Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Налимов, В. А. Сергеев, Л. Сладкофф, Боре-
левское пересуммирование ε -разложения динамическо-
го индекса z модели $A \phi^4(O(n))$ -теории, *ТМФ*, 2009,
том 159, номер 1, 96–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 09:37:39

© 2009 г. М. Ю. Налимов*, В. А. Сергеев*, Л. Сладкофф*

БОРЕЛЕВСКОЕ ПЕРЕСУММИРОВАНИЕ ε -РАЗЛОЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ИНДЕКСА z МОДЕЛИ А $\phi^4(O(n))$ -ТЕОРИИ

Проведено борелевское пересуммирование известных на настоящий момент членов ε -разложения вплоть до порядка ε^4 динамического индекса z модели А критического поведения. Найдена асимптотика высоких порядков ε -разложения динамического индекса и обнаружено значительное отклонение вычисленных в настоящий момент порядков разложения от найденной асимптотики. Обсуждено влияние этого отклонения на погрешность результатов пересуммирования.

Ключевые слова: борелевское пересуммирование, динамический индекс, критическое поведение, асимптотика высоких порядков.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вычисления в динамических моделях сложнее, чем в статических. Например, в ε -разложении критических индексов в статических моделях достигнут порядок ε^5 . Пересуммированию соответствующих разложений посвящены многочисленные статьи. Недавно был вычислен [1] четвертый порядок ε -разложения динамического индекса z модели А [2], [3] $\phi^4(O(n))$ -теории. Модель А описывает динамику равновесных флуктуаций в окрестности критической точки разнообразных физических систем, например магнетиков. Как известно [4], [5], результаты квантово-полевых разложений (в частности, ε -разложений) суть асимптотические ряды с нулевым радиусом сходимости. Исследование асимптотик высоких порядков (АВП) в теории возмущений осуществляется с помощью метода стационарной фазы в функциональном интеграле [4]. Часто результат вычисления АВП разложения произвольной скалярной величины Q может быть представлен в виде

$$Q^{(N)} = C_Q N! (-a)^N N^{b_Q} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right). \quad (1)$$

Выражение (1) представляет собой асимптотическую оценку коэффициента при параметре разложения в N -м порядке ряда теории возмущений. Асимптотический

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: mikhail.nalimov@pobox.spbu.ru, vladimir.sergeev@gmail.com, leo_ff@mail.ru

характер разложений приводит к необходимости использования подходящего пересуммирования (например, по Борелю) для получения содержательных результатов.

В работе [6] были получены асимптотические выражения для старших порядков ε -разложений констант ренормировки в схеме минимальных вычитаний (МВ) и ε -разложения критических экспонент в $O(n)$ -симметричной ϕ^4 -теории. В работах [7], [8] показано, что АВП разложений в динамических моделях, основанных на ϕ^4 -теории, также определяется выражением (1). Для ε -разложения динамического индекса z модели А были определены параметры асимптотики

$$a = \frac{3}{n+8}, \quad b_z = 3 + \frac{n}{2}. \quad (2)$$

Данная статья посвящена борелевскому пересуммированию известных в настоящий момент членов ε -разложения динамического индекса z с учетом АВП (1), (2). Используются схемы пересуммирования Паде–Бореля–Леруа (ПБЛ) и по Борелю на базе конформного преобразования (конформ-Борель). Приведены результаты пересуммированного ε -разложения индекса z .

В статье [9] было проведено аналогичное пересуммирование разложений динамического индекса z в той же модели А, вычисленного методом ренормгруппы непосредственно в двумерном и трехмерном пространствах. Особенностью настоящей статьи (кроме использования другого регулярного разложения) является то, что нам точно известна АВП рассматриваемого разложения (в работе [9] параметры a и b рассматриваются как произвольные и используются для оптимизации вычислений). Поэтому мы имеем возможность сравнить (в ε -схеме) результаты пересуммирования с учетом точной АВП с “оптимизированными” по параметрам результатами. Следует отметить, что в ε -схеме согласие с асимптотикой следует признать скорее неудовлетворительным. По нашему мнению, причиной этого является то, что известные в настоящее время члены ε -разложения еще не приблизились к известной АВП (1). Нами вычислен коэффициент C_z этой асимптотики, расхождение между вычисленными и асимптотическими членами ε -разложения индекса z оказалось очень велико.

