Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Арефьева, Р. В. Горбачев, П. Б. Медведев, Ваку-
умные решения в полевой теории Невё–Шварца ферми-
онной струны и представление нулевой кривизны в гра-
дуированных пространствах, *ТМФ*, 2009, том 159, но-
мер 1, 131–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:51:54

© 2009 г. И. Я. Арефьева*, Р. В. Горбачев*, П. Б. Медведев†

ВАКУУМНЫЕ РЕШЕНИЯ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ НЕВЁ–ШВАРЦА ФЕРМИОННОЙ СТРУНЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ В ГРАДУИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Показано, что вакуумные решения в полевой теории Невё–Шварца фермионной струны, включающие $GSO(-)$ -сектор, естественным образом связаны с представлением нулевой кривизны в градуированном пространстве специального вида. Это же представление использовано для описания эквивалентности кубической и неполиномиальных теорий также с учетом $GSO(-)$ -сектора.

Ключевые слова: струнная теория поля, представление нулевой кривизны, чисто калибровочное решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ковариантная полевая теория струны Невё–Шварца–Рамона (NSR-струны) в секторе Невё–Шварца (NS-секторе), преодолевающая трудности первоначального подхода Виттена [1] и имеющая действие типа Черна–Саймонса [2], [3], имеет в качестве уравнения движения в $GSO(+)$ -NS-секторе уравнение нулевой кривизны

$$Q\Psi + \Psi^2 = 0. \quad (1)$$

Здесь Ψ – элемент струнной алгебры, снабженной умножением $\star$ и оператором дифференцирования Q , которые удовлетворяют естественным свойствам, в частности правилу Лейбница

$$Q(\Psi_1 \star \Psi_2) = Q\Psi_1 \star \Psi_2 + (-1)^{|\Psi_1|} \Psi_1 \star Q\Psi_2,$$

где $|\Psi|$ – четность элемента Ψ (см. обзор [4]). Представление нулевой кривизны

$$\Psi = \Omega^{-1}Q\Omega, \quad (2)$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: arefeva@mi.ras.ru, rgorbachev@yandex.ru

†Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

где Ω – четный элемент струнной алгебры, является решением уравнения (1). Это утверждение основано на равенстве

$$Q\Omega^{-1} = -\Omega^{-1}(Q\Omega)\Omega^{-1}. \quad (3)$$

Формула (2) является основой для построения вакуумных решений, описывающих конденсацию тахиона бозонной струны, также имеющей действие типа Черна–Саймонса. Само решение, описывающее тахионную конденсацию бозонной струны, отличается на так называемую аномальную часть от решения, которое имеет структуру чистой калибровки. Причем именно аномальная часть этого решения вносит существенный вклад в действие [5], [6] (см. также обсуждение и развитие работы Шнабла в статьях [7]).

Тахионная конденсация в NSR-струне описывается с помощью подключения GSO(-)-сектора, и уравнения движения в этой теории имеют вид [8]

$$\begin{aligned} Q\Phi_+ + \Phi_+ \star \Phi_+ - \Phi_- \star \Phi_- &= 0, \\ Q\Phi_- + \Phi_+ \star \Phi_- - \Phi_- \star \Phi_+ &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Представление, являющееся аналогом условия нулевой кривизны для уравнения (4) построено в работе [9], и, на первый взгляд, оно не обладает структурой представления (2) при $\Phi_- \neq 0$.

Действие в теории, приводящей к уравнениям (4), может быть представлено как действие типа Черна–Саймонса [10] за счет перехода к матричнозначному полю

$$\hat{\Phi} = \Phi_+ \otimes \sigma_3 + \Phi_- \otimes i\sigma_2 \quad (5)$$

и матричнозначному BRST-заряду

$$\hat{Q} = Q \otimes \sigma_3, \quad (6)$$

где σ_i – матрица Паули, $i = 1, 2, 3$. При этом мы предполагаем, что грассмановы четности полей Φ_+ и Φ_- противоположны. Если определить четность матричного поля (5) как $|\hat{\Phi}| \equiv |\Phi_+|$, то справедливо правило Лейбница для матричнозначного BRST-заряда:

$$\hat{Q}(\hat{\Phi} \star \hat{\Psi}) = (\hat{Q}\hat{\Phi}) \star \hat{\Psi} + (-1)^{|\hat{\Phi}|} \hat{\Phi} \star (\hat{Q}\hat{\Psi}). \quad (7)$$

