Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Рочев, О мезонных вкладах в модели Намбу–Иона-Лазинио, *ТМФ*, 2009, том 159, номер 1, 81–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 08:29:32

© 2009 г.

В. Е. Рочев*

О МЕЗОННЫХ ВКЛАДАХ В МОДЕЛИ НАМБУ–ИОНА-ЛАЗИНИО

Обсуждается проблема вычисления поправок к приближению среднего поля в модели Намбу–Иона-Лазинио. Для вычисления таких поправок предложено использовать метод преобразования Лежандра относительно бислокального источника, позволяющий эффективно учитывать симметричные ограничения, связанные с киральным тождеством Уорда. Предложенным методом определены поправки к пропагатору кварка и к двухчастичной кварковой функции.

Ключевые слова: модель Намбу–Иона-Лазинио, разложение среднего поля, преобразование Лежандра, киральное тождество Уорда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ), предложенная более сорока пяти лет назад [1], явилась первой моделью динамического нарушения киральной симметрии в физике адронов. В 70-е годы модель НИЛ была переформулирована на языке кварков [2] и с тех пор является одной из наиболее успешных эффективных моделей квантовой хромодинамики легких адронов в непертурбативной области. В последние годы область применения модели НИЛ постоянно расширялась, интенсивно исследовались различные варианты модели НИЛ при конечных температурах и плотностях и другие ее приложения в ядерной физике и космологии (см. [3] и цитируемую там литературу).

В большинстве приложений используются результаты модели НИЛ в приближении среднего поля или в эквивалентном ему главному порядку $1/n_c$ -разложения (n_c – число цветов). Успехи в феноменологическом описании стимулировали изучение структуры модели НИЛ за рамками главного приближения, необходимое для уяснения области применимости результатов и их устойчивости относительно квантовых флуктуаций, вызываемых эффектами высших порядков.

Начиная с 90-х годов прошлого века интенсивно проводятся исследования модели НИЛ в рамках $1/n_c$ -разложения. При первых попытках определения поправок

*Институт физики высоких энергий, г. Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: vladimir.rochev@ihep.ru

к главному порядку $1/n_c$ -разложения выявилась основная проблема вычисления этих поправок в модели НИЛ. Эта проблема состояла в том, что прямое распространение на модель НИЛ уже разработанных к тому времени методов вычисления поправок для двумерных и трехмерных моделей оказалось неприемлемым для четырехмерной модели НИЛ, обладающей киральной симметрией. Результаты вычислений, основанных на простом сравнении порядков величин, вступали в противоречие с киральными тождествами Уорда и их следствиями. Для физически наиболее важных поправок к массе кварка и константе распада пиона задача согласования вычислений с киральными тождествами Уорда в рамках $1/n_c$ -разложения была решена в работе [4] путем диаграммного анализа вкладов в соответствующие этим поправкам полюсные члены одночастичных и двухчастичных функций Грина (см. также [5], где эти результаты были развиты и обобщены). При этом осталась нерешенной задача согласованного с симметричными требованиями определения поправок к полной двухчастичной функции, также представляющая физический интерес. Кроме того, для других непerturbативных разложений, например разложения среднего поля, которое широко применяется различных областях физической теории и в рамках которого была первоначально сформулирована модель НИЛ, проблемы учета симметричных ограничений типа тождеств Уорда и вовсе представляются неразрешимыми на языке диаграмм, поскольку в разложении среднего поля нет явного малого параметра¹⁾ (во всяком случае, для непрерывных моделей с фиксированной размерностью пространства).

Однако давно известен метод, позволяющий решать такого рода проблемы без обращения к диаграммной технике. Это метод *высших преобразований Лежандра*, предложенный в рамках квантовой статистики в работе [7] и затем применявшийся в теоретико-полевых моделях [8], в частности для описания многочастичных уравнений²⁾. Суть этого метода состоит в том, что наряду с обычными простыми источниками полей в формализме производящего функционала функций Грина вводятся мультилокальные (двойные, тройные и пр.) источники, которые, так же как и простой источник, могут рассматриваться как функциональные переменные, относительно которых производится преобразование Лежандра, т.е. замена функциональных переменных на средние значения функциональных производных по этим источникам. При этом производящий функционал преобразования Лежандра не содержит членов соответствующей степени приводимости, т.е. на языке диаграмм при наличии простого источника исключаются одночастично-приводимые диаграммы, при наличии бислокального (двойного) источника – двухчастично-приводимые и т.д.

Отметим, что именно наличие членов такого рода является причиной нарушения симметричных требований при вычислениях высших порядков $1/n_c$ -разложения, и для их устранения производится отбор двухчастично-неприводимых диаграмм,

¹⁾Для решеточных моделей таким параметром является $1/d$, где d – размерность пространства (см., например, [6]).

²⁾Заметим, что исторически укоренившееся название этого метода не вполне корректно и может привести к недоразумениям, поэтому мы будем называть его методом преобразования Лежандра относительно высших источников.

