\lambda_1}(x) + \mathcal{P}^{\lambda_2}(x) + T(x) + ax &\begin{cases} = \gamma_1, & x \in \Delta_1^* = S(\lambda_1), \\ \geq \gamma_1, & x \in \mathbb{R}^-, \end{cases} \\ 2\mathcal{P}^{\lambda_2}(x) + \mathcal{P}^{\lambda_1}(x) + T(x) - ax &\begin{cases} = \gamma_2, & x \in \Delta_2^* = S(\lambda_2), \\ \geq \gamma_2, & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Соответственно (см. (5.6)), однозначную гармоническую функцию $g := (g_0, g_1, g_2)$ на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ (5.7), формируют ветви

$$g_0 := \mathcal{P}^\lambda + T(x) - \varkappa_1 - \varkappa_2, \quad g_1 := -\mathcal{P}^{\lambda_1} + a + \varkappa_1, \quad g_2 := -\mathcal{P}^{\lambda_2} - a + \varkappa_2. \quad (5.14)$$

В свою очередь функция g порождает абелев интеграл третьего рода G (см. (5.8)), производная которого есть мероморфная на $\mathfrak{R}$ функция (см. (5.10)) с фиксированным поведением в бесконечности: $H(z) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{R})$,

$$H(z) \asymp \begin{cases} T'(z) - \frac{1}{z}, & z \rightarrow \infty^{(0)}, \\ a + \frac{1}{2z}, & z \rightarrow \infty^{(1)}, \\ -a + \frac{1}{2z}, & z \rightarrow \infty^{(2)}. \end{cases} \quad (5.15)$$

Тем самым, построив в явном виде решение задачи (5.15), т.е. найдя уравнение на алгебраическую функцию $H(z)$, и убедившись, что скачок H на Δ_j^* , $j = 1, 2$, имеет знакопостоянную мнимую часть, мы получим решение задачи равновесия (5.13) и, следовательно, определим слабый предел (см. (5.3)) считающей нули меры ν_{P_n} (см. (5.1)) и главный член (5.5) асимптотики совместно ортогонального многочлена P_n (см. (5.2), (5.12)).

Если предельная средняя плотность собственных значений $\lambda(x)$ сосредоточена на одном отрезке (например, в случае потенциалов (3.1) и (4.1) при достаточно малых a в (3.2)), векторные соотношения равновесия (5.13) для меры λ могут быть обобщены следующим образом. Пусть

$$\mathcal{E} := \{E\} \quad (5.16)$$

– класс симметричных относительно действительной оси жордановых (кусочно-аналитических) кривых E , соединяющих точки $+i\infty$ и $-i\infty$. Введем обозначение для полуосей, на которые E разбивает действительную ось:

$$\Delta_1^E := (-\infty, e_E), \quad \widetilde{\Delta_2^E} := (e_E, +\infty), \quad \text{где } e_E := E \cap \mathbb{R}. \quad (5.17)$$

На множествах $\{\Delta_1^E, \widetilde{\Delta_2^E}, E\}$ определим класс мер

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E := \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\}: \quad & S(\sigma_1) \subseteq \Delta_1^E, \quad S(\sigma_2) \subseteq \widetilde{\Delta_2^E}, \quad S(\sigma_3) \subseteq E, \\ & |\sigma_1| + |\sigma_2| = 1, \quad |\sigma_1| - |\sigma_3| = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Для любой кривой $E \in \mathcal{E}$ существует единственный вектор мер $(\lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \mu_1) \in \mathcal{L}_E$, удовлетворяющий следующей системе соотношений равновесия:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &:= 2\mathcal{P}^{\lambda_1}(z) + 2\mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_2}(z) - \mathcal{P}^{\mu_1}(z) + T(z) + az \begin{cases} = \gamma_1, & z \in S(\lambda_1), \\ \geq \gamma_1, & z \in \Delta_1^E, \end{cases} \\ \mathcal{U}_2 &:= \mathcal{P}^{\lambda_1}(z) + 2\mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_2}(z) + \mathcal{P}^{\mu_1}(z) + T(z) - az \begin{cases} = \gamma_2, & z \in S(\tilde{\lambda}_2), \\ \geq \gamma_2, & z \in \widetilde{\Delta_2^E}, \end{cases} \\ \mathcal{U}_E &:= -\mathcal{P}^{\lambda_1}(z) + 2\mathcal{P}^{\tilde{\lambda}_2}(z) + 2\mathcal{P}^{\mu_1}(z) + 2a \operatorname{Re} z \begin{cases} = \gamma_1 - \gamma_2, & z \in S(\mu_1), \\ \geq \gamma_1 - \gamma_2, & z \in E, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.19)$$