С учетом этих данных мы обсуждаем погрешность борелевского пересуммирования на примере ε -разложения индекса z . Показано, что стандартный метод оценки погрешности результатов пересуммирования по вкладу последнего члена разложения дает заниженные значения, в частности потому, что он не учитывает отклонение суммируемых членов ряда от асимптотики высоких порядков. В настоящей работе это отклонение предложено включить в погрешность пересуммирования.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 собраны необходимые сведения о модели А динамики критического поведения и о борелевском пересуммировании асимптотических рядов. В разделе 3 приведены результаты пересуммирования доступных на настоящий момент порядков ε -разложения динамического индекса z с использованием различных подходов. В разделе 4 получена амплитуда АВП ε -разложения динамического индекса z и обсужден вклад отклонения

пересуммируемых членов разложения от АВП в погрешность борелевского пересуммирования. Полученные результаты и погрешности результатов других авторов обсуждены в разделе 5.

2. МОДЕЛЬ А, БОРЕЛЕВСКОЕ ПЕРЕСУММИРОВАНИЕ

В теории критического поведения действие модели А имеет вид [2], [3]

$$S_R(\phi, \phi') = Z_1 \lambda \phi' \phi' + \phi' \left[-Z_2 \partial_t \phi + \lambda \left(Z_3 \partial^2 \phi - Z_4 \tau \phi - \frac{1}{6} Z_5 g \mu^\varepsilon \phi^3 \right) \right]. \quad (3)$$

Поля ϕ, ϕ' считаются n -компонентными, взаимодействие – изотропным. В функционалах подразумеваются суммирование по повторяющимся индексам полей и интегрирование по d -мерной переменной $\mathbf{x}$ и по t , λ – коэффициент Онзагера, $\varepsilon = 4 - d$, μ – ренормировочная масса, λ, τ, g – ренормированные параметры,

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_\lambda Z_{\phi'}^2, & Z_2 &= Z_{\phi'} Z_\phi, & Z_3 &= Z_{\phi'} Z_\lambda Z_\phi, \\ Z_4 &= Z_{\phi'} Z_\lambda Z_\tau Z_{\phi'}, & Z_5 &= Z_{\phi'} Z_\lambda Z_g Z_\phi^3. \end{aligned}$$

В схеме МВ константы ренормировки суть функции g и имеют вид

$$Z(g, \varepsilon) = 1 + \text{полюсные по } \varepsilon \text{ члены.}$$

Как известно [3], в динамике достаточно вычислить лишь одну новую константу ренормировки Z_λ (остальные константы ренормировки совпадают со статическими), аномальные размерности γ_i (коэффициенты в уравнении ренормализационной группы) определяются формулами $\gamma_i = \beta_g \partial_g \ln Z_i$, $\beta_g = -g(\varepsilon + \gamma_g)$.

В работе [1] был получен результат четырехпетлевого расчета в (3). Выражение для динамического индекса в модели А имеет вид

$$z = 2 + R\eta, \quad (4)$$

где

$$R = (h - 1) \left[1 - 0.188483\varepsilon + \left(-0.0999529 + \frac{b_1 n + b_0}{(n + 8)^2} \right) \varepsilon^2 \right] + O(\varepsilon^3),$$

$b_1 = 4.772294768$, $b_0 = 21.49187274$, $h = 6 \ln(4/3)$, η – индекс статической теории

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(n + 2)\varepsilon^2}{2(n + 8)^2} \left[1 + \frac{\varepsilon}{4(n + 8)^2} (-n^2 + 56n + 272) + \right. \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{16(n + 8)^4} (-5n^4 - 230n^3 + 1124n^2 + 17920n + 46144 - \\ &\quad \left. - 384(n + 8)(5n + 22)\zeta(3)) \right] + O(\varepsilon^5), \end{aligned} \quad (5)$$

ζ – дзета-функция Римана.

В табл. 1 и 2 приведены коэффициенты $z^{(k)}$ разложения (4) по ε и значения индекса z , полученные прямым суммированием ε -разложения для случаев $n = 1, 2, 3$ и $\varepsilon = 1, 2$.

ТАБЛИЦА 1. Значения коэффициентов $z^{(k)}$ ε -разложения z .