фактически соответствующий преобразованию Лежандра относительно билокального источника. Поэтому использование преобразований Лежандра относительно высших источников представляется весьма естественным инструментом для решения указанных проблем без обращения к диаграммной интерпретации. Производящий функционал преобразования Лежандра относительно билокального источника простым образом связан с ядром уравнения Бете–Солпитера для двухчастичной функции: ядро уравнения Бете–Солпитера есть связная часть второй производной производящего функционала такого преобразования Лежандра. Поэтому для проверки кирального тождества Уорда в формализме преобразования Лежандра относительно билокального источника нет нужды вычислять двухчастичную функцию, а достаточно проверить его для ядра уравнения Бете–Солпитера. Это обстоятельство весьма облегчает контроль за симметрийнными свойствами используемых приближений, так как ядро уравнения Бете–Солпитера представляет собой значительно более простую структуру по сравнению с двухчастичной функцией, т.е. неприемлемые с точки зрения симметрийных свойств приближения можно отбраковывать на ранней стадии вычислений (до определения функций Грина).

В настоящей работе мы используем метод преобразования Лежандра относительно билокального источника для определения поправок к пропагатору кварка и двухчастичной кварковой функции в разложении среднего поля модели НИЛ.

В разделе 2 рассмотрено построение разложения среднего поля для производящего функционала функций Грина на основе метода итерационного решения уравнения Швингера–Дайсона (см. [9], [10]). Основной проблемой вычисления поправок к главному приближению в этом методе является появление членов, нарушающих симметрийные ограничения, следующие из кирального тождества Уорда. Для решения этой проблемы предлагается использовать преобразование Лежандра относительно билокального источника. В разделе 3 вводится производящий функционал преобразования Лежандра, сформулировано киральное тождество Уорда для этого производящего функционала и определено приближение среднего поля в модели НИЛ на языке преобразования Лежандра.

Раздел 4 содержит основные результаты работы. Путем аппроксимации точного уравнения для производящего функционала преобразования Лежандра получено приближенное уравнение для этого функционала, дающее замкнутые уравнения для функций Грина – пропагатора кварка и двухчастичной кварковой амплитуды. В эти уравнения входят поправки к амплитуде, учитывающие мезонные вклады (в том числе вклады мезонных петель). Показано, что для такого приближения справедливы киральное тождество Уорда и, соответственно, все его следствия, т.е. применение преобразования Лежандра решает основную проблему вычисления поправок в разложении среднего поля. Получено также приближенное решение уравнения для двухчастичной амплитуды, учитывающее поправки, возникающие за счет мезонных вкладов. Примечательно, что эта амплитуда в точности соответствует выражению, которое получается путем вычисления поправки к амплитуде в разложении среднего поля (см. раздел 2), если отбросить те члены, которые приводят к нарушению

симметричных ограничений, как это и делается в диаграммном подходе, т.е. диаграммные методы выявления сохраняющих симметрию приближений получают тем самым свое обоснование в рамках метода преобразования Лежандра.

Обсуждение результатов содержится в разделе 5.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В ФОРМАЛИЗМЕ БИЛОКАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА

Мы рассматриваем модель НИЛ, обладающую киральной симметрией группы $SU_V(2) \times SU_A(2)$ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi + \frac{g}{2} \left[(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \psi)^2 \right], \quad (1)$$

где ψ – кварковое поле с n_c цветами и изоспином, g – константа связи размерности m^{-2} , $\boldsymbol{\tau}$ – матрицы Паули. Мы ограничимся рассмотрением наиболее простого физически содержательного варианта модели НИЛ, поскольку рассматриваемые нами проблемы вычисления высших порядков не меняются принципиально в любых других обобщениях этой модели (например, при расширении симметрии группы ароматов, включении векторных мезонов и т.д.) и решаются аналогично.

Разложение среднего поля в формализме бислокального источника для этой модели строится методом итерационного решения уравнений Швингера–Дайсона [9] по схеме, изложенной в работе [10]. Производящий функционал функций Грина (вакуумных ожиданий T -произведений полей) может быть представлен в виде функционального интеграла с бислокальным источником:

$$G(\eta) = \int D(\psi, \bar{\psi}) \exp \left\{ i \int \mathcal{L} dx - \int \bar{\psi}(y) \eta(y, x) \psi(x) dx dy \right\}, \quad (2)$$

где $\eta(y, x)$ – бислокальный источник спинорного поля. Заметим, что n -я функциональная производная G по источнику η есть n -частичная ($2n$ -точечная) функция Грина.