где γ_1 и γ_2 – некоторые константы. Выберем экстремальную кривую $E \in \mathcal{E}$ так, чтобы компоненты равновесной векторной меры (5.19) определяли предельную среднюю плотность собственных значений $\lambda(x)$: $\lambda = \lambda_1 + \tilde{\lambda}_2$, для чего потребуем выполнения условия равновесия компакта $S(\mu_1) \subset E$ в поле зарядов и внешних полей системы (5.19):

$$\frac{\partial \mathcal{U}_E}{\partial n_+} = \frac{\partial \mathcal{U}_E}{\partial n_-} \quad \text{на } S(\mu_1). \quad (5.20)$$

Отметим, что если для некоторых входных данных задачи равновесия (5.16)–(5.20) (т.е. для внешних полей, задаваемых $T(z), a$) найдется кривая $E \in \mathcal{E}$ такая, что в третьем соотношении равновесия системы (5.19) на E будет выполняться строгое неравенство, то $S(\mu_1) = \emptyset$, следовательно, $|\mu_1| = 0$, откуда $|\lambda_1| = |\tilde{\lambda}_2| = 1/2$, и задача (5.16)–(5.20) вырождается в более простую задачу (5.13), где $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1$, $\lambda_2 = \tilde{\lambda}_2$.

Пусть $A := \{a_{ij}\}$ – неотрицательно определенная матрица. Для векторной меры $\vec{\sigma} = \{\sigma_i\}$ с матрицей взаимодействия A и вектором внешних полей $\vec{Q} = \{Q_i\}$

определим энергию (см. работу [22])

$$I_A^Q(\vec{\sigma}) = \sum_i \sum_j a_{ij} I(\sigma_i, \sigma_j) + 2 \sum_i \int Q_i d\sigma_i, \quad (5.21)$$

где $I(\sigma_i, \sigma_j) = \iint \ln |x - t|^{-1} d\sigma_i(x) d\sigma_j(t)$ – взаимная энергия мер (σ_i, σ_j) .

Свяжем с классом мер (5.18) следующие матрицу взаимодействия и вектор внешних полей:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{Q} = \{T(z) + az, T(z) - az, 2a \operatorname{Re} z\}.$$

Тогда решение $\vec{\lambda} := (\lambda_1, \tilde{\lambda}_2, \mu_1)$ задачи равновесия (5.16)–(5.20) также является седловой точкой функционала энергии (5.21):

$$I_A^Q(\vec{\lambda}) = \max_{E \in \mathcal{E}} \min_{\vec{\sigma} \in \mathcal{L}_E} I_A^Q(\vec{\sigma}). \quad (5.22)$$

Задачи равновесия векторного потенциала вида (5.16)–(5.20) с “перетекающими” между пластинами зарядами (как в (5.18)) или их эквивалентные формулировки вида (5.21), (5.22) возникают при описании слабой асимптотики аппроксимаций Эрмита–Паде аналитических вектор-функций с точками ветвления (см. [23], а также [24]).

6. СИЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА И МАТРИЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

Для нахождения более точных сильных асимптотик совместно ортогональных многочленов и порождаемых ими ядер (2.4) мы используем метод матричной задачи Римана–Гильберта [25]. Следуя оригинальной постановке (для ортогональных многочленов) этой задачи из работы [26], в случае совместно ортогональных многочленов (см. [27]) мы имеем, что матрица-функция

$$Y := \begin{pmatrix} P_{n_1, n_2} & \mathcal{C}(P_{n_1, n_2} e^{-V_1}) & \mathcal{C}(P_{n_1, n_2} e^{-V_2}) \\ c_1 P_{n_1-1, n_2} & c_1 \mathcal{C}(P_{n_1-1, n_2} e^{-V_1}) & c_1 \mathcal{C}(P_{n_1-1, n_2} e^{-V_2}) \\ c_2 P_{n_1, n_2-1} & c_2 \mathcal{C}(P_{n_1, n_2-1} e^{-V_1}) & c_2 \mathcal{C}(P_{n_1, n_2-1} e^{-V_2}) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

является решением следующей краевой задачи:

- 1) Y аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,
- 2) Y на $\mathbb{R}$ имеет непрерывные граничные значения такие, что

$$Y_+ = Y_- \begin{pmatrix} 1 & e^{-V_1} & e^{-V_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

3) $Y(z) = (I + O(z^{-1})) \operatorname{diag}(z^n, z^{-n_1}, z^{-n_2})$ при $z \rightarrow \infty$.

В формуле (6.1) P_{n_1, n_2} – совместно ортогональный многочлен (5.2) с индексом $n = (n_1, n_2)$, $\mathcal{C}(f)$ – преобразование Коши функции f ,

$$(\mathcal{C}f)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t - z} dt,$$

а константы c_1, c_2 выбраны так, чтобы удовлетворить третье условие в (6.2). Во втором условии в (6.2) функции V_j взяты из (5.12). Отметим, что, как получено в работе [13], для воспроизводящего ядра (2.4) справедливо равенство

$$K_n(x, y) = \frac{e^{-n(T(x)+T(y))}}{2\pi i(x-y)} \{e^{nay} [Y^{-1}(y)Y(x)]_{21} + e^{-nay} [Y^{-1}(y)Y(x)]_{31}\}.$$

Таким образом, чтобы получить асимптотики для P_n, K_n при $n \rightarrow \infty$, нужно найти аппроксимацию решения задачи (6.2) при больших n . Для этого эквивалентными преобразованиями приведем краевую задачу (6.2) к краевой задаче со скачком на некоторой системе контуров Σ так, чтобы новый скачок при $n \rightarrow \infty$ равномерно на Σ стремился к единичной матрице:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\in H(\mathbb{C} \setminus \Sigma), \\ Y \rightarrow \mathcal{I}: \quad \mathcal{I}_+ &= \mathcal{I}_- \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad \text{на } \Sigma, \\ \mathcal{I}(\infty) &= I. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Про решение последней задачи можно сказать, что оно при $n \rightarrow \infty$ стремится к единичной матрице равномерно в $\overline{\mathbb{C}}$:

$$\mathcal{I} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\overline{\mathbb{C}}} I. \tag{6.4}$$

Обращая эквивалентные преобразования, возвращаясь назад от $\mathcal{I}$ к Y , из (6.3) получим асимптотику для элементов матрицы Y .

Важным элементом в этой схеме является “правильная” перенормировка матрицы Y , устраняющая ее сингулярность в точке ∞ . Это делается с помощью главного члена асимптотики (5.5). Искомая перенормировка матрицы Y достигается ее умножением справа на матрицу

$$\operatorname{diag}\{e^{n(G_0(z)-T(z))}, e^{n(G_1(z)-az)}, e^{n(G_2(z)+az)}\},$$

а слева – на диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят константы (такую, чтобы полученная матрица удовлетворяла третьему условию в (6.3)).

Итак, получение явного вида стандартных функций G, H (см. (5.8)–(5.10)) римановой поверхности $\mathfrak{R}$ является важным этапом решения задачи (6.2) при $n \rightarrow \infty$: это дает явный вид главного члена асимптотики P_n для перенормировки Y .