$z_\varepsilon^{(k)}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$z_\varepsilon^{(2)}$	0.0134462	0.0145218	0.0150019
$z_\varepsilon^{(3)}$	0.0110364	0.0110588	0.0105317
$z_\varepsilon^{(4)}$	-0.0055807	-0.0052671	-0.0049778

ТАБЛИЦА 2. Значения z , полученные из ε -разложения z для первых N членов.

d	N	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
2	2	2.0537846	2.0580874	2.0600076
	3	2.1420758	2.1465574	2.1442609
	4	2.0527838	2.0622836	2.0646160
3	2	2.0134462	2.0145218	2.0150019
	3	2.0244826	2.0255806	2.0255336
	4	2.0189018	2.0203135	2.0205558

В силу асимптотики (1) прямое суммирование возрастающего числа первых членов ε -разложения (4) не имеет смысла. Поэтому стоит попробовать различные процедуры пересуммирования, например метод Бореля [5], [6].

Напомним основные формулы борелевского пересуммирования [5], [10]. Пусть имеется некоторая функция Q , заданная в виде ряда по параметру ε ,

$$Q(\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} Q_k \varepsilon^k, \quad (6)$$

при этом АВП коэффициентов ряда определяется выражением (1). Преобразование Бореля ряда (6) осуществляется с помощью соотношений

$$Q(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} dt t^b e^{-t} B(\varepsilon t), \quad B(x) = \sum_{k \geq 0} B_k x^k, \quad B_k = \frac{Q_k}{\Gamma(k + b + 1)}, \quad (7)$$

где b – некоторый произвольный параметр. Знание асимптотики (1) вместе с некоторыми предположениями об аналитических свойствах $B(x)$ (см. [5], [10]) позволяет пересуммировать ряд (6) с помощью (7) и получить более точное значение величины $Q(\varepsilon)$.

Из (1) следует, что ряд $B(x)$ (7) сходится в круге $|x| < 1/a$. Ближайшая особенность ряда лежит на отрицательной вещественной полуоси в точке $x = -1/a$.

Отметим, что интегрирование в (7) ведется по всей положительной вещественной полуоси $t \in [0, +\infty)$. В точке $1/a$ контур интегрирования пересекает границу круга сходимости выражения (7). Проблема аналитического продолжения (7) за область сходимости $|x| < 1/a$ решается методом конформного отображения комплексной плоскости либо методом аппроксимаций Паде [5], [10].

Конформное отображение комплексной плоскости, как правило, выбирается в виде [5], [10]

$$u(x) = \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{\sqrt{1+ax} + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad x(u) = \frac{4u}{a(u-1)^2}. \quad (8)$$

При этом контур интегрирования лежит в круге сходимости, разрез $-\infty < \operatorname{Re} x \leq -1/a$ отображается на границу единичного круга $|u| = 1$, точка $x = -1/a$ отображается в $u = -1$, бесконечно удаленная точка отображается в точку $u = 1$. Малым значениям x при отображении (8) соответствуют малые u , и можно переписать ряд (7) в терминах переменной u :

$$B(x) = \sum_{n \geq 0} x^n B_n \quad \Longrightarrow \quad B(u) = \sum_{n \geq 0} u^n U_n,$$

где

$$U_0 = B_0, \quad U_n = \sum_{m=1}^n B_m \left(\frac{4}{a}\right)^m C_{n+m-1}^{n-m}, \quad n \geq 1. \quad (9)$$

Тогда преобразование конформ-Борель величины Q приобретает вид

$$Q(\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} U_k \int_0^{+\infty} dt t^k e^{-t} (u(\varepsilon t))^k. \quad (10)$$

При использовании метода ПБЛ для ряда (7) вычисляются аппроксимации Паде

$$\mathcal{P}_M^L(x) = \frac{\sum_{i=0}^L p_i x^i}{1 + \sum_{j=1}^M q_j x^j}, \quad M \geq 1, \quad L + M = N. \quad (11)$$

Коэффициенты $\{p, q\}$ определяются из условия равенства коэффициентов ряда (7) и коэффициентов ряда Тейлора функции (11) при $x \rightarrow 0$:

$$B_0 = p_0, \quad B_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{P}_M^L(x) \Big|_{x=0}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (12)$$

Разрешая эту систему относительно неизвестных $\{p, q\}$, получаем

$$\begin{aligned} p_s &= p_s(B_0, B_1, \dots, B_N), & s &= 1, 2, \dots, L, \\ q_{s'} &= q_{s'}(B_0, B_1, \dots, B_N), & s' &= 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (13)$$