Трансляционная инвариантность меры функционального интегрирования приводит к функционально-дифференциальному уравнению Швингера–Дайсона для производящего функционала:

$$\begin{aligned} & \delta(x - y) G + i \hat{\partial}_x \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} + \\ & + i g \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta(y, x)} \operatorname{tr} \left[\frac{\delta G}{\delta \eta(x, x)} \right] + i \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \frac{\delta}{\delta \eta(y, x)} \operatorname{tr} \left[i \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x)} \right] \right\} = \\ & = \int \eta(x, x_1) \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x_1)} dx_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Главным приближением для разложения среднего поля является следующая аппроксимация функционально-дифференциального уравнения Швингера–Дайсона (3):

$$\delta(x-y)G^{(0)} + i\hat{\partial}_x \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y,x)} + \\ + ig \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta(y,x)} \text{tr} \left[\frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x,x)} \right] + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \frac{\delta}{\delta \eta(y,x)} \text{tr} \left[i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x,x)} \right] \right\} = 0. \quad (4)$$

Решением уравнения главного приближения (4) является функционал³⁾

$$G^{(0)} = e^{\text{Tr}[S_0 \star \eta]}, \quad (5)$$

где S_0 есть решение уравнения

$$\delta(x) + i\hat{\partial} S_0(x) + ig S_0(x) \text{tr}[S_0(0)] = 0. \quad (6)$$

Главное приближение (4), (5) генерирует линейную итерационную схему:

$$G = G^{(0)} + G^{(1)} + \dots + G^{(n)} + \dots,$$

где функционал n -го шага $G^{(n)}$ есть решение уравнения

$$G^{(n)} + i\hat{\partial} \frac{\delta G^{(n)}}{\delta \eta} + ig \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta} \text{tr} \left[\frac{\delta G^{(n)}}{\delta \eta} \right] + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \frac{\delta}{\delta \eta} \text{tr} \left[i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \frac{\delta G^{(n)}}{\delta \eta} \right] \right\} = \eta \star \frac{\delta G^{(n-1)}}{\delta \eta}. \quad (7)$$

Решением уравнения (7) является функционал $G^{(n)} = P^{(n)} G^{(0)}$, где $P^{(n)}$ – полином степени $2n$ по источнику η . Единственной связной функцией главного приближения является пропагатор кварка S_0 . Остальные связные функции Грина появляются на последующих шагах итерационной схемы. Первый шаг итераций содержит уравнение главного порядка для двухчастичной кварковой функции, а также уравнение для поправки к пропагатору. Следующий шаг содержит уравнения для четырехчастичной и трехчастичной функций, а также уравнения для поправки к двухчастичной функции и поправки второго порядка к пропагатору кварка и т.д. Привлекательность этой итерационной схемы состоит в простой аналитической структуре уравнений любого порядка. Фактически решение уравнений любого порядка является алгебраической задачей, в известной мере напоминающей построение ряда теории возмущений. Обратной стороной этой простоты является возникновение проблем, связанных с учетом симметрии и ее физических следствий. Основная проблема такого рода возникает при вычислении поправок к двухчастичной функции. Двухчастичная функция главного приближения в модели НИЛ содержит два полюсных члена, соответствующих составным мезонам – скалярному и псевдоскалярному. Наличие этих мезонов в спектре модели НИЛ является одним из основных эффектов модели. Скалярный мезон (сигма-мезон) является массивным, а псевдоскалярный

³⁾Здесь и ниже символ Tr означает след в операторном смысле, включающий интегрирование, в отличие от символа tr , который означает след только по дискретным индексам; символ $\star$ обозначает операторное произведение.

мезон (пион) в киральном пределе является безмассовым в соответствии с общей теоремой Намбу–Голдстоуна–Боголюбова (НГБ) для систем со спонтанно нарушенной симметрией. При вычислении поправок к двухчастичной функции в рамках изложенного выше способа построения разложения среднего поля появляются члены, содержащие полюсы второго порядка в канале кварк–антикварк. Эти члены, являющиеся артефактом вычислительной схемы, трудно согласовать с общепринятой интерпретацией результатов в терминах частиц. При попытке же интерпретировать их как первые члены некоторых разложений возникает другая проблема: пион приобретает массу в киральном пределе, что противоречит теореме НГБ. Выход из создавшейся ситуации состоит в модификации способа вычислений таким образом, чтобы сохранить безмассовость пиона в киральном пределе в теории, учитывающей поправки высших порядков. Одним из способов такой модификации является переход от производящего функционала G к производящему функционалу преобразования Лежандра относительно билакального источника η . На языке диаграмм теории возмущений такой переход означает, что учитываются только те диаграммы, которые являются двухчастично-неприводимыми (в данном канале) и не содержат указанных выше двойных полюсов. Остальные диаграммы, так же как и в обычной теории возмущений, эффективно учитываются функциональной комбинаторикой преобразования Лежандра.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА И ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Производящий функционал преобразования Лежандра определяется после перехода к логарифму $Z = i^{-1} \ln G$ путем введения полного пропагатора кварка

$$S(x, y | \eta) = i \frac{\delta Z[\eta]}{\delta \eta(y, x)} \quad (8)$$

в качестве новой функциональной переменной.