Как уже отмечалось в работе [17], остальные шаги нахождения асимптотики Y при $n \rightarrow \infty$ (для общего класса потенциалов (4.3), обеспечивающих условие

$\text{gen } \mathfrak{R} = 0$) буквально повторяют соответствующие шаги решения (из работ [14], [15]) для гауссова потенциала $T(x) = x^2/2$. Поэтому для доказательства теорем 4.2–4.4 нужно найти алгебраическую функцию $H(z)$, удовлетворяющую (5.15), для полинома $T(x) = x^4/4 + bx^2/2$ и проверить знакопостоянность мнимой части скачка функции $H(z)$ на $\mathbb{R}$.

7. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПОИСКА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО НЕСКОЛЬКИМ КОЭФФИЦИЕНТАМ РОСТКОВ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

Напомним постановку задачи (см. (5.15)). Даны многочлен $T(z) = z^{2p}/2p + \dots$ и константы a_1, a_2 . Требуется найти алгебраическую функцию $H(z)$ третьего порядка рода ноль, ветви которой не имеют полюсов в $\mathbb{C}$, а в окрестности $z = \infty$ имеют разложения

$$H_0(z) = T'(z) - \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$H(z) := \{H_j(z)\}_{j=0}^2: \quad H_1(z) = a_1 + \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \text{gen } H = 0. \quad (7.1)$$

$$H_2(z) = a_2 + \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

Нас будут интересовать точки ветвления H , структура (уравнение) ее римановой поверхности и, наконец, уравнение самой функции H .

Единственное решение мы будем выбирать, привлекая следующее дополнительное условие. Все функции H , удовлетворяющие (7.1), имеют (с учетом кратностей) четыре точки ветвления (вследствие формулы Римана–Гурвица, связывающей число разветвлений алгебраической римановой поверхности с числом листов и родом поверхности). Нас будет интересовать функция H , имеющая для любых действительных значений параметров $a_1 > a_2$ по крайней мере две действительные точки ветвления, при этом мнимая часть скачка функции $H(z)$ на $\mathbb{R}$ должна иметь постоянный знак.

Для решения задачи поиска функции (7.1) мы построим униформизацию алгебраической кривой $H(z)$ и конформное отображение римановой поверхности $H(z)$ на сферу. На римановой поверхности функции $H(z)$ (обозначим ее $\mathfrak{R}$) возьмем рациональную функцию $t(z)$ “степени” один (с одним нулем и одним полюсом). Такие функции существуют ($\text{gen } H(z) = 0$), они осуществляют конформное отображение римановой поверхности $\mathfrak{R}$ на сферу $\overline{\mathbb{C}}$. Зафиксируем это конформное отображение условием

$$\begin{aligned} t_0(\infty) &= \infty, \\ t(z) &:= \{t_0(z), t_1(z), t_2(z)\}: \quad t_1(\infty) = -1, \quad t \in H(\mathfrak{R} \setminus \{\infty^{(0)}\}). \quad (7.2) \\ t_2(\infty) &= -1, \end{aligned}$$

Обратная функция $z(t)$, $t \in \overline{\mathbb{C}}$, осуществляет конформное отображение $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{R}$. Она является рациональной функцией переменной t и в силу (7.2) имеет вид

$$z(t) = c_1 t + c_2 + \frac{c_3}{t-1} + \frac{c_4}{t+1}. \quad (7.3)$$

Области однолиственности этой рациональной функции суть прообразы листов поверхности $\mathfrak{R}$ при этом отображении.

Рассмотрим функцию $H(z(t))$ как функцию переменной $t \in \overline{\mathbb{C}}$. Так как $H(z)$ имеет единственный (кратный) полюс в точке $\{\infty^{(0)}\} \in \mathfrak{R}$, она является многочленом переменной t ,

$$H(z(t)) := R(t), \quad (7.4)$$

причем $R(t)$ является полиномиальной частью разложения функции $T'(z)|_{z=z(t)}$:

$$T'(z)|_{z=z(t)} = R(t) + \frac{B}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right). \quad (7.5)$$

Таким образом, рациональные функции (7.3), (7.4) осуществляют униформизацию алгебраической кривой $H(z)$:

$$H = R(t), \quad z = z(t), \quad (7.6)$$

а риманова поверхность $\mathfrak{R}$ имеет уравнение

$$c_1 t^3 + (c_2 - z)t^2 + (c_4 + c_3 - c_1)t - c_4 + c_3 - c_2 + z = 0. \quad (7.7)$$