В матричных обозначениях система (4) записывается как уравнение

$$\hat{Q}\hat{\Phi} + \hat{\Phi} \star \hat{\Phi} = 0. \quad (8)$$

Естественно считать, что это уравнение имеет решение вида

$$\hat{\Phi} = \hat{\Omega}^{-1} \hat{Q} \hat{\Omega}, \quad (9)$$

и это действительно так, если $\hat{\Omega}$ обладает определенной четностью и справедлив аналог формулы (3). Однако если интересоваться решением, в котором $\hat{\Omega}$ не имеет определенной четности (т.е. матричные элементы $\hat{\Omega}$ имеют различную четность), то

формула (9), вообще говоря, не описывает решение уравнения (8). Тем не менее, сделав дополнительные предположения о структуре $\widehat{\Omega}$, мы можем утверждать, что формула (9) дает решение уравнения (8). Вывод такой формулы и связь ее с решением, полученным в работе [9], и являются основными результатами настоящей работы. Мы также используем эту формулу для установления связи кубической теории, включающей GSO(-)-сектор [8], с соответствующей неполиномиальной теорией [11].

Решение, описывающее тахионную конденсацию в полной (т.е. включающей GSO(-)-сектор) струне, отличается на аномальную часть от специальных матричных представлений нулевой кривизны, которые связаны с представлением, построенным в работе [9].

Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит вывод представления нулевой кривизны в матричной теории, раздел 3 посвящен построению решения уравнения (8) методом итераций, показано, что решение, полученное методом итераций для матричного уравнения, воспроизводит решение, полученное методом итераций для системы (4). В разделе 4 устанавливается эквивалентность классических решений в теории (8) и неполиномиальной теории в матричной форме.

2. ДЕЙСТВИЕ И УРАВНЕНИЕ В МАТРИЧНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

Струнно-полевое действие для NS-сектора с учетом GSO(-)-сектора, единственным образом обобщающее действие для NS-струны в GSO(+)-секторе [2], [3], имеет вид [8]

$$S[\Phi_+, \Phi_-] = -\frac{1}{g_0^2} \left[\frac{1}{2} \langle Y_{-2} \Phi_+, Q \Phi_+ \rangle + \frac{1}{3} \langle Y_{-2} \Phi_+, \Phi_+, \Phi_+ \rangle + \frac{1}{2} \langle Y_{-2} \Phi_-, Q \Phi_- \rangle - \langle Y_{-2} \Phi_+, \Phi_-, \Phi_- \rangle \right]. \quad (10)$$

Здесь множители перед скобками с нечетным числом полей фиксированы условием калибровочной инвариантности действия. Для дальнейшего важно, что Φ_+ – нечетное поле, а Φ_- – четное поле. Варьируя действие по полям Φ_+ , Φ_- , получаем уравнения движения (4) (с точностью до ядра оператора Y_{-2}). Действие (10) в матричных обозначениях (5) может быть записано как

$$S[\widehat{\Phi}] = -\frac{1}{g_0^2} \left[\frac{1}{2} \langle \widehat{Y}_{-2} \widehat{\Phi}, \widehat{Q} \widehat{\Phi} \rangle + \frac{1}{3} \langle \widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}, \widehat{\Phi} \rangle \right], \quad (11)$$

где $\widehat{Y}_{-2} = Y_{-2} \otimes \sigma_3$, при этом уравнения движения принимают вид (9). Заметим, что действие $S[\widehat{\Phi}]$ инвариантно относительно инфинитезимальных преобразований $\delta \widehat{\Phi} = \widehat{Q} \widehat{\Lambda} + [\widehat{\Phi}, \widehat{\Lambda}]$, где Λ – калибровочное поле. Здесь и в дальнейшем умножение струнных полей понимается как $\star$ -умножение.

Непосредственное вычисление показывает, что из уравнения (8) с учетом (6) и (5) следуют уравнения (4). Напомним, что поля Φ_+ и Φ_- являются полями различной четности. Именно поэтому представление нулевой кривизны мы запишем в виде

$$\widehat{\Phi} = e^{-\Lambda_+ \otimes I} e^{-\Lambda_- \otimes \sigma_1} \widehat{Q} e^{\Lambda_- \otimes \sigma_1} e^{\Lambda_+ \otimes I}. \quad (12)$$

Такая запись позволяет контролировать различные четности полей Λ_+ и Λ_- (Λ_+ – четное поле, Λ_- – нечетное поле).

На поле $\widehat{\Phi}$ следует наложить дополнительные условия $\text{Tr } \widehat{\Phi} = 0$ и $\text{Tr } (\widehat{\Phi}\sigma_1) = 0$. При этом оказывается, что представление нулевой кривизны (12) приводит к следующим представлениям для суммы и разности полей Φ_+ и Φ_- :

$$\begin{aligned}\Phi_+ + \Phi_- &= e^{-\Lambda_+} e^{\Lambda_-} Q(e^{\Lambda_-} e^{\Lambda_+}), \\ \Phi_+ - \Phi_- &= e^{-\Lambda_+} e^{-\Lambda_-} Q(e^{-\Lambda_-} e^{\Lambda_+}).\end{aligned}\tag{13}$$

Заметим, что эти соотношения не являются представлениями нулевой кривизны, так как знаки у Λ_- “неправильные”. В конце данного раздела мы приведем эти формулы к более поучительному виду.