Образ Бореля определяется теперь как

$$Q(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} dt t^k e^{-t} \mathcal{P}_M^L(\varepsilon t). \quad (14)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотрим метод ПБЛ. Отметим, что в формулах (7), (14) нигде явно не используются значения a и b_z (2), известные из анализа АВП ε -разложения динамического индекса. Поэтому в стандартной формулировке метода ПБЛ эти параметры являются произвольными. Однако для ε -разложения динамического индекса в модели А известно [7], [8], что асимптотика высоких порядков коэффициентов $z^{(N)}$ (при ε^N) имеет вид (1) с параметрами a и b_z (2). В работе [11] параметр b выбирается из условия $b \geq b_z + 1.5$, что позволяет ослабить сингулярность образа Бореля (7) в точке $x = -1/a$. Воспользуемся этим условием в методе ПБЛ и выберем значение $b = b_z + 1.5$. Обратим внимание, что при вычислении коэффициентов аппроксимаций Паде (11) нулевой порядок по ε в выражении (4) не учитывается, так как он возникает не из теории возмущений, а из анализа размерностей величин, входящих в действие модели, и является канонической размерностью частоты $d[\omega] = 2$ [3]. В методе ПБЛ используются аппроксимации Паде, для которых в определении (11) $p_i = 0$, $i = 0, 1$. Выражения для аппроксимаций Паде в схеме ПБЛ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2^2(x) &= \frac{B_2^3 x^2}{B_2^2 - B_2 B_3 x + (B_3^2 - B_2 B_4) x^2}, \\ \mathcal{P}_1^3(x) &= \frac{B_2 B_3 x^2 + (B_3^2 - B_2 B_4) x^3}{B_3 - B_4 x},\end{aligned}\tag{15}$$

где B_2, B_3, B_4 – коэффициенты ряда Бореля (7).

В табл. 3, 4 представлены результаты вычислений методом ПБЛ для $n = 1, 2, 3$ (в размерности $d = 2, 3$) для разных значений N . Хотя аппроксимации (15) существуют только при учете всех членов разложения (4), значения для $N < 4$ приведены для того, чтобы продемонстрировать скорость сходимости ряда и оценить погрешность метода ПБЛ. Они получаются путем отбрасывания вклада B_4 (для $N = 3$) и B_3, B_4 (для $N = 2$).

Таблица 3. Значения z , полученные пересуммированием первых N членов выражения (4) методом ПБЛ с использованием аппроксимации типа $\mathcal{P}_2^2$ ($b = b_z + 1.5$).

d	N	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
2	2	2.0537846	2.0580874	2.0600076
	3	2.0313245	2.0371809	2.0424021
	4	2.0195447	2.0232205	2.0260295
3	2	2.0134462	2.0145218	2.0150019
	3	2.0151405	2.0169805	2.0181449
	4	2.0111743	2.0127178	2.0136547

ТАБЛИЦА 4. Значения z , полученные пересуммированием первых N членов выражения (4) методом ПБЛ с использованием аппроксимации типа $\mathcal{P}_1^3$ ($b = b_z + 1.5$).

d	N	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
2	2	2.0537846	2.0580874	2.0600076
	3	2.1420758	2.1465574	2.1442609
	4	2.0988800	2.1045005	2.1043143
3	2	2.0134462	2.0145218	2.0150019
	3	2.0244826	2.0255806	2.0255336
	4	2.0208646	2.0220921	2.0222247

В нашем случае из анализа АВП для ε -разложения (4) значения параметров a и b_z известны. Тогда ряд (7) должен иметь особенность полюсного типа [10] в точке $-1/a$ (при $b = b_z$). Воспользуемся этой информацией в методе ПБЛ и определим аппроксимации Паде выражением

$$\mathcal{P}_{M+1,-1/a}^L(x) = \frac{1}{1+ax} \mathcal{P}_M^L(x). \quad (16)$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1,-1/a}^4(x) &= \frac{B_2x^2 + (aB_2 + B_3)x^3 + (aB_3 + B_4)x^4}{1+ax}, \\ \mathcal{P}_{2,-1/a}^3(x) &= \frac{B_2(aB_2 + B_3)x^2 + (a^2B_2^2 + aB_2B_3 - B_2B_4 + B_3^2)x^3}{(1+ax)(aB_2 + B_3 - (aB_3 + B_4)x)}, \\ \mathcal{P}_{3,-1/a}^2(x) &= \frac{B_2^3x^2}{(1+ax)(B_2^2 - (aB_2 + B_3)x + (a^2B_2^2 + aB_2B_3 + B_3^2 - B_4B_2)x^2)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где коэффициенты определяются из (12), (13). Стоит отметить, что условие применимости аппроксимаций (17) в методе ПБЛ складывается из двух требований: интегрируемость выражения (14) (особые точки лежат вне области интегрирования); точка $-1/a$ является ближайшей к нулю особенностью ряда (7) (особые точки лежат во внешности круга $|x| < 1/a$). В табл. 5 приведены значения полюсов функций (17) для $n = 1, 2, 3$.