Чтобы определить неизвестные коэффициенты (c_1, c_2, c_3, c_4) , рассмотрим поведение $H(z)$ в окрестности бесконечности. Получаем систему из пяти нелинейных алгебраических уравнений

$$B = \frac{1}{c_1}, \quad R(1) = a_1, \quad R'(1) = \frac{1}{2c_3}, \quad R(-1) = a_2, \quad R'(-1) = \frac{1}{2c_4} \quad (7.8)$$

для определения четырех неизвестных (первое уравнение следует из третьего и пятого). В следующем разделе мы найдем ее решение для некоторых специальных случаев.

8. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Упростим задачу (7.1), рассматривая ее для четных многочленов и симметричных a_1, a_2 :

$$T(x) = T(-x), \quad a := a_1 = -a_2.$$

В этом случае можно ограничиться симметричными конформными отображениями, и отображение (7.3) будет зависеть лишь от двух параметров:

$$z(t) = ct + \frac{2c_3 t}{t^2 - 1}. \quad (8.1)$$

Уравнение (7.7) для римановой поверхности $\mathfrak{R}$ превращается в

$$ct^3 - zt^2 + (2c_3 - c)t + z = 0, \quad (8.2)$$

а для определения c и c_3 достаточно двух уравнений из следующих трех (третье уравнение эквивалентно первому, см. (7.8)):

$$B = \frac{1}{c}, \quad R(1) = a, \quad R'(1) = \frac{1}{2c_3}. \quad (8.3)$$

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Гауссовы ансамбли с внешним источником $A := \text{diag} \{-a, a\}$. Пусть

$$\frac{V(x)}{n} = T(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Разложение (7.5) в данном случае имеет вид

$$z(t) = ct + \frac{2c_3}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

что дает $R(t) = ct$, $B = 2c_3$. Система (8.3) превращается в

$$2c_3 = \frac{1}{c}, \quad c = a, \quad c = \frac{1}{2c_3},$$

откуда сразу следует явный вид униформизации (7.6) кривой $H(z)$:

$$z = at + \frac{1}{a^2} \frac{at}{t^2 - 1}, \quad H = at \quad \Rightarrow \quad z = H + \frac{H}{H^2 - a^2},$$

откуда, в свою очередь, вытекает уравнение (3.5) на $H(z)$.

ПРИМЕР 2. “Quartic” потенциал. Рассмотрим

$$V(x) = nT(x) = n \frac{x^4}{4}.$$

Разложение (7.5) с учетом (8.1) дает

$$z^3(t) = c^3 t^3 + 6c_3 c^2 t + \frac{6c_3 c^2 + 12c_3^2 c}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

откуда $R(t) := c^3 t^3 + 6c_3 c^2 t$, $B := 6c_3 c^2 + 12c_3^2 c$. Система (8.3) превращается в

$$6c_3 c^2 + 12c_3^2 c - \frac{1}{c} = 0, \quad c^3 + 6c_3 c^2 = a, \quad 6c_3 c^2 + 3c^3 = \frac{1}{2c_3}.$$

Выражаем из второго уравнения c_3 и подставляем в первое, получаем

$$c_3 = \frac{a - c^3}{6c^2}, \quad 2c^6 - ac^3 + 3c^2 - a^2 = 0. \quad (8.4)$$

Это, в свою очередь, дает униформизацию (7.6) кривой $H(z)$:

$$H = c^3 t^3 + (a - c^3)t, \quad z = \frac{3c^3 t^3 - 4c^3 t + at}{3c^2(t^2 - 1)}, \quad (8.5)$$