Формулы (13) следуют из уравнения (12) в силу соотношений

$$e^{\Lambda_- \otimes \sigma_1} e^{\Lambda_+ \otimes I} = \text{ch } \Lambda_- e^{\Lambda_+} \otimes I + \text{sh } \Lambda_- e^{\Lambda_+} \otimes \sigma_1 = \Lambda_1 \otimes I + \Lambda_2 \otimes \sigma_1.\tag{14}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}e^{-\Lambda_+ \otimes I} e^{-\Lambda_- \otimes \sigma_1} Q \otimes \sigma_3 e^{\Lambda_- \otimes \sigma_1} e^{\Lambda_+ \otimes I} &= \\ &= e^{-\Lambda_+} (\text{ch } \Lambda_- \otimes I - \text{sh } \Lambda_- \otimes \sigma_1) Q \otimes \sigma_3 (\text{ch } \Lambda_- \otimes I + \text{sh } \Lambda_- \otimes \sigma_1) e^{\Lambda_+} = \\ &= e^{-\Lambda_+} [\text{ch } \Lambda_- \cdot Q(\text{ch } \Lambda_- e^{\Lambda_+}) + \text{sh } \Lambda_- \cdot Q(\text{sh } \Lambda_- e^{\Lambda_+})] \otimes \sigma_3 + \\ &\quad + e^{-\Lambda_+} [\text{ch } \Lambda_- \cdot Q(\text{sh } \Lambda_- e^{\Lambda_+}) + \text{sh } \Lambda_- \cdot Q(\text{ch } \Lambda_- e^{\Lambda_+})] \otimes i\sigma_2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Phi_+ &= e^{-\Lambda_+} [\text{ch } \Lambda_- \cdot Q(\text{ch } \Lambda_- e^{\Lambda_+}) + \text{sh } \Lambda_- \cdot Q(\text{sh } \Lambda_- e^{\Lambda_+})], \\ \Phi_- &= e^{-\Lambda_+} [\text{ch } \Lambda_- \cdot Q(\text{sh } \Lambda_- e^{\Lambda_+}) + \text{sh } \Lambda_- \cdot Q(\text{ch } \Lambda_- e^{\Lambda_+})],\end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекают соотношения (13).

Легко проверить, что $\Phi_+ + \Phi_-$ и $\Phi_+ - \Phi_-$ из (13) являются решениями системы уравнений

$$Q(\Phi_+ + \Phi_-) + (\Phi_+ - \Phi_-)(\Phi_+ + \Phi_-) = 0,\tag{15}$$

$$Q(\Phi_+ - \Phi_-) + (\Phi_+ + \Phi_-)(\Phi_+ - \Phi_-) = 0,\tag{16}$$

которая эквивалентна исходной системе (4). Действительно, воспользуемся соотношением

$$Qe^{-\Lambda} = -e^{\Lambda}(Qe^{\Lambda})e^{-\Lambda},\tag{17}$$

которое выполняется для нечетных элементов Λ , поскольку $Q(\Lambda b) = (Q\Lambda)b - \Lambda Qb$. Формула (17) следует из того, что

$$\begin{aligned}0 &= Q(e^{-X} e^X) = Q\left(\left(1 - X + \frac{X^2}{2!} + \dots\right)\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots\right)\right) = \\ &= Q(e^{-X})e^X + \left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots\right)Qe^X = Q(e^{-X})e^X + e^X Qe^X.\end{aligned}\tag{18}$$

Таким образом, формула (17) является аналогом формулы (3) для нечетных относительно действия Q полей Λ .

Проверим явно, что из соотношений (13) с учетом (17) следует (15). Имеем

$$\begin{aligned} Q(\Phi_+ + \Phi_-) &= Q(e^{-\Lambda_+} e^{\Lambda_-} Q(e^{\Lambda_-} e^{\Lambda_+})) = \\ &= (Qe^{-\Lambda_+})e^{\Lambda_-} Q(e^{\Lambda_-} e^{\Lambda_+}) + e^{-\Lambda_+} (Qe^{\Lambda_-})Q(e^{\Lambda_-} e^{\Lambda_+}). \end{aligned} \quad (19)$$