ТАБЛИЦА 5. Расположение полюсов функций $\mathcal{P}_{1,-1/a}^4$, $\mathcal{P}_{2,-1/a}^3$ и $\mathcal{P}_{3,-1/a}^2$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\mathcal{P}_{1,-1/a}^4$	-3	-10/3	-11/3
$\mathcal{P}_{2,-1/a}^3$	-3, 15.33	-10/3, 17.40	-11/3, 19.94
$\mathcal{P}_{3,-1/a}^2$	$0.10 \cdot 10^7$, $0.61 \cdot 10^{-5}$ -3	$0.29 \cdot 10^7$, $0.27 \cdot 10^{-5}$ -10/3	$0.89 \cdot 10^7$, $0.10 \cdot 10^{-5}$ -11/3

Таблица 6. Значения z , полученные методом ПБЛ с использованием аппроксимации типа $\mathcal{P}_{1,-1/a}^4$ и первых N членов ряда (4) ($b = b_z$).

d	N	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
2	2	2.0537846	2.0580874	2.0600076
	3	2.1420758	2.1465574	2.1442609
	4	2.1274836	2.1322986	2.1303831
3	2	2.0134462	2.0145218	2.0150019
	3	2.0244826	2.0255806	2.0255336
	4	2.0229318	2.0240719	2.0240707

Таблица 7. Значения z , полученные методом КП для первых N членов ряда (4) ($b = b_z + 1.5$).

d	N	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
2	2	2.0064932	2.0073128	2.0078256
	3	2.0198686	2.0220831	2.0233094
	4	2.0369831	2.0406409	2.0423686
3	2	2.0032593	2.0036430	2.0038735
	3	2.0081436	2.0089683	2.0093953
	4	2.0127529	2.0138750	2.0143549

Функции $\mathcal{P}_{2,-1/a}^3$ и $\mathcal{P}_{3,-1/a}^2$ имеют полюсы на $\mathcal{R}^+$, что приводит к расходимости интеграла (14). Таким образом, только аппроксимация $\mathcal{P}_{1,-1/a}^4$ удовлетворяет условию применимости. Результаты расчетов методом ПБЛ с использованием $\mathcal{P}_{1,-1/a}^4$ представлены в табл. 6. Результаты, полученные методом конформного преобразования (КП) (8), представлены в табл. 7. Здесь, как и в методе ПБЛ параметр $b = b_z + 1.5$. Значения постоянных a и b_z определяются из (2).

4. О ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПЕРЕСУММИРОВАНИЯ ПО БОРЕЛЮ

Как правило, погрешности пересуммирования рядов по Борелю оцениваются вкладом последнего учтенного члена разложения. Например, для случая $n = 1$, $d = 3$ из табл. 3, 4, 6, 7 находим:

$$\begin{aligned}
 \text{ПБЛ } \mathcal{P}_2^2: & \quad z = 2.011 \pm 0.004, \\
 \text{ПБЛ } \mathcal{P}_1^3: & \quad z = 2.020 \pm 0.004, \\
 \text{ПБЛ } \mathcal{P}_{1,-1/a}^4: & \quad z = 2.023 \pm 0.002, \\
 \text{КП:} & \quad z = 2.013 \pm 0.005.
 \end{aligned} \tag{18}$$

С учетом указанной погрешности полученные результаты не вполне согласуются друг с другом. Причиной этого, скорее всего, является дополнительный источник погрешности, в качестве которого, как было отмечено в работе [11], следует считать отклонения вычисленных членов разложения от асимптотики. В работах [7], [8] для динамического индекса z были вычислены параметры a и b_z (2) АВП (1). Чтобы оценить, соответствуют ли значения из табл. 1 асимптотике, необходимо вычислить амплитуду асимптотики C_z старшего члена разложения динамического индекса z . Заметим, что значение b_z АВП индекса z совпадает с $b_\eta = 3 + n/2$ АВП статического индекса η (5). Параметр a и АВП ε -разложения положения фиксированной точки метода ренормализационной группы g_* для этих индексов также совпадают. В этом случае для z можно буквально повторить вычисление амплитуды C_η статического индекса η , проведенное в работе [6], где было показано, что значение C_η определяется АВП $g_*(\varepsilon)$ и первым нетривиальным членом ε -разложения индекса η . Следовательно, C_z отличается от C_η лишь множителем $(h-1)$ (4), т.е. отношением первых членов ε -разложения индексов η и z . Справедливо следующее соотношение:

$$z_{\text{asyp}}^{(k)} \approx (h-1)\eta_{\text{asyp}}^{(k)}. \quad (19)$$

С учетом выражения для $\eta_{\text{asyp}}^{(k)}$ из работы [6] и h из (4) получаем асимптотические значения для коэффициентов ε -разложения индекса z (табл. 8).