а также уравнение для ее римановой поверхности (см. (8.2))

$$ct^3 - zt^2 + \frac{a - 4c^3}{3c^2}t + z = 0$$

с точками ветвления $\{e\}$ (см. (4.7)), удовлетворяющими биквадратному уравнению

$$108c^5 e^4 + 3c(a^2 - 62ac^3 - 11c^6)e^2 + 4(4c^3 - a)^3 = 0. \quad (8.6)$$

Теперь выберем единственное решение системы (8.4). Алгебраическая функция $c(a)$ имеет единственную ветвь, положительную при $a > 0$ (см. (4.5)): $c = c(a) > 0$ таково, что

$$2c^6 - ac^3 + 3c^2 - a^2 = 0, \quad c(a) > 0. \quad (8.7)$$

Только эта ветвь при больших a ($a > a_0$, $a_0 = 2\sqrt[4]{6}/3$, $c(a_0) = \sqrt[4]{1/6}$) обеспечивает действительность всех четырех корней уравнения (8.6), при этом для всех $a > 0$ скачок $H(z)$ имеет мнимую часть постоянного знака. Наконец, подставляя униформизацию (8.5) в уравнение (4.2) для $H(z)$ (это уравнение следует из известных исходных данных задачи (7.1)),

$$H^3 - z^3 H^2 + (z^2 + \alpha)H + a^2 z^3 + \beta z = 0,$$

и исключая t , с учетом уравнения (8.7) получаем

$$\alpha := \frac{(4 + 3c^4)(a - 4c^3)}{9c}, \quad \beta := \frac{c^3(1 + c^4 - ca)(4 + 3c^4)}{a - c^3}.$$

Замечая, что уравнение (8.7) эквивалентно $3c^2(c^4 - ac + 1) = (a - c^3)^2$, упрощаем выражение для β (см. (4.4)), что завершает доказательство теоремы 4.2.

ПРИМЕР 3. Ангармонический потенциал. Перейдем к общему потенциалу

$$V(x) = nT(x) = n\left(\frac{x^4}{4} + b\frac{x^2}{2}\right).$$

Разложение (7.5) с учетом (8.1) дает

$$R(t) = c^3 t^3 + c(6c_3 c + b)t, \quad R'(t) := 3c^3 t^2 + 6c_3 c^2 + cb.$$

Система (8.3) превращается в

$$c^3 + 6c_3 c^2 + cb = a, \quad 3c^3 + 6c_3 c^2 + cb = \frac{1}{2c_3}.$$

Выражая параметр c , получаем (см. (4.13)), что $c = c(a, b)$ удовлетворяет уравнению

$$Eq(c) := 2c^6 + 2bc^4 - ac^3 + 3c^2 + bac - a^2 = 0. \quad (8.8)$$

С помощью новой переменной $u := 2c^4 + ac$ от входных параметров (a, b) удобнее перейти к параметрам (c, u) :

$$c_3 = \frac{c}{2u}, \quad b = -\frac{3c^4u - u^2 + 3c^4}{uc^2}, \quad a = -\frac{2c^4 - u}{c}.$$

Это позволяет более компактно записать уравнение римановой поверхности:

$$ct^3 - zt^2 + \left(\frac{1}{u} - 1\right)ct + z = 0, \quad (8.9)$$

а также униформизацию (7.6) кривой $H(z)$:

$$H = c^3(t^3 - 3t) + t \frac{u}{c}, \quad z = ct + \frac{ct}{u(t^2 - 1)}.$$

Отсюда мы получаем явный вид (см. (4.12)) коэффициентов α, β алгебраического уравнения (4.8).

Осталось определить критическую зависимость $a(b)$, при которой происходит перестройка носителя (из двух отрезков в один) с сохранением рода римановой поверхности, а также зависимость $a(b)$, при которой происходит изменение рода римановой поверхности (т.е. уравнение (4.8) с коэффициентами (4.12) больше не описывает преобразование Коши равновесной меры). Кроме того, нужно указать единственный корень уравнения (8.8), обеспечивающий постоянность знака мнимой части скачка $H(z)$ на $\mathbb{R}$.