С другой стороны,

$$(\Phi_+ - \Phi_-)(\Phi_+ + \Phi_-) = e^{-\Lambda_+} e^{-\Lambda_-} Q(e^{-\Lambda_-} e^{\Lambda_+}) e^{-\Lambda_+} e^{\Lambda_-} Q(e^{\Lambda_-} e^{\Lambda_+}). \quad (20)$$

Применяя формулу (17), а также учитывая, что (в силу тех же соображений, что и при выводе (17))

$$Q(e^{-\Lambda_-} e^{\Lambda_+}) = (Qe^{-\Lambda_-})e^{\Lambda_+} + e^{-\Lambda_-} Qe^{\Lambda_+}, \quad (21)$$

получаем

$$(\Phi_+ - \Phi_-)(\Phi_+ + \Phi_-) = -(Qe^{-\Lambda_+})e^{\Lambda_-} Q(e^{\Lambda_-} e^{-\Lambda_+}) - e^{-\Lambda_+} Qe^{\Lambda_-} Q(e^{\Lambda_-} e^{\Lambda_+}), \quad (22)$$

и это с точностью до знака дает правую часть равенства (19). Так же доказывается справедливость уравнения (16).

С помощью формулы (21) можно привести равенства (13) к виду

$$\Phi_+ + \Phi_- = e^{-\Lambda_+} (\chi_+ + Q)e^{\Lambda_+}, \quad \Phi_+ - \Phi_- = e^{-\Lambda_+} (\chi_- + Q)e^{\Lambda_+},$$

где $\chi_{\pm} = e^{\pm\Lambda_-} Qe^{\pm\Lambda_-}$, т.е. $\Phi_+ \pm \Phi_-$ получаются калибровочным преобразованием из полей $\chi_{\pm}$.

3. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

В работе [9] решение уравнения движения (8) было найдено итерационным методом для каждой из компонент. В этом разделе мы покажем, как с помощью итерационного метода найти решение матричного уравнения (8).

Разложим $\hat{\phi}$ в ряд по параметру λ :

$$\hat{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \hat{\phi}_n; \quad (23)$$

подставив это разложение в уравнение движения (8), в первом порядке по λ имеем $\hat{Q}\hat{\phi}_0 = 0$. Частное решение этого уравнения есть $\hat{\phi}_0 = \hat{Q}\hat{\phi}$, где $\hat{\phi}_+$ и $\hat{\phi}_-$ суть компоненты калибровочного поля $\hat{\phi} = \hat{\phi}_+ \otimes I + \hat{\phi}_- \otimes \sigma_1$, принадлежащие соответственно $\text{GSO}(+)$ - и $\text{GSO}(-)$ -секторам и имеющие противоположные грассмановы четности. Во втором порядке по λ имеем $\hat{Q}\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_0\hat{\phi}_0 = 0$. Для $\hat{\phi}_0 = \hat{Q}\hat{\phi}$, учитывая правило Лейбница (7) для $\hat{Q}$, получаем

$$\hat{Q}\hat{\phi}_1 + \hat{Q}\hat{\phi} \star \hat{Q}\hat{\phi} = \hat{Q}(\hat{\phi}_1 - \hat{Q}\hat{\phi} \star \hat{\phi}) = 0.$$

Знак минус обусловлен тем, что мы выбираем $|\hat{\phi}| = 0$. Решение этого уравнения имеет вид $\hat{\phi}_1 = \hat{Q}\hat{\phi} \star \hat{\phi}$. Продолжая дальше итерации, мы получим $\hat{\phi}_n = \hat{Q}\hat{\phi} \star \hat{\phi}^n$, и тогда $\hat{\Phi}$ имеет вид

$$\hat{\Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \hat{Q}\hat{\phi} \star \hat{\phi}^n = \lambda \hat{Q}\hat{\phi} \frac{1}{1 - \lambda\hat{\phi}}.$$

Это выражение можно переписать как

$$\hat{\Phi} = (Q\phi_+ \otimes \sigma_3 + Q\phi_- \otimes i\sigma_2) \frac{1}{(1 - \lambda\phi_+)^2 - \lambda^2\phi_-^2} ((1 - \lambda\phi_+) \otimes I + \lambda\phi_- \otimes \sigma_1).$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= \frac{\lambda}{2} Q(\phi_+ + \phi_-) \frac{1}{1 - \lambda(\phi_+ + \phi_-)} + \frac{\lambda}{2} Q(\phi_+ - \phi_-) \frac{1}{1 - \lambda(\phi_+ - \phi_-)}, \\ \Phi_- &= \frac{\lambda}{2} Q(\phi_+ + \phi_-) \frac{1}{1 - \lambda(\phi_+ + \phi_-)} - \frac{\lambda}{2} Q(\phi_+ - \phi_-) \frac{1}{1 - \lambda(\phi_+ - \phi_-)}, \end{aligned}$$

что совпадает с полученным ранее результатом [9].