Соотношение (8) рассматривается как уравнение относительно η . Разрешая это уравнение, мы получаем η как функционал от S : $\eta = \eta[S]$. Далее вводится производящий функционал преобразования Лежандра, зависящий от функциональной переменной S :

$$W[S] = Z[\eta[S]] + i \operatorname{Tr}[S \star \eta[S]]. \quad (9)$$

Основным свойством преобразования Лежандра является соотношение

$$\frac{1}{i} \frac{\delta W}{\delta S(y, x)} = \eta(x, y), \quad (10)$$

которое следует из определений (8) и (9).

Уравнение Швингера–Дайсона для производящего функционала преобразования Лежандра с учетом этих соотношений принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta W}{\delta S(y, x)} = S^{-1}(x, y) + i\hat{\partial}\delta(x - y) + ig\delta(x - y)\{\text{tr}[S(x, y)] + i\gamma_5 \tau \text{tr}[i\gamma_5 \tau S(x, y)]\} + \\ + ig \int \left\{ S_2 \begin{pmatrix} x & y_1 \\ x & x \end{pmatrix} S^{-1}(y_1, y) + i\gamma_5 \tau S_2 \begin{pmatrix} x & y_1 \\ x & x \end{pmatrix} i\gamma_5 \tau S^{-1}(y_1, y) \right\} dy_1, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$S_2 \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = i \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta(y, x) \delta \eta(y', x')} = \frac{\delta S(x, y)}{\delta \eta(y', x')} \quad (12)$$

– двухчастичная функция. Связная часть двухчастичной функции (12) наряду с пропагатором кварка (8) является основным объектом вычислений в модели НИЛ. Именно эта функция используется для определения наблюдаемых величин, таких как массы мезонов, их распадные константы, формфакторы и пр. Согласно определению (12) двухчастичная функция как функционал от S определяется соотношением $S_2 = [\delta \eta / (\delta S)]^{-1}$ или, в развернутой записи,

$$\begin{aligned} \int S_2 \begin{pmatrix} x & y \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \frac{\delta \eta(x_1, y_1)}{\delta S(y', x')} dx_1 dy_1 = \int S_2 \begin{pmatrix} x & y \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta S(y', x') \delta S(y_1, x_1)} dx_1 dy_1 = \\ = \delta(x - y') \delta(x' - y). \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношение (13) представляет собой, по существу, уравнение для двухчастичной функции (уравнение Бете–Солпитера) в формализме преобразования Лежандра относительно билакального источника η . Ядро K уравнения Бете–Солпитера есть связная часть второй производной производящего функционала преобразования Лежандра и определяется соотношением

$$\frac{\delta \eta(x, y)}{\delta S(y', x')} = -S^{-1}(x, y') S^{-1}(x', y) + K \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Переходя к ампутированной двухчастичной функции [6]

$$F = S^{-1} \cdot S^{-1} \cdot S_2 \cdot S^{-1} \cdot S^{-1}$$

и выделяя в F связную часть

$$F \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = F^c \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} - S^{-1}(x, y') S^{-1}(x', y),$$

получаем из (13) уравнение для F^c – связной части ампутированной двухчастичной функции (двухчастичной амплитуды):

$$\begin{aligned} F^c \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} + \\ + \int S(y_1, x_2) F^c \begin{pmatrix} x & y \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} S(y_2, x_1) K \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{pmatrix} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, вычисление производящего функционала преобразования Лежандра (точнее, его производных) дает нам уравнение для кваркового пропагатора (это уравнение (11) при выключенном источнике η) и ядро уравнения Бете–Солпитера для двухчастичной функции.

Важным элементом теории поля со спонтанным нарушением киральной симметрии является киральное тождество Уорда (см., например, [6], [11]). Это тождество связывает аксиально-векторную часть двухчастичной функции с пропагатором и в киральном пределе имеет вид

$$\text{tr}_u \left[\tau \gamma_5 i \hat{\partial}_z S_2 \begin{pmatrix} z & z \\ x & y \end{pmatrix} \right] = \delta(z - y) S(x, z) \gamma_5 \tau + \delta(z - x) \tau \gamma_5 S(z, y), \quad (16)$$

где символ tr_u означает, что след берется по верхней строке функции S_2 .

Одним из важнейших следствий этого тождества является обязательное наличие простого полюса вида $1/P^2$ у функции S_2 в канале кварк–антикварк (здесь $P = p_x + p_y$ – суммарный импульс) в том случае, когда киральная симметрия спонтанно нарушена, т.е. когда у изначально безмассовых кварков появляется динамическая масса. Этот полюс означает появление в спектре теории безмассовой псевдоскалярной частицы (пиона) в полном соответствии с теоремой НГБ. Собственно, киральное тождество Уорда обеспечивает выполнение теоремы НГБ в теории со спонтанно нарушенной киральной симметрией. Отметим, что само это тождество является модельно-независимым соотношением для любой локальной теории с киральной симметрией и должно выполняться как в модели НИЛ, так и в фундаментальной теории типа КХД.