ТАБЛИЦА 8. Значения коэффициентов $z_{\text{asyp}}^{(k)}$, вычисленные из асимптотики (19).

$z_{\text{asyp}}^{(k)}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$z_{\text{asyp}}^{(2)}$	0.0000034	0.0000011	0.0000003
$z_{\text{asyp}}^{(3)}$	-0.0000141	-0.0000051	-0.0000017
$z_{\text{asyp}}^{(4)}$	0.0000516	0.0000195	0.0000067

Таким образом, точные значения z в табл. 1, полученные из ε -разложения, отличаются на 2–3 порядка от асимптотических значений коэффициента z (табл. 8). Мы должны учесть это при оценке погрешности пересуммирования по Борелю.

Рассмотрим сначала случай $d = 3$. Из табл. 2 видно, что мы имеем дело с убывающим асимптотическим рядом, поэтому его значение можно использовать в качестве правильной оценки величины. Мы применяли различные процедуры пересуммирования для индекса z , некоторые из них (см. (18)) не содержат результата ε -разложения (например, $z = 2.018$ при $n = 1$, $d = 3$) в своем интервале ошибок. Таким образом, вследствие очень большого отклонения вычисленных значений порядков ε -разложения динамического индекса от АВП уместно включить все отклонения результатов суммирования по Борелю от асимптотической оценки ε -разложения (табл. 2) в погрешность пересуммированного результата. Отметим, что, как видно из табл. 3, 4, 6, метод пересуммирования ПБЛ в рассматриваемом случае привел к суммированию знакопеременных рядов, в то время как метод КП (табл. 7) – к суммированию знакопостоянного ряда. С учетом этого погрешность результата, полученного методом КП, следует считать несимметричной: $z = 2.13_{-0.0}^{+0.011}$.

Таблица 9. Значения z , вычисленные различными методами с правильной оценкой погрешности ($d = 3$).

$d = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\mathcal{P}_2^2$	$2.011 \pm 0,012$	2.013 ± 0.012	2.014 ± 0.011
$\mathcal{P}_1^3$	$2.021 \pm 0,006$	2.022 ± 0.005	2.022 ± 0.005
$\mathcal{P}_{1,-1/a}^4$	2.023 ± 0.006	2.024 ± 0.005	2.024 ± 0.005
КП	$2.013^{+0.011}_{-0.0}$	$2.014^{+0.011}_{-0.0}$	$2.014^{+0.011}_{-0.0}$

Результат пересуммирования разными методами динамического индекса при $d = 3$ с погрешностью вычислений, “исправленной” таким образом, приведен в табл. 9. Как мы видим, теперь уже все результаты согласуются между собой с учетом своих погрешностей. Наиболее надежными следует признать (хотя разность в погрешности и невелика) результаты метода ПБЛ $\mathcal{P}_{1,-1/a}^4$ и метода КП, использующих значение параметра a АВП асимптотики, в отличие от не использующих параметры АВП методов ПБЛ $\mathcal{P}_2^2$ и $\mathcal{P}_1^3$.

В случае $d = 2$ (см. табл. 2) уже сложно судить об убывании членов асимптотического ряда, так как вклад третьего члена ε -разложения индекса z значительно больше второго и порядка четвертого члена разложения. Поэтому в данной ситуации может представлять интерес только пересуммированное значение индекса. Однако, основываясь на анализе предыдущего случая ($d = 3$), мы предлагаем включить в погрешность вклад отклонения от АВП, т.е. отклонение от оценки по асимптотическому ряду.

Полученные результаты приведены в табл. 10.

Таблица 10. Значения z , вычисленные различными методами с правильной оценкой погрешности ($d = 2$).