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КУБИЧЕСКОЙ И НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫХ NS-ТЕОРИЙ С УЧЕТОМ GSO(-)-СЕКТОРА

4.1. Эквивалентность теорий в GSO(+)-секторе. Напомним основные идеи и формулы эквивалентности классических решений кубической [2], [3] и неполиномиальной [12] теорий в GSO(+)-секторе, полученные в работе [13] (мы перечислим основные факты, а детали будут продемонстрированы в следующем разделе после включения GSO(-)-сектора).

Напомним, что уравнение движения струнного поля G в неполиномиальной теории записывается как

$$\eta_0(G^{-1}QG) = 0. \quad (24)$$

Здесь, в отличие от кубической полевой теории фермионной NS-струны, поле G является элементом расширенной алгебры [14], при этом соотношение (24) означает, что $G^{-1}QG$ лежит в малой алгебре¹⁾.

Определим поле Ψ , соответствующее G , формулой [13]

$$\Psi = G^{-1}QG. \quad (25)$$

Это поле является чистой калибровкой с той оговоркой, что G принадлежит большой алгебре, и поэтому Ψ удовлетворяет уравнению движения (1). Однако если G удовлетворяет уравнению движения неполиномиальной теории (24), то поле (25) лежит в малой алгебре и, следовательно, является решением кубической теории. Таким образом определено отображение g пространства решений неполиномиальной

¹⁾Здесь и ниже слова “большая” и “малая” алгебра мы употребляем в том смысле, в каком они употребляются в работе [14].

 Отображения h и g .

теории (обозначим это пространство через $\mathfrak{B}$) в пространство решений кубической теории (обозначим его через $\mathfrak{A}$) (см. рисунок):

$$g: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}, \quad g(G) = \Psi, \quad \Psi = G^{-1}QG, \quad G \in \mathfrak{B}.$$

Далее определим оператор P , включающий в себя оператор смены картины $Y(z)$ и поле $\xi(z)$, а именно

$$P = \frac{e^{i\pi/4}P(i) + e^{-i\pi/4}P(-i)}{\sqrt{2}}, \quad P(z) = (\xi Y)(z) = -(c\xi\partial\xi e^{-2\phi})(z), \quad (26)$$

где c , ξ и ϕ – духовые поля (мы, как и в работе [13], используем обозначения работы [4]). Важными свойствами такого оператора являются (см. работу [13]) равенство

$$(P\Psi_1) \star (P\Psi_2) = 0 \quad (27)$$

и правило перестановки с BRST-зарядом

$$\{Q, P(z)\} = 1. \quad (28)$$

Оператор P позволяет определить отображение $h: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ в соответствии с формулой $h: \Psi \rightarrow G = e^{P\Psi}$ (см. рисунок). Если Ψ удовлетворяет уравнению (1), то $G = h(\Psi)$ удовлетворяет уравнению (24), иными словами, $h(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{B}$. Доказательство этого факта сводится к проверке того, что $G^{-1}QG$ для поля $G = h(\Psi)$ лежит в малой алгебре, и основано на свойствах оператора P и на том, что Ψ есть решение в кубической теории.

Отображения h и g нетривиально связаны. Рассмотрим сначала композицию $g \circ h$. Для любого $\Psi \in \mathfrak{A}$ имеем $(g \circ h)(\Psi) = e^{-P\Psi}Qe^{P\Psi} = \Psi$. Следовательно, $g \circ h = \text{Id}$ и $g(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$, т.е. любое классическое решение в кубической теории представимо

в виде “чистой калибровки”. Рассмотрим теперь композицию $h \circ g$. В работе [13] доказано, что $(h \circ g)(G) \neq G$, однако

$$(h \circ g)(G) = e^{-QP(1-G^{-1})}G, \quad (29)$$

т.е. $(h \circ g)(G)$ принадлежит калибровочной орбите $\mathfrak{D}_G = \{\tilde{G} : \tilde{G} = e^{-Q\Lambda_Q}Ge^{\eta_0\Lambda_\eta}\}$ исходного поля G . Именно в терминах калибровочных орбит может быть получено наиболее прозрачное описание отображений g и h .