В терминах производящего функционала преобразования Лежандра это тождество в киральном пределе имеет вид

$$\begin{aligned} \tau \gamma_5 i \hat{\partial}_z (\delta(x - z) \delta(z - y)) &= \\ &= \int \text{tr}_u \left[\frac{\delta \eta(z, x_1)}{\delta S(y, x)} S(x_1, z) \gamma_5 \tau + \tau \gamma_5 S(z, x_1) \frac{\delta \eta(x_1, z)}{\delta S(y, x)} \right] dx_1. \end{aligned} \quad (17)$$

При переходе от (16) к (17) использовано соотношение (13). Формула (17) показывает, что для проверки кирального тождества Уорда в формализме преобразования Лежандра нет нужды вычислять саму двухчастичную функцию, а достаточно проверить его для ядра уравнения Бете–Солпитера.

Приближением среднего поля для производящего функционала преобразования Лежандра является уравнение Швингера–Дайсона (11) без двух последних членов:

$$\begin{aligned} \eta_0(x, y) &= \frac{1}{i} \frac{\delta W_0}{\delta S(y, x)} = \\ &= S^{-1}(x, y) + i \hat{\partial} \delta(x - y) + i g \delta(x - y) \{ \text{tr}[S(x, y)] + i \gamma_5 \tau \text{tr}[i \gamma_5 \tau S(x, y)] \}. \end{aligned} \quad (18)$$

При выключенном источнике уравнение (18) представляет собой уравнение для пропагатора кварка в главном приближении, решение которого есть $S_0 = (m - i \hat{\partial})^{-1}$,

где m – динамическая масса кварка, являющаяся решением уравнения самосогласования

$$1 = -8\text{ign}_c \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{m^2 - q^2}. \quad (19)$$

Расходящийся интеграл в уравнении (19) понимается как некоторая регуляризация.

Основным параметром порядка, определяющим степень динамического нарушения киральной симметрии, является величина

$$\chi = \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle = i \text{tr} S(x)|_{x \rightarrow 0}.$$

Кварковый киральный конденсат c определяется для каждого аромата в отдельности и в рассматриваемом нами киральном пределе есть $c = (\chi/2)^{1/3}$.

Из уравнения главного приближения (18) простым дифференцированием по S получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W_0}{\delta S(y', x') \delta S(y, x)} = & -S^{-1}(x, y') \cdot S^{-1}(x', y) + \\ & + ig\delta(x - y)\delta(x' - y')\delta(x - y')\{1 \cdot 1 + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot i\gamma_5 \boldsymbol{\tau}\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Связная часть этого выражения (т.е. второй член в правой части) есть ядро уравнения Бете–Солпитера для двухчастичной амплитуды (15) в главном порядке разложения среднего поля для модели НИЛ. Прямой проверкой легко убедиться, что киральное тождество Уорда (17) в главном приближении выполнено, что гарантирует нам существование безмассового пиона в данном приближении. Таким образом, еще до вычисления двухчастичной амплитуды в главном приближении мы можем быть уверены в том, что приближение среднего поля в формализме преобразования Лежандра удовлетворяет основному симметричному требованию модели НИЛ в киральном пределе – теореме НГБ.

Вычисление двухчастичной амплитуды в главном приближении производится следующим образом: при выключенном источнике решение уравнения для двухчастичной амплитуды имеет вид

$$F_0^c \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = \delta(x - y)\delta(x' - y')\{1 \cdot 1 A_\sigma(x - x') + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} A_\pi(x - x')\}. \quad (21)$$

Функции A_σ и A_π описывают соответственно скалярную и псевдоскалярную части двухчастичной амплитуды и являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} A_\sigma(x) &= -ig\delta(x) + ig \int l_s(x - x_1) A_\sigma(x_1) dx_1, \\ A_\pi(x) &= -ig\delta(x) + ig \int l_p(x - x_1) A_\pi(x_1) dx_1, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$l_s(x - x') = \text{tr}[S(x - x')S(x' - x)], \quad l_p(x - x') = \text{tr}[i\gamma_5 S(x - x')i\gamma_5 S(x' - x)]$$

– кварковые петли. После перехода в импульсное пространство и простых преобразований с учетом уравнения самосогласования (19) получаем для скалярной и псевдоскалярной амплитуд выражения

$$A_\sigma(P) = \frac{1}{4n_c(4m^2 - P^2)I_0(P^2)}, \quad A_\pi(P) = -\frac{1}{4n_cP^2I_0(P^2)}, \quad (23)$$

где

$$I_0(P^2) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m^2 - (P+q)^2)(m^2 - q^2)}$$