$d = 2$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\mathcal{P}_2^2$	$2.020 \pm 0,045$	2.023 ± 0.053	2.026 ± 0.055
$\mathcal{P}_1^3$	$2.100 \pm 0,089$	2.105 ± 0.084	2.104 ± 0.080
$\mathcal{P}_{1,-1/a}^4$	2.127 ± 0.089	2.132 ± 0.084	2.130 ± 0.080
КП	$2.037^{+0.033}_{-0.0}$	$2.041^{+0.040}_{-0.0}$	$2.042^{+0.041}_{-0.0}$

Отметим, что в данном случае к знакопостоянным рядам привел не только метод КП, но и аппроксимация $\mathcal{P}_2^2$. Однако, если метод КП приводит к ряду, монотонно возрастающему к асимптотической оценке ε -разложения, то аппроксимация $\mathcal{P}_2^2$, наоборот, монотонно отклоняется от ε -оценки. Видимо этим и объясняется тот факт, что результат суммирования с аппроксимацией $\mathcal{P}_2^2$ не пересекается своим интервалом погрешности ни с каким другим результатом, кроме полученного методом КП. Тем самым опять подтверждено преимущество использования известных из АВП параметров (a, b) при пересуммировании по Борелю.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы привели результаты разных методов пересуммирования по Борелю максимально доступных на настоящий момент порядков ε -разложения динамического индекса z модели А (см. табл. 9, 10).

Для случая $d = 3$ экспериментальное значение динамического индекса для однородного антиферромагнетика FeF_2 $z = 2.1 \pm 0.1$ [12]. В результате численных экспериментов (методом Монте-Карло) получены следующие значения: $z = 1.99 \pm 0.02$ [13], $z = 1.97 \pm 0.08$ [14], $z = 2.04 \pm 0.03$ [15], $z = 2.04 \pm 0.01$ [16] и $z = 2.032 \pm 0.004$ [17]. В работе [18] получено значение $z = 2.0237 \pm 0.0055$.

Для случая $d = 2$ эксперименты дают значения: $z = 2.14 \pm 0.02$ [19], $z = 2.13 \pm 0.03$ [20], $z = 2.076 \pm 0.005$ [21], $z = 2.24 \pm 0.04$ [22], $z = 2.24 \pm 0.07$ [23], $z = 2.16 \pm 0.04$ [24] и $z = 2.1667 \pm 0.0005$ [25]. Метод высокотемпературного разложения модели Изинга при $d = 2$ дает оценку $z = 2.125$ [26]. В работе [18] получено значение $z = 2.0842 \pm 0.0039$.

В целом наши результаты (табл. 9, 10) согласуются с приведенными значениями, за исключением $d = 3$ [13], [16] и $d = 2$ [22].

В процессе вычислений мы подтвердили полезность использования результатов исследования АВП разложений для пересуммирования по Борелю.

Мы продемонстрировали заниженность стандартной оценки погрешности пересуммирования по Борелю по вкладу последнего учтенного члена и объяснили причину этого явления – отклонение от АВП вычисленных членов разложения. Можно было бы предположить, что это характерно лишь для ε -разложения, но в действительности это не так.

Обсудим результаты, полученные методом ПБЛ (табл. 3, 4). Нам известно [5], что ряд Бореля (7) содержит особенность полюсного типа в точке $-1/a$. Из (2) при $n = 1, 2, 3$ для полюса имеем $-3, -10/3$ и $-11/3$ соответственно. Сравнивая эти значения с вычисленными для аппроксимаций Паде (15) (табл. 11), приходим к выводу, что такой метод пересуммирования не согласуется с АВП для динамического индекса [7], [8]. В работе [9] для динамического индекса использовалось другое регулярное разложение (по параметру g в фиксированных целых размерностях пространства). В отличие от ε -разложения, где известна АВП, фиксирующая параметры b и a в формулах (7) и (8), в разложении по g эти параметры свободные. Авторы работы [9] предложили другие способы выбора значений параметра b в методе ПБЛ. Их оказалось несколько. Одновременно из всего набора аппроксимаций Паде (11) была выбрана “лучшая” ($\mathcal{P}_1^3$), которая вместе с вычисленными ранее значениями b

ТАБЛИЦА 11. Расположение полюсов функций $\mathcal{P}_1^3$ и $\mathcal{P}_2^2$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\mathcal{P}_1^3$	-17.80	-19.95	-21.16
$\mathcal{P}_2^2$	$3.15 \pm 7.17i$	$3.58 \pm 8.19i$	$3.99 \pm 9.30i$