Пусть Ψ – произвольное поле из $\mathfrak{A}$ и $G = h(\Psi)$. Рассмотрим образ орбиты $\mathfrak{D}_\Psi = \{\tilde{\Psi} : \tilde{\Psi} = e^{-\Lambda}(\Psi + Q)e^\Lambda\}$ при отображении h : $h(\mathfrak{D}_\Psi) = \{\tilde{G} : \tilde{G} = h(\tilde{\Psi})\}$. Прямое вычисление дает [13]

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= 1 + P\tilde{\Psi} = 1 + P(e^{-\Lambda}(\Psi + Q)e^\Lambda) = 1 + P(-Qe^{-\Lambda} + e^{-\Lambda}\Psi)e^\Lambda = \\ &= (Q(Pe^{-\Lambda}) + Pe^{-\Lambda}\Psi)e^\Lambda = Q(Pe^{-\Lambda})(1 + P\Psi)e^\Lambda = Q(Pe^{-QP\Lambda})Ge^\Lambda = \\ &= e^{-QP\Lambda}Ge^\Lambda = e^{-QP\Lambda}Ge^{\eta_0\Lambda_\eta}, \end{aligned} \quad (30)$$

т.е. $h(\mathfrak{D}_\Psi)$ есть подорбита поля $G = h(\Psi)$, заданная специальным выбором калибровочных параметров Λ_Q , Λ_η или отображения $h(\mathfrak{D}_\Psi) \subset \mathfrak{D}_G$.

Пусть теперь G – произвольное поле из $\mathfrak{B}$ и $\Psi = g(G)$. Рассмотрим образ орбиты $\mathfrak{D}_G$ при отображении g , т.е. $g(\mathfrak{D}_G) = \{\tilde{\Psi} = g(\tilde{G}) : \tilde{G} \in \mathfrak{D}_G\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= \tilde{G}^{-1}Q\tilde{G} = e^{-\eta_0\Lambda_\eta}G^{-1}e^{Q\Lambda_Q}Q(e^{-Q\Lambda_Q}Ge^{\eta_0\Lambda_\eta}) = \\ &= e^{-\eta_0\Lambda_\eta}G^{-1}((QG)e^{\eta_0\Lambda_\eta} + GQe^{\eta_0\Lambda_\eta}) = e^{-\eta_0\Lambda_\eta}(\Psi + Q)e^{\eta_0\Lambda_\eta}. \end{aligned} \quad (31)$$

В силу произвольности Λ_η получаем, что $g(\mathfrak{D}_G) = \mathfrak{D}_\Psi$. Заметим теперь, что если $h(\Psi') \in \mathfrak{D}_{h(\Psi)}$, то $\Psi' \in \mathfrak{D}_\Psi$. Действительно, в силу $g \circ h = \text{Id}$ можно написать $\Psi' = g(h(\Psi'))$, и, поскольку $g(\mathfrak{D}_G) = \mathfrak{D}_\Psi$, то $h(\Psi') \in \mathfrak{D}_\Psi$.

Таким образом, мы видим, что отображения g и h могут быть сужены до отображений $h: \mathfrak{D}_\Psi \rightarrow \mathfrak{D}_G$, $g: \mathfrak{D}_G \rightarrow \mathfrak{D}_\Psi$ соответствующих орбит. При этом образ $\mathfrak{D}_\Psi$ в $\mathfrak{D}_G$ есть подорбита, задаваемая формулой (30). Образом $\mathfrak{D}_G$ служит вся орбита $\mathfrak{D}_\Psi$, при этом все элементы $\mathfrak{D}_G$, отличающиеся только значением Λ_Q , отображаются в один и тот же элемент $\mathfrak{D}_\Psi$ (см. (31)). Суженное на $h(\mathfrak{D}_\Psi)$ отображение g становится обратимым: $h \circ g|_{h(\mathfrak{D}_\Psi)} = \text{Id}$. Композиция $h \circ g$ задает в орбите $\mathfrak{D}_G$ специальное сечение (29).

Таким образом установлено взаимно однозначное (с точностью до калибровки) соответствие между решениями двух теорий в $\text{GSO}(+)$ -секторах.

4.2. Эквивалентность кубической и неполиномиальной теорий с учетом $\text{GSO}(-)$ -сектора. В этом пункте мы переносим схему рассуждений из предыдущего пункта на теорию, включающую $\text{GSO}(-)$ -сектор, используя матричное описание.