– логарифмически расходящийся интеграл, рассматриваемый, так же как и интеграл в уравнении самосогласования (19), в рамках выбранной регуляризации. Поскольку в основе модели НИЛ лежит неперенормируемое четырехфермионное взаимодействие, то выбор регуляризации является существенным моментом в практическом использовании модели НИЛ для физики адронов, хотя и не означает сколько-нибудь принципиальных различий в описании основных эффектов. Во всех наиболее часто употребляемых регуляризациях модели НИЛ, таких как регуляризация четырехмерным обрезанием в евклидовом пространстве импульсов, регуляризация трехмерным обрезанием, регуляризация “собственного времени” Фока–Швингера или регуляризация Паули–Вилларса, интеграл I_0 принимает конечные значения при $P^2 = 4m^2$ и $P^2 = 0$. Следовательно, скалярная и псевдоскалярная амплитуды, как видно из формул (23), имеют простые полюсы в этих точках, соответствующие скалярной частице с массой $2m$ (сигма-мезон) и безмассовому псевдоскалярному пиону. Появление псевдоскалярной безмассовой частицы (голдстоуна) в спектре модели со спонтанно нарушенной киральной симметрией полностью соответствует теореме НГБ.

4. ПОПРАВКИ К ГЛАВНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ (МЕЗОННЫЕ ЭФФЕКТЫ)

В главном порядке нет никакого различия в описании физических эффектов (основным из которых является появление динамической массы кварка, т.е. динамическое нарушение киральной симметрии) между формализмом преобразования Лежандра и рассмотренным в предыдущем разделе разложением среднего поля. Существенные отличия появляются при рассмотрении поправок к главному приближению. Эти поправки физически можно интерпретировать как учет взаимодействия составных мезонов с кварками, поэтому обычно их называют мезонными эффектами или эффектами мезонных петель.

Для учета этих поправок аппроксимируем в уравнении (11) точную двухчастичную функцию (как функционал от S) двухчастичной функцией главного приближения. Тогда уравнение для производящего функционала будет генерировать замкнутые уравнения для функций Грина, учитывающие вклады мезонов.

Уравнение для производящего функционала преобразования Лежандра с учетом поправок имеет вид

$$\eta(x, y) = S^{-1}(x, y) + i\hat{\partial}\delta(x - y) + ig\delta(x - y)\{\text{tr}[S(x, y)] + i\gamma_5\tau\text{tr}[i\gamma_5\tau S(x, y)]\} + \frac{1}{i}\frac{\delta W_1}{\delta S(y, x)}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}\frac{\delta W_1}{\delta S(y, x)} = & ig \int \left\{ S(x, x_1) \text{tr}_d \left[S(x, x_2) F_0 \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} S(y_2, x) \right] + \right. \\ & \left. + (i\gamma_5\tau S(x, x_1)) \text{tr}_d \left[i\gamma_5\tau S(x, x_2) F_0 \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} S(y_2, x) \right] \right\} dx_1 dx_2 dy_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь символ tr_d означает, что след берется по нижней строке функции F_0 . Используя уравнение для двухчастичной функции (13) в главном порядке, это уравнение можно привести к более компактному виду

$$\frac{1}{i}\frac{\delta W_1}{\delta S(y, x)} = \int S(y_1, x_1) F_0^c \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x & y_1 \end{pmatrix} dx_1 dy_1. \quad (26)$$

Переход к такому представлению значительно сокращает объем вычислений, особенно при вычислении двухчастичной функции.

Заметим, что F_0^c совпадает с функцией (21) только при выключенном источнике. В уравнении (26) F_0^c есть функционал от S , производные которого вычисляются с помощью соотношения (13).

При выключенном источнике уравнение (26) дает нам уравнение для кваркового пропагатора. С учетом результатов главного порядка это уравнение приводится к виду

$$S^{-1}(x - y) = (-i\hat{\partial} - g\chi)\delta(x - y) - A_\sigma(x - y)S(x - y) - 3A_\pi(x - y)(i\gamma_5 S(x - y)i\gamma_5). \quad (27)$$

Обратимся к определению поправок к двухчастичной функции. Производная уравнения (26) по функциональной переменной S дает нам поправку к ядру уравнения Бете–Солпитера для двухчастичной функции:

$$K_1 \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = F_0^c \begin{pmatrix} x' & y \\ x & y' \end{pmatrix} + \int S(y_1, x_1) \frac{\delta F_0^c \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x & y_1 \end{pmatrix}}{\delta S(y', x')} dx_1 dy_1. \quad (28)$$

Для вычисления функциональной производной $\delta F_0^c/\delta S$ необходимо обратиться к соотношению (15). Дифференцирование этого соотношения приводит к уравнению для трехчастичной функции $\delta F_0^c/\delta S$. Это уравнение того же аналитического типа, что и уравнение для двухчастичной функции главного приближения, но с более