использовалась для пересуммирования ряда. Полученные таким образом значения затем усреднялись и в качестве погрешности использовалась среднеквадратическая. Легко показать, что “проблема полюсов” характерна и для данного случая. Для этого обратимся к выражению (15), откуда следует, что положение особенности функции $\mathcal{P}_1^3$ определяется отношением B_3/B_4 , которое, очевидно, зависит от параметра b . Таким образом, варьируя в методе ПБЛ значение параметра, мы также изменяем и положение особенности. Мы вычислили выражение B_3/B_4 для всех значений b из работы [9]. Наше предположение подтвердилось. Для разных значений параметра положения особенностей, определяющиеся величиной B_3/B_4 , сильно различаются. Как и в рассматриваемом случае ε -разложения, это свидетельствует о значительном отклонении от АВП типа (1) вычисленных членов разложения. Соответственно такое отклонение служит дополнительным источником погрешности в процедуре пересуммирования, предложенной в работе [9].

Итак, погрешность вычисления динамического индекса z (см. табл. 3, 4) достаточно велика. Можно заключить, что для уточнения результатов расчета динамического индекса необходимо не только вычисление следующих порядков ε (или иного) разложения, но может также оказаться полезным уточнение АВП разложения индекса и использование поправочных членов асимптотики в процессе пересуммирования.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-02-00125_а).

Список литературы

- [1] Л. Ц. Аджемян, С. В. Новиков, Л. Сладкофф, *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4*, **04** (2008).
- [2] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, *Rev. Modern Phys.*, **49:3** (1977), 435–479.
- [3] А. Н. Васильев, *Квантовополовая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамики*, Изд. ПИЯФ, С.-Пб., 1998.
- [4] Л. Н. Липатов, *ЖЭТФ*, **72:2** (1977), 411–427.
- [5] E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. D*, **15:6** (1977), 1544–1557; *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Internat. Ser. Monogr. Phys., **92**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1996.
- [6] М. В. Комарова, М. Ю. Нахимов, *ТМФ*, **126:3** (2001), 409–426.
- [7] J. Honkonen, M. V. Komarova, M. Yu. Nalimov, *Nucl. Phys. B*, **707:3** (2005), 493–508.
- [8] J. Honkonen, M. V. Komarova, M. Yu. Nalimov, *Nucl. Phys. B*, **714:3** (2005), 292–306.
- [9] А. С. Криницын, В. В. Прудников, П. В. Прудников, *ТМФ*, **147:1** (2006), 137–154.
- [10] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. B*, **21:9** (1980), 3976–3998.
- [11] J. Honkonen, M. Komarova, M. Nalimov, *Acta Phys. Slov.*, **52:4** (2002), 303–310.
- [12] D. P. Belanger, B. Farago, V. Jaccarino, A. R. King, C. Lartigue, F. Mezei, *J. de Phys.*, **49:C8** (1988), 1229–1230.
- [13] R. B. Pearson, J. L. Richardson, D. Toussaint, *Phys. Rev. B*, **31:7** (1985), 4472–4475.
- [14] В. В. Прудников, А. Н. Вакилов, *ЖЭТФ*, **103:3**, 962–969.
- [15] S. Wansleben, D. P. Landau, *Phys. Rev. B*, **43:7** (1991), 6006–6014.
- [16] U. Gropengiesser, *Phys. A*, **215:3** (1995), 308–310.
- [17] P. Grassberger, *Phys. A*, **214:4** (1995), 547–559.
- [18] D. I. Kazakov, D. V. Shirkov, *Fortschr. Phys.*, **28:8–9** (1980), 465–499.
- [19] C. Kalle, *J. Phys. A*, **17:14** (1984), L801–L806.

- [20] J. K. Williams, *J. Phys. A*, **18**:1 (1985), 49–60.
- [21] M. Mori, Y. Tsuda, *Phys. Rev. B*, **37**:10 (1988), 5444–5447.
- [22] P. H. Poole, N. Jan, *Phys. A*, **23**:9 (1990), L453–L459.
- [23] V. V. Prudnikov, O. N. Markov, *Europhys. Lett.*, **29**:3 (1995), 245–250.
- [24] F. Wang, N. Hatano, M. Suzuki, *J. Phys. A*, **28**:16 (1995), 4543–4552.
- [25] M. P. Nightingale, W. J. Blöte, *Phys. Rev. B*, **62**:2 (2000), 1089–1101.
- [26] Z. Rácz, M. F. Collins, *Phys. Rev. B*, **13**:7 (1976), 3074–3080.

Поступила в редакцию 11.08.2008