Формулировка кубической теории NS-струны, включающей $\text{GSO}(-)$ -сектор, приведена в разделе 1. В неполиномиальной теории $\hat{G} = G_+ \otimes I + G_- \otimes \sigma_1$, и уравнения движения сохраняют прежний вид (24) с $\hat{\eta}_0 \equiv \eta \otimes \sigma_3$. Из условия $\hat{G}^{-1}\hat{G} = I$ следует, что $G_+G_- = G_-G_+$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ есть множество матричных решений уравнения движения (8) и $\mathfrak{B}$ есть множество решений уравнения (24). Определим отображение g множества $\mathfrak{B}$ на множество $\mathfrak{A}$ формулой $\hat{\Psi} = g(\hat{G}) = \hat{G}^{-1} \hat{Q} \hat{G}$. Покомпонентно последнее соотношение может быть переписано как

$$\Psi_+ = G_+^{-1} Q G_+ + \frac{G_-}{G_+^2} Q G_-, \quad \Psi_- = G_+^{-1} Q G_- + \frac{G_-}{G_+^2} Q G_+. \quad (32)$$

Для того чтобы $\hat{\Psi} = g(\hat{G})$ являлось решением уравнения движения (8), необходимо и достаточно, чтобы для оператора $\hat{Q}$ было выполнено правило Лейбница, аналогичное (7). Это правило действительно выполнено, поскольку поле G_+ выбирается четным, а поле G_- – нечетным.

Отображение множества $\mathfrak{A}$ в множество $\mathfrak{B}$ зададим формулой

$$\hat{G} = h(\hat{\Psi}) = e^{\hat{P}\hat{\Psi}} = 1 + \hat{P}\hat{\Psi} \quad (33)$$

(здесь под 1 мы понимаем единичное относительно $\star$ состояние $|I\rangle \otimes I$, а $\hat{P} \equiv P \otimes \sigma_3$), и это обеспечит справедливость соотношений (27) и (28) для $\hat{P}$.

В компонентах отображение (33) записывается как

$$G_+ = 1 + P\Psi_+ = e^{P\Psi_+}, \quad G_- = P\Psi_-,$$

при этом

$$\hat{G}^{-1} = (1 - P\Psi_+) \otimes I - P\Psi_- \otimes \sigma_1 = G_+^{-1} \otimes I - G_- \otimes \sigma_1 = e^{-\hat{P}\hat{\Psi}}.$$

Рассмотрим композицию $g \circ h$. Для $\tilde{\hat{\Psi}} = (g \circ h)(\hat{\Psi})$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{\Psi}} &= (g \circ h)(\hat{\Psi}) = (1 - \hat{P}\hat{\Psi})\hat{Q}(1 + \hat{P}\hat{\Psi}) = (1 - \hat{P}\hat{\Psi})\hat{Q}\hat{P}\hat{\Psi} = (1 - \hat{P}\hat{\Psi})(1 - \hat{P}\hat{Q})\hat{\Psi} = \\ &= (1 - \hat{P}\hat{Q} - \hat{P}\hat{\Psi})\hat{\Psi} = \hat{\Psi} - \hat{P}(\hat{Q}\hat{\Psi} + \hat{\Psi}^2) = \hat{\Psi}; \end{aligned} \quad (34)$$

здесь мы использовали тот факт, что $\hat{\Psi}$ по определению удовлетворяет уравнению движения, а также матричные аналоги формул (27), (28). Таким образом, мы доказали, что $f \circ g = \text{Id}$.

Рассмотрим теперь композицию $h \circ g$. Для $\tilde{\hat{G}} = h \circ g(\hat{G})$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{G}} &= h \circ g(\hat{G}) = e^{\hat{P}\hat{G}^{-1}\hat{Q}\hat{G}} = 1 + \hat{P}\hat{G}^{-1}\hat{Q}\hat{G} = 1 - \hat{P}\hat{Q}\hat{G}^{-1} \cdot \hat{G} = \\ &= 1 - (1 - \hat{Q}\hat{P})\hat{G}^{-1} \cdot \hat{G} = 1 - 1 + \hat{Q}\hat{P}\hat{G}^{-1} \cdot \hat{G} = \hat{Q}\hat{P}\hat{G}^{-1} \cdot \hat{G}. \end{aligned} \quad (35)$$

Введем следующую параметризацию [13] для произвольного $\hat{G} \in \mathfrak{B}$:

$$\hat{G} = \frac{1}{1 - \hat{\phi}}. \quad (36)$$

Элемент $\widehat{\Psi} = g(\widehat{G}) \in \mathfrak{A}$, построенный из $\widehat{G}$, при такой параметризации примет вид ($\widehat{G}$ – четный элемент)

$$\widehat{\Psi} = \widehat{G}^{-1} \widehat{Q} \widehat{G} = -\widehat{Q} \widehat{G}^{-1} \widehat{G} = \widehat{Q} \widehat{\phi} \frac{1}{1 - \widehat{\phi}}.$$

Здесь мы использовали правило Лейбница, при этом для нас было важно, что четности G_+ и G_- различны, а также, что $\sigma_3 I = I \sigma_3$, $\sigma_3 \sigma_1 = -\sigma_1 \sigma_3$, и то, что оператор P меняет четность поля на противоположную.