сложной алгебраической структурой. Результатом вычислений является следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_0^c \begin{pmatrix} x & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}}{\delta S(y', x')} = & -\delta(x'' - y'') \left\{ A_\sigma(x'' - y') \int F_0^c \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y_1 \end{pmatrix} S(y_1 - y') dy_1 + \right. \\ & + A_\sigma(x' - y'') \int S(x' - x_1) F_0^c \begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & y' \end{pmatrix} dx_1 + \\ & + i\gamma_5 \tau \left[A_\pi(x'' - y') \int F_0^c \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y_1 \end{pmatrix} S(y_1 - y') i\gamma_5 \tau dy_1 + \right. \\ & \left. \left. + A_\pi(x' - y'') \int i\gamma_5 \tau S(x' - x_1) F_0^c \begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & y' \end{pmatrix} dx_1 \right] \right\}. \quad (29) \end{aligned}$$

Формула (29) вместе с (28) дает нам поправку к ядру уравнения Бете–Солпитера для двухчастичной функции. Как видно из этих формул, эта поправка состоит из одномезонного вклада (первый член в (28)) и двухмезонных вкладов трехчастичной функции (29).

Основной проблемой вычисления мезонных вкладов в двухчастичную амплитуду является требование соответствия этих поправок теореме НГБ. При вычислении таких поправок в разложении среднего поля (см. раздел 2) возникают члены, содержащие $A_\pi^2(P)$, т.е. полюсы второго порядка в канале кварк–антикварк, явным образом нарушающие эту теорему. Соответственно нарушается и киральное тождество Уорда (16), (17). При определении этих вкладов методом преобразования Лежандра киральное тождество Уорда выполняется, что обеспечивает выполнение теоремы НГБ в предлагаемом подходе. Сама проверка кирального тождества Уорда (17) для ядра уравнения Бете–Солпитера, включающего поправки (28), (29), является менее тривиальной процедурой по сравнению с аналогичной проверкой для главного приближения. Для того чтобы убедиться в выполнении тождества (17), нужно, используя уравнения (22), преобразовать двухмезонные вклады в (17), определяемые формулой (29), в сумму одномезонных и двухмезонных вкладов, после чего одномезонные вклады сокращаются с другими одномезонными вкладами, входящими в тождество (17), а двухмезонные вклады сокращаются между собой.

Это результат показывает, что рассматриваемое нами приближение является физически приемлемым, т.е. сохраняющим симметрию приближением для вычисления мезонных вкладов в двухчастичную амплитуду. Но для практических вычислений сделанного приближения, т.е. замены точной двухчастичной функции двухчастичной функцией главного приближения, недостаточно, так как найти решение уравнения (15) с весьма сложным ядром $K_0 + K_1$ не представляется возможным. Следовательно, необходимы дальнейшие приближения, при этом критерием выполнения симметричных требований является отсутствие нефизических членов типа указанных выше двойных полюсов. Наиболее простым приближением такого рода

является отбрасывание члена типа $S \cdot F_1 \cdot S \star K_1$ в уравнении (15) (F_1 – поправка к амплитуде, а K_1 – поправка к ядру) как вклада более высокого порядка. Амплитуда представляется в виде $F^c = \bar{F}^c + S \cdot F_0^c \cdot S \star K_1$, где $\bar{F}^c$ есть решение уравнения

$$\bar{F}^c = -K + S \cdot \bar{F}^c \cdot S \star K_0. \quad (30)$$

Уравнение (30) является точно решаемым, и его решение есть $\bar{F}^c = K \star S \cdot F_0 \cdot S$, где F_0 – двухчастичная функция главного приближения.

В итоге мы получаем двухчастичную амплитуду с поправками, учитывающими вклады мезонов

$$F^c = F_0^c - K_1 + K_1 \star S \cdot F_0^c \cdot S + S \cdot F_0^c \cdot S \star K_1, \quad (31)$$

или, в развернутой записи,

$$\begin{aligned} F^c \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} &= F_0^c \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} - K_1 \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} + \\ &+ \int K_1 \begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} S(y_1 - x_2) F_0^c \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x' & y' \end{pmatrix} S(y_2 - x_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 + \\ &+ \int S(y_1 - x_2) F_0^c \begin{pmatrix} x & y \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} S(y_2 - x_1) K_1 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{pmatrix} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Мы не будем здесь приводить громоздкое выражение для амплитуды в импульсном пространстве в терминах мезонных и кварковых пропагаторов. Отметим лишь, что оно содержит лишь физические простые полюсы как для пиона, так и для сигма-мезона. Эта амплитуда в точности соответствует выражению, которое получается путем вычисления поправки к амплитуде в разложении среднего поля (см. раздел 2), если отбросить в этой поправке те члены, которые приводят к появлению двойных полюсов, как это делается в диаграммном подходе. Таким образом, метод преобразования Лежандра относительно бислокального источника решает проблему вычисления поправок к двухчастичной функции в разложении среднего поля модели НИЛ.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определение вклада мезонных петель в пропагатор кварка и двухчастичную функцию в модели НИЛ методом преобразования Лежандра относительно бислокального источника, проведенное в настоящей работе, выгодно отличается своей простотой и компактностью от аналогичного вычисления, основанного на разложении среднего поля для производящего функционала $G(\eta)$ (см. раздел 2), а также от вычислений, основанных на диаграммной технике. Так, вычисление функционала $G(\eta)$ помимо решения одночастичных и двухчастичных уравнений требует решения уравнений для четырехчастичной и трехчастичной функций, которые вносят вклад в уравнение для поправки к двухчастичной функции. При этом кроме физических связанных