Критическая зависимость $a(b)$, при которой происходит перестройка носителя с сохранением нулевого рода римановой поверхности, находится следующим образом. Нули дискриминанта уравнения (8.9)

$$\mathcal{D}_t(z) := 4u^3z^4 - uc^2(8u^2 + 20u - 1)z^2 + 4c^4(u - 1)^3$$

являются точками ветвления римановой поверхности $\mathfrak{R}$ (см. (4.15)). Две из них сливаются, когда $z = 0$, следовательно, $u = 1$, что с учетом (c, u) -параметризации приводит к зависимости $a(b)$, выражающейся следующим уравнением:

$$216a^4 + (4b^3 - 288b)a^2 - (4b^4 - 64b^2 + 256) = 0.$$

Ветвь с действительным a^2 задается так:

$$a^2 = \frac{1}{18^2} (216b - 3b^3 + 3(b^2 + 24)^{3/2}), \quad (8.10)$$

откуда следует (4.14).

Однако для $a(b)$, лежащих на критической кривой (8.10), лишь при $b \geq b_0 := -\sqrt{3}$ скачок мнимой части $H(z)$ на $\mathbb{R}$ не меняет знак. Смена знака скачка функции $H(z)$

на разрезах, соединяющих точки ветвления, происходит в нулях кратности 2 дискриминанта $H(z)$: $\mathcal{D}_H(z) := \mathcal{D}_t(z)\tilde{\mathcal{D}}(z)^2$, где

$$\tilde{\mathcal{D}}(z) := (2c^8u^3 - c^4u^4)z^4 - c^2u(u^2 - 2c^4u - c^4)(2u^2 - 5c^4u - c^4)z^2 + (c^4 + 2c^4u - u^2)^3.$$

Отметим, что для точек $a(b)$, удовлетворяющих (8.10), при $b \in [-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}]$ нули $\tilde{\mathcal{D}}(z)$ оказываются внутри отрезков $\mathbb{R}$, соединяющих точки ветвления $\mathfrak{R}$. Следовательно, алгебраическая функция рода ноль (4.8)–(4.12) больше не описывает глобальный режим распределения собственных значений на этой части критической кривой (8.10). То же верно и в некоторой окрестности этой части кривой.

Опишем (в плоскости (b, a)) границы области, внутри которой глобальный режим описывается алгебраической функцией более высокого (чем ноль) рода (на самом деле, речь идет о некоторой алгебраической кривой рода два, рассмотрение которой выходит за рамки настоящей статьи). Эта область есть криволинейный треугольник Δ_{cr} с вершинами в точках V_1, V_2, V_3 (4.9) и сторонами (4.10), (4.11) (см. рисунок).

Сторона, соединяющая вершины V_1 и V_2 , находится в области (плоскости (b, a)), где $\mathfrak{R}$ имеет две действительные и две мнимые точки ветвления. Эта сторона определяется условием, что $\tilde{\mathcal{D}}(z)$ имеет нуль кратности 2 в начале координат: $\tilde{\mathcal{D}}(0) = 0$ на $\widehat{V_2V_1}$, что дает для этой кривой уравнение (4.10). Отметим, что при движении точки (b, a) , лежащей на этой границе, внутрь треугольника Δ_{cr} из нуля по действительной оси (в разные стороны) движутся два нуля $\tilde{\mathcal{D}}(z)$, в которых меняет знак мнимая часть скачка $H(z)$, взятого на отрезке, соединяющем действительные точки ветвления $\mathfrak{R}$.

Сторона, соединяющая вершины V_1 и V_3 , находится в области (плоскости (b, a)), где $\mathfrak{R}$ имеет четыре действительные точки ветвления. Эта сторона определяется условием, что два нуля $\tilde{\mathcal{D}}(z)$ совпадают с двумя ближайшими к нулю точками ветвления $\mathfrak{R}$. При движении от этой границы внутрь треугольника Δ_{cr} эти нули $\tilde{\mathcal{D}}(z)$ двигаются внутрь отрезков, один из которых соединяет положительные, а другой – отрицательные точки ветвления. Отметим, что этот критический режим (параметры (b, a) , лежащие на стороне $\widehat{V_3V_1}$) также соответствует появлению кратного положительного корня в уравнении $Eq(c) = 0$ (см. (8.8)) для параметра c (в этом случае два комплексно-сопряженных корня “встречаются” на $\mathbb{R}_+$). Последнее обстоятельство облегчает нахождение параметрического представления (4.11) этой границы критической области Δ_{cr} : $\widehat{V_3V_1}$ такова, что