Воспользуемся параметризацией (36) для (35), тогда

$$\widetilde{\widehat{G}} = \widehat{Q} \widehat{P} \widehat{G}^{-1} \widehat{G} = \widehat{Q} \widehat{P} (1 - \widehat{\phi}) \frac{1}{1 - \widehat{\phi}} = \frac{1}{1 - \widehat{\phi}} - \widehat{Q} \widehat{P} \widehat{\phi} \frac{1}{1 - \widehat{\phi}} = (1 - \widehat{Q}(\widehat{P} \widehat{\phi})) \widehat{G}, \quad (37)$$

где мы учли, что $\widehat{Q} \widehat{P} I = I$. Перепишем формулу (37) в виде

$$\widetilde{\widehat{G}} = e^{-\widehat{Q}(\widehat{P} \widehat{\phi})} \widehat{G}, \quad (38)$$

что соответствует калибровочному преобразованию с $\widehat{\Lambda}_Q = \widehat{P} \widehat{\phi}$, $\widetilde{\widehat{G}} = e^{-\widehat{Q} \widehat{\Lambda}_Q} \widehat{G} e^{\widehat{\eta}_0 \widehat{\Lambda}_\eta}$. Таким образом мы установили, что отображение $h \circ g$ отображает элемент $\widehat{G}$ в его калибровочную орбиту. В компонентах преобразование (38) запишется в виде

$$\widetilde{G}_+ = e^{-Q \Lambda_+} G_+ - Q \Lambda_- G_-, \quad \widetilde{G}_- = e^{-Q \Lambda_+} G_- - Q \Lambda_- G_+,$$

где $\Lambda_+ = P \Phi_+$, $0 \Lambda_- = P \Phi_-$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье мы построили матричное представление нулевой кривизны для струны, включающей $\text{GSO}(+)$ - и $\text{GSO}(-)$ -секторы. С помощью этого представления доказана эквивалентность подходов, использующих кубическое и неполиномиальное действие.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 08-01-00798) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-795.2008.1). Работа И. Я. Арефьевой частично поддержана INTAS (грант № 03-51-6346).

Список литературы

- [1] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **276**:2 (1986), 291–324.
- [2] I. Ya. Aref'eva, P. B. Medvedev, A. P. Zubarev, *Nucl. Phys. B*, **341**:2 (1990), 464–498.
- [3] C. R. Preitschopf, C. B. Thorn, S. A. Yost, *Nucl. Phys. B*, **337**:2 (1990), 363–433.
- [4] I. Ya. Aref'eva, D. M. Belov, A. A. Girayevets, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev, “Noncommutative field theories and (super)string field theories”, *Particles and Fields* (São Paulo, Brazil 14–27 January 2001), eds. G. A. Alves, O. J. P. Eboli, V. O. Rivelles, World Sci., River Edge, NJ, 2002, 1–163; [arXiv: hep-th/0111208](#).
- [5] M. Schnabl, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **10**:4 (2006), 433–501; [arXiv: hep-th/0511286](#).
- [6] Y. Okawa, *JHEP*, **04** (2006), 055; [arXiv: hep-th/0603159](#).

- [7] E. Fuchs, M. Kroyter, *JHEP*, **05** (2006), 006; [arXiv: hep-th/0603195](#); T. Erler, *JHEP*, **05** (2007), 083; 084; [arXiv: hep-th/0611200](#); [arXiv: hep-th/0612050](#); T. Takahashi, *JHEP*, **01** (2008), 001; [arXiv: hep-th/0710.5358](#).
- [8] I. Ya. Aref'eva, D. M. Belov, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev, *Nucl. Phys. B*, **638**:1–2 (2002), 21–40; [arXiv: hep-th/0107197](#).
- [9] I. Ya. Aref'eva, R. V. Gorbachev, P. B. Medvedev, *Tachyon Solution in Cubic Neveu–Schwarz String Field Theory*, [arXiv: 0804.2017](#).
- [10] I. Ya. Aref'eva, D. M. Belov, A. A. Giryavets, *JHEP*, **09** (2002), 050; [arXiv: hep-th/0201197](#).
- [11] N. Berkovits, A. Sen, B. Zwiebach, *Nucl. Phys. B*, **587**:1–3 (2000), 147–178; [arXiv: hep-th/0002211](#).
- [12] N. Berkovits, *Nucl. Phys. B*, **450**:1–2 (1995), 90–102; *Erratum*, **459**:1–2, 439–451; [arXiv: hep-th/9503099](#).
- [13] E. Fuchs, M. Kroyter, *JHEP*, **10** (2008), 054; [arXiv: hep-th/0805.4386](#).
- [14] D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker, *Nucl. Phys. B*, **271**:1 (1986), 93–165.

Поступила в редакцию 16.09.2008