частей этих многочастичных функций необходимо вычислять еще и их несвязные части, которые дают вклад в двухчастичное уравнение. Это обстоятельство многократно (в десятки раз) увеличивает объем вычислительной рутины по сравнению с методом преобразования Лежандра. Ситуация весьма схожа с обычной теорией возмущений, где аналогичный переход к вычислению сильно связанных диаграмм значительно сокращает и упрощает вычисления (с тем отличием, что для непертурбативных вычислений в модели НИЛ эта разница еще существенней). Еще одним заметным преимуществом использования метода преобразования Лежандра является упоминавшееся в разделе 3 изменение в структуре кирального тождества Уорда, которое после преобразования Лежандра содержит вместо двухчастичной функции гораздо более простую структуру – ядро уравнения Бете–Солшпитера. Как развитие полученных результатов и дальнейшее применение преобразований Лежандра относительно высших источников для контроля симметричных свойств теории отметим также возможность изучения сохраняющих симметрию приближений, не имеющих диаграммной интерпретации, например включение решений солитонного типа для описания барионов.

В заключение отметим еще одно свойство амплитуды (32). Нетрудно заметить, что амплитуда главного приближения (21) не является кроссинг-симметричной. Это свойство непертурбативных разложений типа $1/n_c$ -разложения или рассматриваемого здесь разложения среднего поля иногда дает повод к заявлениям о том, что для этих непертурбативных разложений кроссинг-симметрия нарушается. На самом деле это, конечно, не так. Кроссинг-симметрия не нарушается, а проявляется поэтапно, при вычислении следующих членов разложения, так что амплитуда, рассматриваемая как сумма всех членов разложения (если, конечно, предположить существование такой суммы), будет кроссинг-симметричной. Примером такого поэтапного восстановления кроссинг-симметрии является амплитуда (32). Одномезонные вклады, входящие во второй член $(-K_1)$ формулы (32), представляют собой как раз члены, “недостающие” для кроссинг-симметрии главного приближения (см. также обсуждение аналогичной проблемы кроссинг-симметрии непертурбативных разложений в квантовой электродинамике в работе [9]).

Список литературы

- [1] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, **122**:1 (1961), 345–358.
- [2] T. Eguchi, H. Sugawara, *Phys. Rev. D*, **10**:12 (1974), 4257–4262; K. Kikkawa, *Prog. Theor. Phys.*, **56**:3 (1976), 947–955; D. Ebert, M. K. Volkov, *Z. Phys. C*, **16**:3 (1983), 205–210.
- [3] M. K. Волков, А. Е. Раджабов, *УФН*, **176**:6 (2006), 569–580; К. Г. Клименко, Д. Эберт, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 95–111.
- [4] V. Dmitrasinovic, J. H. Schulze, R. Tegen, H. R. Lemmer, *Ann. Physics*, **238**:2 (1994), 332–369.
- [5] D. Ebert, M. Nagy, M. K. Volkov, *ЯФ*, **59**:1 (1996), 149–152; D. Blaschke, Yu. L. Kalinovskiy, G. Röpke, S. Schmidt, M. K. Volkov, *Phys. Rev. C*, **53**:5 (1996), 2394–2400; E. N. Nikolov, W. Broniowski, C. V. Christov, G. Röpke, K. Goeke, *Nucl. Phys. A*, **608** (1996), 411–436; M. Oertel, M. Buballa, J. Wambach, *ЯФ*, **64**:4 (2001), 757–785.

- [6] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Internat. Ser. Monogr. Phys., **85**, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [7] C. De Dominicis, *J. Math. Phys.*, **3**:5 (1962), 983–1002.
- [8] H. D. Dahmen, G. Jona-Lasinio, *Nuovo Cim. A*, **52**:3 (1967), 807–838; А. Н. Васильев, А. К. Казанский, *ТМФ*, **14**:3 (1973), 289–305; В. Е. Рочев, *ТМФ*, **51**:1 (1982), 22–33.
- [9] V. E. Rochev, *J. Phys. A*, **33**:41 (2000), 7379–7406.
- [10] R. G. Jafarov, V. E. Rochev, *Cent. Eur. J. Phys.*, **2**:2 (2004), 367–381.
- [11] Т.-П. Ченг, Л.-Ф. Ли, *Калибровочные теории в физике элементарных частиц*, Мир, М., 1987.

Поступила в редакцию 27.07.2007,
после доработки 14.08.2008