$$Eq(c) = 0, \quad Eq'(c) = 0 \quad \text{при} \quad c > 0.$$

Наконец, отметим, что для обеспечения знакопостоянности мнимой части скачка $H(z)$ на $\mathbb{R}$ в коэффициенты (4.12) уравнения (4.8) необходимо подставлять максимальный по значению положительный корень уравнения $Eq(c) = 0$ (см. (8.8)), что завершает доказательство теоремы 4.3 и (как следствие) теоремы 4.4.

Благодарности. Работа частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3906.2008.1), программой № 1 ОМН РАН, РФФИ (грант № 08-01-00179).

Список литературы

- [1] Ф. Дайсон, *Статистическая теория энергетических уровней сложных систем*, ИЛ, М., 1963.
- [2] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, Boston, 1991.
- [3] P. J. Forrester, N. C. Snaith, J. J. M. Verbaarschot, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), R1–R10.
- [4] T. Nagao, P. J. Forrester, *Nucl. Phys. B*, **620**:3 (2002), 551–565.
- [5] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *J. Math. Phys.*, **21**:3 (1980), 411–421.
- [6] S. Karlin, J. McGregor, *Pacific J. Math.*, **9**:4 (1959), 1141–1164.
- [7] Л. А. Пастур, *ТМФ*, **10**:1 (1972), 102–112.
- [8] E. Brézin, S. Hikami, *Phys. Rev. E*, **55**:4 (1997), 4067–4083.
- [9] E. Brézin, S. Hikami, *Nucl. Phys. B*, **479**:3 (1996), 697–706.
- [10] E. Brézin, S. Hikami, *Phys. Rev. E*, **56**:1 (1997), 264–269.
- [11] E. Brézin, S. Hikami, *Phys. Rev. E*, **57**:4 (1998), 4140–4149.
- [12] E. Brézin, S. Hikami, *Phys. Rev. E*, **58**:6 (1998), 7176–7185.
- [13] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, *Int. Math. Res. Notices*, **2004**:3 (2004), 109–129.
- [14] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, *Comm. Math. Phys.*, **252**:1–3 (2004), 43–76.
- [15] A. I. Aptekarev, P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, *Comm. Math. Phys.*, **259**:2 (2005), 367–389.
- [16] P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, *Comm. Math. Phys.*, **270**:2 (2007), 481–517.
- [17] K. T.-R. McLaughlin, *Nonlinearity*, **20**:7 (2007), 1547–1571.
- [18] A. I. Aptekarev, *J. Comput. Appl. Math.*, **99**:1–2 (1998), 423–447.
- [19] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН, **157**, 1981, 31–48.
- [20] А. И. Аптекарев, В. А. Калягин, *Асимптотика корня n -й степени из полиномов совместной ортогональности и алгебраические функции*, Препринт № 60, Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1986.
- [21] J. Nuttall, *J. Approx. Theory*, **42**:4 (1984), 299–386.
- [22] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *УМН*, **40**:4(244) (1985), 155–156.
- [23] А. И. Аптекарев, *Докл. РАН*, **442**:4 (2008), 443–445.
- [24] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, *Internat. Math. Res. Papers*, **2008**:4 (2008), rmp007.
- [25] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:11 (1999), 1335–1425.
- [26] A. S. Fokas, A. R. Its, A. V. Kitaev, *Comm. Math. Phys.*, **147**:2 (1992), 395–430.
- [27] W. Van Assche, J. S. Geronimo, A. B. J. Kuijlaars, “Riemann–Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials”, *Special Functions, 2000: Current Perspective and Future Directions*, NATO Sci. Ser. II. Math. Phys. Chem., **30**, eds. J. Bustoz et al., Kluwer, Dordrecht, 2001, 23–59.

Поступила в редакцию 7.07.2008